

УДК 624.016.001.2

## Алгоритм оптимизации шпренгельной балки, основанный на свойствах распорных систем

Китов Ю.П., к.т.н., Ватуля Г.Л., к.т.н., Веревичева М.А., к.т.н.

Украинский государственный университет железнодорожного транспорта,  
Украина

**Анотація.** Запропоновано алгоритм оптимізації шпренгельної балки, який базується на її конструкційних властивостях та на вимозі мінімуму згинальних моментів. Вузли нижнього пояса розташовані на мотузковій кривій. Параметрами оптимізації є відстані між стояками. Ефективність алгоритму підтверджується тестовим прикладом. Показано, що запропонований метод оптимізації забезпечує також мінімум об'єму шпренгельної балки.

**Аннотация.** Предложен алгоритм оптимизации шпренгельной балки, основанный на ее конструктивных особенностях и на требовании минимума изгибающих моментов. Узлы нижнего пояса располагаются на веревочной кривой. Параметрами оптимизации являются расстояния между стойками. Эффективность алгоритма подтверждается тестовым примером. Показано, что предложенный метод оптимизации обеспечивает также минимум объема шпренгельной балки.

**Abstract.** The authors propose the algorithm of trussed beam optimization based on its design features and requirement of bending moment's minimum. Nodes of truss bottom chord located on a funicular curve. Distances between pillars are assumed as optimization parameters. The algorithm's efficiency is confirmed by the test example. It is proved that the offered optimization method also helps to obtain minimum of trussed beam's volume.

**Ключевые слова:** оптимизация, шпренгельная балка, веревочная кривая, изгибающий момент.

**Введение.** В качестве одного из элементов пролетных строений пешеходных мостов применяется балка, усиленная шпренгелем. Разработано много методов решения различных задач оптимального проектирования в канонической постановке [1–8]. Один из методов оптимизации трехпролетной балки, позволяющий улучшить показатели материалоемкости, представлен в [9, 10].

В настоящей работе предлагается метод оптимизации шпренгельных балок, основанный на двух положениях: 1) в комбинированных балочных конструкциях определяющими по затратам материала являются элементы, испытывающие напряженное состояние в виде сжатия с изгибом; 2) в элементах, работающих на сжатие с изгибом, уменьшение размеров сечения в большей степени определяется уменьшением изгибающего момента. Поэтому критерий оптимальности шпренгельных балок в предлагаемом методе основан на минимизации значений изгибающих моментов.

Шпренгельные балки как представители распорных систем обладают следующим свойством: если нижний пояс шпренгеля очерчен по веревочной кривой, соответствующей заданной постоянной нагрузке, и связи балки с нижним поясом шпренгеля образуют некоторый континуум, то изгибающие моменты в балке равны нулю.

На самом деле, конструкция связи балки и нижнего пояса шпренгеля осуществляется в виде ряда стоек (рис. 1). В результате в балке все же возникнут изгибающие моменты – отрицательные над стойками и положительные между ними. Величины их зависят от количества стоек и их расположения по пролету.

**Цель работы** – разработка алгоритма определения оптимального расположения стоек  $z_j$  при заданном их количестве  $n$  ( $z_j$  – расстояние между стойками с номерами  $j-1$  и  $j$ ,  $j = 1, \dots, n/2$ ).

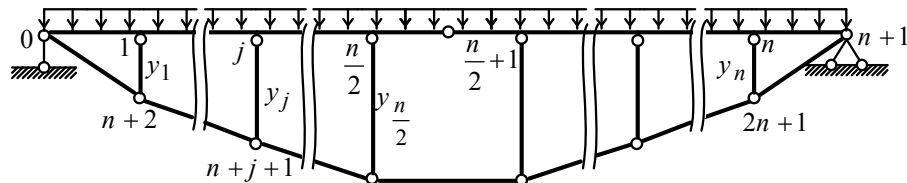


Рис. 1. Пример расчетной схемы шпренгельной балки

**Постановка задачи.** В соответствии со сказанным принимаем в качестве условия оптимальности:

$$\max_{j=1, 2, \dots, n/2} \left( \left| M_j^{\text{оп}} \right|, \left| M_j^{\text{max}} \right| \right) \rightarrow \min, \quad (1)$$

т.е. совпадение опорного и максимального пролетного изгибающих моментов на всех пролетах.

Если возникают и отрицательные, и положительные моменты, то оптимальным расположением стоек является то, при котором либо

$$\left| M_j^{\text{оп}} \right| = \left| M_{j+1}^{\text{оп}} \right|, \quad (2)$$

либо

$$M_j^{\text{max}} = \left| M_j^{\text{оп}} \right|, \quad j = 1, \dots, n/2. \quad (3)$$

Алгоритм оптимізації формулюємо, розглядаючи для визначеності рівномірно розподілену постійну навантаження інтенсивністю  $q = \text{const}$ . В цьому випадку рівняння веревочної кривої має вигляд:

$$y = \frac{4fz(l-z)}{l^2}, \quad (4)$$

де  $f$  – стріла кривої;  $l$  – пролет балки.

Отсюда формула для визначення довжин стоек в шпренгельній балці:

$$y_j = \frac{4f \left( l - \sum_{k=1}^j z_k \right) \sum_{k=1}^j z_k}{l^2}. \quad (5)$$

Запишемо вираження для визначення згинаючих моментів з урахуванням (5):

$$M_j^{\text{оп}} = \frac{q \left( l - \sum_{k=1}^j z_k \right) \left( \sum_{k=1}^j z_k \right)}{2} \left[ 1 - \frac{l^2}{4 \left( l - \sum_{k=1}^{n/2} z_k \right) \left( \sum_{k=1}^{n/2} z_k \right)} \right], \quad j = 1, 2, \dots, n/2, \quad (6)$$

$$M_j^{\text{max}} = \frac{ql}{2} z_{j, \text{max}} - \frac{q(z_{j, \text{max}})^2}{2} - \frac{ql^2}{8 \left( l - \sum_{k=1}^{n/2} z_k \right) \left( \sum_{k=1}^{n/2} z_k \right)} \left[ \left( l - \sum_{k=1}^{j-1} z_k \right) \left( \sum_{k=1}^{j-1} z_k \right) + \right. \\ \left. + \frac{\left( l - \sum_{k=1}^j z_k \right) \left( \sum_{k=1}^j z_k \right) - \left( l - \sum_{k=1}^{j-1} z_k \right) \left( \sum_{k=1}^{j-1} z_k \right)}{z_j} \left( z_{j, \text{max}} - \sum_{k=1}^{j-1} z_k \right) \right], \quad (7)$$

де  $z_{j, \text{max}}$  – відстань від початку балки до екстремума на  $j$ -м пролеті,

$$z_{j, \max} = \frac{l}{2} \left[ 1 - \frac{l \left( l - \sum_{k=1}^j z_k \right) \binom{j}{k=1} - \left( l - \sum_{k=1}^{j-1} z_k \right) \binom{j-1}{k=1}}{4 z_j \binom{n/2}{k=1} \left( \sum_{k=1}^{n/2} z_k \right)} \right]. \quad (8)$$

Анализ (6) показывает, что при любых конструктивно приемлемых значениях  $z_j < l/2$  условие (2) не может быть выполнено, поэтому оптимальное решение будет осуществляться только при условии (3).

**Алгоритм оптимизации шпренгельной балки, нагруженной постоянной равномерно распределенной нагрузкой.** Сформулируем алгоритм оптимизации на примере шпренгельной балки, приведенной на рис. 2. Пролет балки  $l = 24$  м; стрела  $f = 3,6$  м; интенсивность распределенной нагрузки  $q = 6$  т/м; количество стоек, связывающих балку с нижним поясом шпренгеля, равно  $n = 6$ .

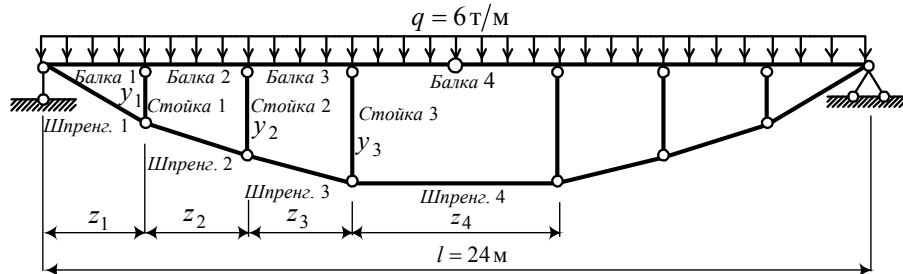


Рис. 2. Шпренгельная балка и нумерация ее элементов

**0.** В начальном приближении расстояния между стойками принимаем одинаковыми, разбивая полупролет на  $(n/2) + 1$  равных частей:

$$z_j^{(0)} = \frac{l}{2(n/2 + 1)} = 3 \text{ м}, \quad j = 1, \dots, n/2. \quad (9)$$

Вычисляем по формулам (6), (7) с учетом (8) изгибающие моменты  $M_j^{\max}, |M_j^{\text{оп}}|$  в начальном (нулевом) приближении (табл. 1).

**1.** Анализ результатов расчета начального приближения в табл. 1 показывает, что опорные изгибающие моменты над стойками возрастают к середине балки. Наибольший момент достигается над третьей опорой, максимальный изгибающий момент на третьем пролете отрицателен.

Поэтому в первом приближении необходимо уравнивать их значения, увеличивая размер последней  $n/2$ -й панели, т.е. в данном случае  $z_3$ . Остальные значения  $z_j, j=1, \dots, n/2-1$  оставляем без изменения. Изменяем  $z_3$ , начиная с  $z_3^{(0)} = 3$  м, с шагом 0,01 м до достижения равенства  $M_3^{\max} = |M_3^{\text{оп}}|$  (в общем случае  $M_{n/2}^{\max} = |M_{n/2}^{\text{оп}}|$ ). Результаты расчета 1-го приближения приведены в табл. 1.

Находим наибольший по абсолютной величине изгибающий момент среди опорных и максимальных пролетных моментов

$$M_{\max}^{(1)} = \max\left(\left|M_j^{\text{оп}}\right|, \left|M_j^{\max}\right|\right).$$

Таблица 1

Приближение	Значения $z$ , м			$M_1^{\max}$	$M_1^{\text{оп}}$	$M_2^{\max}$	$M_2^{\text{оп}}$	$M_3^{\max}$	$M_3^{\text{оп}}$
	$z_1$	$z_2$	$z_3$						
0	3	3	3	1,92	-12,6	-9,60	-21,60	-17,28	-27,00
				$z_{1,\max} = 0,8$ м		$z_{2,\max} = 4,0$ м		$z_{3,\max} = 7,2$ м	
1	3	3	4,4	5,15	-3,42	2,16	-5,86	7,76	-7,68
				$z_{1,\max} = 1,31$ м		$z_{2,\max} = 4,36$ м		$z_{3,\max} = 8,13$ м	
2	3,34	3	4,15	6,78	-3,33	2,42	-5,40	6,81	-6,84
				$z_{1,\max} = 1,50$ м		$z_{2,\max} = 4,73$ м		$z_{3,\max} = 8,36$ м	
Оптимальное	3,04	3,63	3,91	5,64	-2,715	6,094	-4,925	5,986	-6,049
				$z_{1,\max} = 1,37$ м		$z_{2,\max} = 4,75$ м		$z_{3,\max} = 8,58$ м	

2. Переходим к следующему приближению, увеличивая значение панели  $z_{n/2-1}$  (в данном случае  $z_2$ ) на 0,01 м. Для нового значения  $z_2$  уменьшается  $z_{n/2} = z_3$ , начиная с  $z_3^{(1)} = 4,4$  м, с шагом 0,01 м до

достижения равенства  $M_3^{\max} = |M_3^{\text{op}}|$ . При этом  $z_j = z_j^{(0)} = 3\text{ м}$ ,  $j < n/2 - 1$ .

При найденном оптимальном значении  $z_{n/2} = z_3$  определяем

$$M_{\max}^{(2)} = \max\left(\left|M_j^{\text{op}}\right|, \left|M_j^{\max}\right|\right).$$

3. Сравниваем  $M_{\max}^{(1)}$  и  $M_{\max}^{(2)}$  (при последующем расчете – сравниваем наибольшие моменты на двух соседних приближениях  $i$  и  $i-1$ ).

— Если  $M_{\max}^{(i)} < M_{\max}^{(i-1)}$ , то возвращаемся к пункту 2.

— Если  $M_{\max}^{(i)} \geq M_{\max}^{(i-1)}$ , то варьируем значение следующего пролета (ближе к началу балки) и повторяем пункты 2, 3 для этого номера пролета.

4. После варьирования  $z_1$  расчет заканчивается, и все полученные значения  $z_j$  ( $j=1, \dots, n/2$ ) принимаются в качестве оптимальных. Для рассматриваемой балки (рис. 2) получены оптимальные значения пролетов, приведенные в табл. 1.

**Изменение объема шпренгельной балки в процессе оптимизации.** Объем шпренгельной балки определяется как сумма объемов балки, стоек и элементов нижнего пояса шпренгеля:

$$V = V^{(б)} + V^{(с)} + V^{(ш)}. \quad (10)$$

Рассмотрим шпренгельную балку, в которой сечение балки – прямоугольное с соотношением размеров высоты и ширины  $h/b=5$ ; сечение стоек и элементов нижнего пояса – кольцо с диаметром  $D$  и толщиной  $0,025D$ . Размеры площадей и объемы элементов на каждом приближении оптимизации определяются следующим образом.

Балка работает на сжатие и изгиб, размер сечения определяется из условия прочности:

$$\frac{|N^{(б)}|}{A^{(б)}} + \frac{|M^{\max}|}{W_z} \leq mR_y, \quad (11)$$

где  $|M^{\max}|$  – наибольший из опорных и пролетных изгибающих моментов;  $N^{(6)}$  – продольная сила в балке,  $N^{(6)} = -ql^2/8y_{n/2}$ ;  $mR_y$  – расчетное сопротивление,  $mR_y = 2000 \text{ кг/см}^2$ .

Условие (11) принимает вид кубического уравнения относительно  $b$ :

$$25mR_y b^3 - 5|N^{(6)}|b - 6|M^{\max}| = 0.$$

Объем балки равен

$$V^{(6)} = A^{(6)}l. \quad (12)$$

Элементы нижнего пояса шпренгеля растянуты, поэтому размеры сечений определяются из условия прочности на растяжение:

$$A_j^{(ш)} \geq N_j^{(ш)} / mR_y, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

где  $N_j^{(ш)}$  – продольная сила в элементе (рис. 2),

$$N_j^{(ш)} = \frac{ql^2 \sqrt{z_j^2 + (y_j - y_{j-1})^2}}{8z_j y_{n/2}}, \quad y_0 = 0, \quad j = 1, 2, 3; \quad N_4^{(ш)} = \frac{ql^2}{8y_{n/2}}.$$

Объем элементов нижнего пояса равен

$$V^{(ш)} = 2 \sum_{j=1}^3 A_j^{(ш)} \sqrt{z_j^2 + (y_j - y_{j-1})^2} + A_4^{(ш)} z_4. \quad (13)$$

Стойки сжаты, поэтому размеры сечений определяются из условия устойчивости:

$$A_j^{(c)} \geq N_j^{(c)} / (\varphi \cdot mR_y), \quad (14)$$

где  $N_j^{(c)}$  – продольная сила в элементе (рис. 2),

$$N_j^{(c)} = -\frac{ql^2}{8y_{n/2}} \left( \frac{y_j - y_{j-1}}{z_j} - \frac{y_{j+1} - y_j}{z_{j+1}} \right), \quad j = 1, 2; \quad N_3^{(c)} = -\frac{ql^2}{8y_{n/2}} \left( \frac{y_3 - y_2}{z_3} \right).$$

Из (14) методом последовательных приближений определяются  $A_j^{(c)}$  и  $\varphi$ .

Для стоек

$$V^{(c)} = 2 \sum_{j=1}^3 A_j^{(c)} y_j. \quad (15)$$

Результаты расчетов согласно (10), (12), (13), (15) приведены в табл. 2. Очевидно, оптимизация шпренгельной балки из условия минимизации значений изгибающих моментов приводит к сходимости объема к минимальному значению.

Таблица 2

	Стойки			Балка				Нижний пояс			
	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4
<b>0-е приближение</b>											
N, кН	-19,20	-19,20	-28,80	128,0				144,6	136,7	131,2	128,0
Mmax, кНм				27							
A, см <sup>2</sup>	9,60	11,42	17,21	280,36				72,28	68,35	65,60	64
V, см <sup>3</sup>	20807,56			672863,9				171528			
<b>V = 865199,5 см<sup>3</sup></b>											
<b>1-е приближение</b>											
N, кН	-18,33	-22,60	-23,21	122,2				138,0	130,5	124,4	122,2
Mmax, кНм				7,762							
A, см <sup>2</sup>	9,165	13,19	14,64	146,99				68,99	65,24	62,18	61,09
V, см <sup>3</sup>	20362,98			352776				163803,1			
<b>V = 536942,1 см<sup>3</sup> (уменьшился на 37,9 %)</b>											
<b>2-е приближение</b>											
N, кН	-19,33	-21,80	-21,86	121,9				137,2	129,5	123,9	121,9
Mmax, кНм				6,84							
A, см <sup>2</sup>	9,665	12,89	13,97	138,84				68,62	64,75	61,94	60,97
V, см <sup>3</sup>	20449,88			333216,0				163495			
<b>V = 517160,9 см<sup>3</sup> (уменьшился на 3,68 %)</b>											
<b>Оптимальное приближение</b>											
N, кН	-20,29	-22,94	-20,54	121,7				137,4	129,3	123,4	121,7
Mmax, кНм				6,094							
A, см <sup>2</sup>	10,15	13,59	13,32	132,01				68,7	64,62	61,71	60,85
V, см <sup>3</sup>	20544,23			316824				163197,3			
<b>V = 500565,5 см<sup>3</sup> (уменьшился на 3,21 %)</b>											



## **Выводы**

Предложен алгоритм оптимизации шпренгельной балки, основанный на ее конструктивных особенностях. Узлы нижнего пояса располагаются на веревочной кривой, определяемой видом нагрузки. Оптимизируемыми параметрами являются расстояния между стойками. Приведен пример расчета, подтверждающий эффективность предложенного алгоритма. Расчет показал, что предложенный метод оптимизации обеспечивает также минимум объема шпренгельной балки.

## **Литература**

- [1] Виноградов А. И. Проблема оптимального проектирования в строительной механике / А. И. Виноградов. – Харьков : Вища школа, 1973. – 168 с.
- [2] Лазарев И. Б. Математические методы оптимального проектирования конструкций. / И. Б. Лазарев. – Новосибирск : НИИЖТ, 1974. – 191 с.
- [3] Китов Ю. П. Влияние параметров проектирования на оптимальность конструкции стальных балок / Ю. П. Китов, Г. Л. Ватуля // Зб. наук. праць УкрДАЗТ. – Харьков, 2011. – Вип. 125. – С. 24–33.
- [4] Китов Ю. П. Некоторые соображения о критериях оптимальности / Ю. П. Китов, Г. Л. Ватуля, М. А. Веревичева // Зб. наук. праць УкрДАЗТ. – Харьков, 2014. – Вип. 143. – С. 124–131.
- [5] Клюев С. В. Оптимальное проектирование строительных конструкций на основе эволюционных и генетических алгоритмов / С. В. Клюев, А. В. Клюев. – Lambert, 2011. – 128 с.
- [6] Чихладзе Е. Д. Спрощена діаграма граничних станів сталобетонного елемента в задачах оптимізації стержневих конструкцій / Е. Д. Чихладзе, М. Г. Черненко // Зб. наук. праць НДІБК. – Київ, 2003. – Вип. 59. – Кн. 1. – С. 310–317.
- [7] Farzin Aminifar. Optimal Design of Truss Structures via an Augmented Genetic Algorithm / Farzin Aminifar, Farrokh Aminifar, Daryoush Nazarpour // Turkish Journal of Engineering & Environmental Sciences. – 2013. – Vol. 37. – P. 56–68.
- [8] Dimou C. K. Reliability-Based Optimal Design of Truss Structures Using Particle Swarm Optimization / C. K. Dimou, V. K. Koumoussis // Journal of Computing in Civil Engineering, ASCE. – 2009. – Vol. 2/3. – P. 100–109.

- [9] Основы расчета и проектирования комбинированных и сталебетонных конструкций / [Чихладзе Э. Д., Ватуля Г. Л., Китов Ю. П. и др.]; под ред. Э. Д. Чихладзе. – К. : Транспорт Украины, 2006. – 136 с.
- [10] Китов Ю. П. Определение частот и периодов собственных колебаний комбинированных конструкций / Ю. П. Китов, Г. Л. Ватуля // Теорія і практика будівництва : вісник Національного університету «Львівська політехніка» – Львів, 2010. – Вип. 662. – С. 225–229.

*Надійшла до редколегії 23.07.2015 р.*