УДК 624.014; 624.04

Стійкість двострижневих ферм з урахуванням пружної жорсткості гребеневого вузла

Білик С.І., д.т.н.

Київський національний університет будівництва і архітектури, України

Анотація. Досліджена проблема швидкої втрати стійкості з проскоком простої двострижневої ферми, яка має шарнірне обпирання та пружно-жорсткий гребеневий вузол. Отримані аналітичні залежності між показником сили, яка прикладена у гребеневому вузлі, і показником вертикального переміщення гребеневого вузла. На прикладі показано вплив параметрів жорсткості гребеневого вузла на втрату стійкості конструкції ферми.

Аннотация. Исследована проблема быстрой потери устойчивости с проскоком простой двухстержневой фермы, которая имеет шарнирное опирание и упруго-жесткий коньковый узел. Получены аналитические зависимости между показателем силы, которая приложена в коньковом узле, и показателем вертикальных перемещений конькового узла. Показано на примере влияние параметров жесткости коньковго узла на потерю устойчивости конструкции фермы.

Abstract. The problem is investigated concerning rapid loss of stability of an elastic simple shallow truss, which has a hinge support and an elastic-hard node in a peak of the truss. Analytical relationship is received between the index of force that is applied in the ridge of the truss and index of vertical movement of the node in a truss. In the example the influence of stiffness of the ridge node on loss of stability of the truss is shown.

Ключові слова: втрата стійкості, переміщення, шарнірне обпирання, купольні системи.

Актуальність. Проблема підвищення надійності експлуатації сталевих купольних систем з різними конструкціями вузлів сполучення і системою решітки є значною науково-технічною проблемою. Ця проблема обумовлена тим, що за допомогою купольних систем є теоретична можливість перекривати значні прогони будівель від 40 до 300 метрів, використовуючи стандартні уніфіковані елементи.

Але з позицій розрахунку і конструювання конструктивні рішення для таких велико-прогонових будівель потребують більш точного розрахункового процесу на основі врахування нелінійних чинників і закономірностей, які при малих прогонах можна знехтувати і не враховувати.

Такий суворий підхід до розрахунку і проектування вимагає проводити ретельний аналіз нелінійних структурних конструкцій за рахунок створення детальних фізико-математичних моделей конструкцій. Такі

фізико-математичні моделі повинні враховувати основні фізико-математичні закономірності поведінки сукупності сполучених елементів і особливості конструктивних рішень вузлів. Це дасть змогу виконати аналіз всієї конструкційної форми.

Якщо сукупність сполучених елементів просторової системи має критичні точки втрати стійкості, то конструкція, складена із подібних конструктивних множин, буде мати подібні критичні точки. Тому досліджуються окремі ідеальні системи для отримання якісного результату. Головна мета таких досліджень – запобігти катастрофічним змінам конструкційної форми та отримати модель для дослідження більш складних систем.

Одним із підходів для моделювання роботи купольних покриттів та їх вузлової стійкості є дослідження стійкості систем, подібних до машин Земана [2].

Стійкість тришарнірних ферм як нелінійних систем при вузловому навантаженні досліджено Р. Мізесом (*Richard Edler von Mises*) [1]. Для дослідження нелінійності тришарнірних пружних систем з пружними опорами в гребеневому вузлі використовується статичний [1−8, 12] або статичний та динамічний критерії [9−11]. За певних параметрів кута нахилу стрижнів ферма може втрачати стійкість за кососиметричною формою [12].

В роботі [6] виконано нелінійний аналіз стійкості плоскої форми двострижневої системи з жорсткою вставкою. Виплив на нелінійний характер деформування втрати стійкості пружних елементів двострижневої системи показано в роботі [7]. В роботі автора отримано критерій втрати стійкості тришарнірних ферм з урахуванням кута нахилу гребеневого навантаження пружних опор [8] та пружних вертикальних опор в гребеневому вузлі, що є важливим під час аналізу роботи купольних систем.

Катастрофічної зміни форми двострижневої системи можна запобігти, збільшуючи кут нахилу до горизонту, збільшуючи площу поперечного перерізу стрижнів, тим самим, зменшуючи ефект обтиску стрижнів. Але також ефективним є спосіб збільшення конструкційної жорсткості вузлів та опор, які будуть запобігати кутам повороту перерізів у вузлах сполучень. Для прольотів куполів до 30…40 м ефективними є рішення з використанням прокатних і профільованих перерізів.

Мета досліджень – визначити вплив жорсткості гребеневого вузла на стійкість ферм Мізеса при симетричному навантаженні з врахуванням конструкційних особливостей вузла, який може сприймати згинальний момент.

Виклад досліджень. Розглянута деформована схема двострижневої ферми у разі прикладання навантаження в гребеневому вузлі вертикально і при пружній опорі в гребеневому вузлі, яка запобігає повороту стрижнів. Ферма шарнірно обпирається на опори і пружно з'єднана у гребеневому вузлі. Конструкція гребеневого вузла виконана таким чином, що вузол пружно-жорсткий (конструктивно не абсолютно жорсткий, а лише сповільняє поворот перерізу стрижнів у гребеневому вузлі) і може сприймати згинальний момент.

Основні деформації і зміна кутів нахилу стрижнів. Довжина кожного стрижня до деформації позначена через l_0, через a_0 позначена половина прогону системи (ферми, арки), висота конструкції – H_M. Початковий кут нахилу стрижнів рахуємо від вертикальної осі, і позначено через α_{0l}. Під дією сили P, яка прикладена до гребеневого вузла ферми, відбудеться обтиск стрижнів, гребеневий вузол має можливість переміщатися вертикально вниз, але куту повороту стрижнів в гребеневому вузлі буде заважати жорсткість вузла. В гребеневому вузлі виникне згинальний момент.

Після навантаження, в силу симетричності дії сили, довжини стрижнів приймуть значення l_1, зменшення довжин елементів ферми буде: $\Delta l_{01} = l_0 - l_1$. Відповідно, деформація кожного стрижня має вид:

$$\varepsilon_1 = \Delta l_{01} / l_0 = \left(l_0 - l_1\right) / l_0. \tag{1.a}$$

Довжини елементів ферми будуть скорочуватися.

$$l_0 = a_0 / \sin\alpha_{0l}; \quad l_1 = a_0 / \sin\alpha_{1l}. \tag{1.b}$$

Прийнято позначення кута нахилу стрижнів у деформованому стані: α_{1l}.

Характеристика пружності вузла є параметр – k_{EM}.

З деформаційного розрахунку отримано відношення між вертикальними переміщеннями і кутами нахилу стрижнів для двох стрижнів:

$$tg\alpha_{1l} = \frac{1}{1/tg\alpha_{0l} - \upsilon_p / a_0}. \tag{1.c}$$

Косинуси і синуси куту нахилу стрижнів після обтиску мають запис:

$$\cos\alpha_{1l}=\frac{\left(\frac{1}{tg\alpha_{0l}}-\frac{\upsilon_p}{a_0}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{tg\alpha_{0l}}-\frac{\upsilon_p}{a_0}\right)^2}};\quad \sin\alpha_{1l}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{tg\alpha_{0l}}-\frac{\upsilon_p}{a_0}\right)^2}}. \tag{1.d}$$

$$\cos\alpha_{1l}\sin\alpha_{1l}=\frac{\left(\frac{1}{tg\alpha_{0l}}-\frac{\upsilon_p}{a_0}\right)}{\left[1+\left(\frac{1}{tg\alpha_{0l}}-\frac{\upsilon_p}{a_0}\right)^2\right]}. \tag{1.e}$$

Деформація кожного стрижня залежить від вертикальних переміщень (1.a, 1.d):

$$l_1=\frac{a_0}{\sin\alpha_{1l}};\ \ \varepsilon_1=1-\frac{\sin a_{0l}}{\sin\alpha_{1l}};\ \ \varepsilon_1=1-\sin a_{0l}\sqrt{1+\left(\frac{1}{tg\alpha_{0l}}-\frac{\upsilon_p}{a_{0l}}\right)^2}. \tag{1.f}$$

Умови рівноваги. Зусилля в стрижнях обумовлюють рівновагу у вузлі. В кожному стрижні виникають зусилля, які залежать від опорних реакцій (T_{H} – горизонтальна опорна реакція в опорі, розпірна сила арки).

$$N_1=\frac{P}{2}\cos\alpha_{1l}+T_H\sin\alpha_{1l};\ \ N_1=E\varepsilon_1A_{cal}=EA_{cal}\left[1-\frac{\sin\alpha_{0l}}{\sin\alpha_{1l}}\right]. \tag{2}$$

Згинальний момент у гребеневому вузлі (M_1) обумовлений рівновагою лівої і правої частин конструкції при симетричному навантаженні і однаковому деформуванні стрижнів.

$$M_1=\frac{P}{2}\alpha_0-T_H\left(H_M-\upsilon_p\right)=\frac{P}{2}a_0-a_0T_H\left(\frac{1}{tg\alpha_{0l}}-\frac{\upsilon_p}{a_0}\right). \tag{3.a}$$

Величина згинального моменту залежить від висоти перерізу та зусиль, які виникають в поясах елементів у гребеневому вузлі. Приймаємо, що в поясах елементів виникає пара сил, які сприймають згинальний момент від повороту перерізу. Допускаємо, що пояси виконані з пружного матеріалу з модулем пружності – $Ek_{\varepsilon M}$.

Деформації поясів елементів залежать від різниці між кутами повороту перерізу та висоти перерізу – h_{wM}.

$$M_1 = N_{M1} h_{wM};\ N_{M1} = \varepsilon_{1M} A_{fcal} E k_{\varepsilon M};$$
$$\varepsilon_{1M} = (\alpha_{0l} - \alpha_{1l}) \frac{h_{wM} \sin\alpha_{0l}}{2a_0}. \tag{3.b}$$

Об'єднання відношень (3.b) приводить до формули, яка описує залежність згинального моменту від деформацій і розмірів перерізу:

$$M_1 = E k_{\varepsilon M} = (\alpha_{0l} - \alpha_{1l}) \frac{(h_{wM})^2}{2a_0} \sin\alpha_{0l} A_{fcal} E\ . \tag{3.c}$$

$$k_{\varepsilon M} = (\alpha_{0l} - \alpha_{1l}) \frac{(h_{wM})^2}{2a_0} \sin\alpha_{0l} A_{fcal}\ . \tag{3.d}$$

Запишемо систему трансцендентних алгебраїчних рівнянь (2,3.a) через поточні кути повороту стрижнів (1).

$$P = 2N_1 \frac{1}{\cos\alpha_{1l}} - 2T_H tg\alpha_{1l};\ M_1 = \frac{P}{2} a_0 - a_0 \frac{T_H}{tg\alpha_{1l}}. \tag{4}$$

Об'єднання рівнянь (4) приводить до критерію деформування двострижневої конструкції з пружним гребеневим вузлом.

$$P = \frac{2}{1 + (tg\alpha_{1l})^2} \left[\frac{N_1}{\cos\alpha_{1l}} + \frac{M_1 (tg\alpha_{1l})^2}{a_0} \right]. \tag{5.a}$$

Останнє рівняння залежності зовнішнього навантаження від деформованого стану має вид з урахуванням відношення (1, 2) для поздовжнього зусилля:

$$P = \frac{2}{1 + (tg\alpha_{1l})^2} \left[EA_{cal} \left(\frac{1}{\cos\alpha_{1l}} - \frac{\sin\alpha_{0l}}{\cos\alpha_{1l} \sin\alpha_{1l}} \right) + \frac{M_1 (tg\alpha_{1l})^2}{a_0} \right]. \tag{5.b}$$

$$P = 2 \left[EA_{cal} \left(\frac{(\cos\alpha_{1l})^2}{\cos\alpha_{1l}} - \frac{(\cos\alpha_{1l})^2 \sin\alpha_{0l}}{\cos\alpha_{1l} \sin\alpha_{1l}} \right) + (\cos\alpha_{1l})^2 \frac{M_1 (tg\alpha_{1l})^2}{a_0} \right]. \tag{5.c}$$

Подальші перетворення приводять до оригінального рівняння:

$$\frac{P}{EA_{cal}} = 2 \left(cos\alpha_{1l} - \frac{cos\alpha_{1l} \sin\alpha_{0l}}{\sin\alpha_{1l}} \right) + 2 \frac{(\sin\alpha_{1l})^2 M_1}{a_0 EA_{cal}}. \tag{5.d}$$

Використання відношень тригонометричних функцій (1) приводить до нелінійного рівняння залежності навантаження від геометричних параметрів конструкції в деформованому стані.

$$\frac{\cos\alpha_{1l}}{\sin\alpha_{1l}} = 1/tg\alpha_{1l} = 1/tg\alpha_{0l} - \upsilon_p / a_0.$$

$$\frac{P}{EA_{cal}} = 2\left(1-\frac{\upsilon_p}{a_0}tg\alpha_{01}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\left(tg\alpha_{0l}\right)^2+\left(1-\frac{\upsilon_p}{a_0}tg\alpha_{01}\right)^2}}-\cos\alpha_{0l}\right)+ \tag{5.f}$$

$$+2\frac{M_1\left(tg\alpha_{0l}\right)^2}{a_0 EA_{cal}\left(\left(tg\alpha_{0l}\right)^2+\left(1-\frac{\upsilon_p}{a_0}tg\alpha_{01}\right)^2\right)}.$$

Остаточно бачимо, що показник навантаження нелінійно пов'язаний з переміщеннями через початкові геометричні параметри конструкції та залежить від показників жорсткості гребеневого вузла за відношенням (3.c).

$$\frac{P}{EA_{cal}} = 2\left(1-\frac{\upsilon_p}{a_0}tg\alpha_{01}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{\left(tg\alpha_{01}\right)^2+\left(1-\frac{\upsilon_p}{a_0}tg\alpha_{01}\right)^2}}-\cos\alpha_{0l}\right]+ \tag{6}$$

$$+\frac{\left(tg\alpha_{01}\right)^2}{\left[\left(tg\alpha_{01}\right)^2+\left(1-\frac{\upsilon_p}{a_0}tg\alpha_{01}\right)^2\right]}\left(\frac{h_{wM}}{a_0}\right)^2\frac{A_{fcal}}{A_{cal}}\left(\alpha_{0l}-\alpha_{1l}\right)\sin\alpha_{0l}.$$

У випадку, коли параметр жорсткості вузла малий, $k_{EM}\rightarrow 0$ ($A_{cal}=0$) і розвиток пластичних деформацій у вузлі миттєво приводить до утворення шарніру пластичності, тоді рівняння (6) переходить до відомого рівняння

(7) з визначення критичної сили (показника критичної сили $\left(\frac{P}{EA_{cal}}\right)$ двострижневої системи з трьома шарнірами [2, 5]:

$$\frac{P}{EA_{cal}} = 2\left(1-\frac{\upsilon_p}{a_0}tg\alpha_{01}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\upsilon_p}{a_0}tg\alpha_{01}\right)^2+\left(tg\alpha_{01}\right)^2}}-\cos\alpha_{0l}\right]. \qquad (7)$$

Проведені числові дослідження стійкості двострижневих системи за критерієм (6, 7).

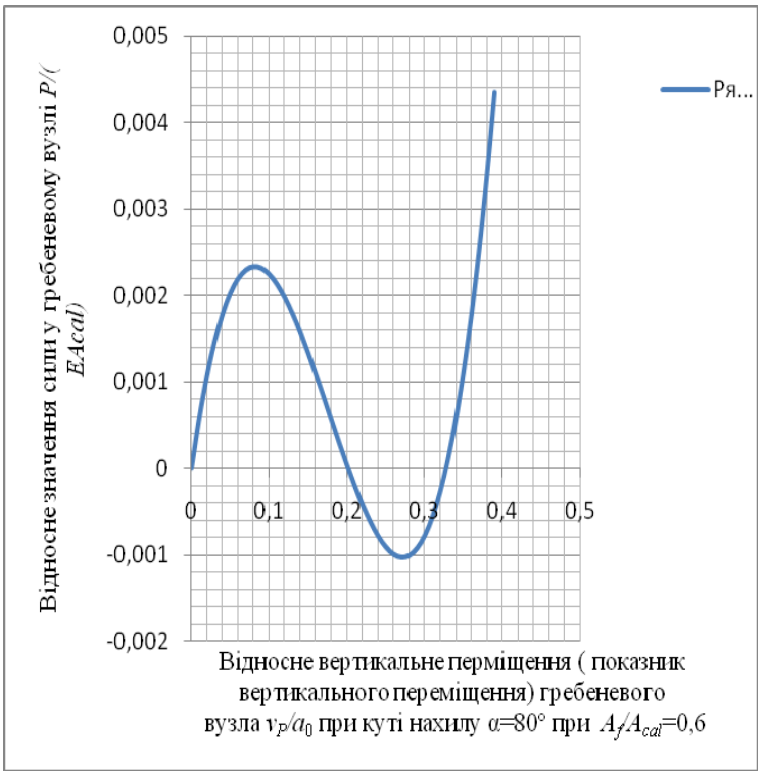

Рис. 1. Графік залежності показника значення сили за критерієм (6) від показника вертикальних переміщень при α_{0l} =80° та при відношення площі елементів, що сприймають згинальний момент до площі перерізу елемента $\frac{A_{fcal}}{A_{cal}} = 0,6$

Числові дослідження показника критичної сили за критеріями (6), (7) для двострижневої системи з пружно-жорстким вузлом показують збільшення критичної сили при підвищенні жорсткості вузла (рис. 1, 2), а також показують зміну параметрів нелінійності графіка закономірності (наприклад, зсув нульових точок перетину осі абсцис).

Рис. 2. Графік залежності показника значення сили від показника вертикальних переміщень при α_{0l} =80° та при нульовий жорсткості гребеневого вузла за критерієм (7)

Висновки

Отримані результати є важливими. Доведені закономірності 5, 6 вказують на нелінійний характер залежності між навантаженнями і переміщеннями.

Відкрито взаємодію між вертикальними переміщеннями гребеневого вузла і згинальним моментом, який виникає у гребеневому вузлі (3).

Змодельовані конструкційні параметри пружно-жорсткого вузла (3) і відкрита можливість оцінки впливу фізико-механічних властивостей конструктивних характеристик вузла на загальну вузлову стійкість.

Література

[1] Mises R. Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie / Mises R. // Z. Angew. Math. Mech (Selecta, 1, Providence). − 1963. − № 3 (1923). − P. 406−422; 217−244.

[2] Пановко. Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я. Г Пановко, И. И. Губанов. – М. : Наука, 1987. – 352 с.

[3] Бондарь Н. Г. Устойчивость и колебания упругих систем в современной технике / Н. Г. Бондарь. – Киев : Вища школа, 1987. – 210 с.

[4] Greco M. Analytical solutions for geometrically nonlinear trusses / Marcelo Greco, Carlos Eduardo Rodrigues // Esc. Minas (Ouro Preto). − Apr. − June 2009. − Vol. 62. No.2. − P. 205−214.

[5] Турищев, Л. С. О линеаризации задач устойчивости стержневых конструкций / Л. С. Турищев // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С : Фундаментальные науки. – 2006. – № 4. – С. 100–105.

[6] Турищев, Л. С. Нелинейный анализ и исследование устойчивости плоской двухстержневой системы с жесткой вставкой в узле / Л. С. Турищев // Исследование теории сооружений. – М. : Стройиздат, 1972. –Вып. 19. – С. 95–103.

[7] Исакова В. В. Нелинейный изгиб двухзвеньевой фермы при поперечной нагрузке / В. В. Исакова, Ю. В. Захаров // Тезисы докладов науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых-физиков «Физика и Эйнштейн» (НКСФ-2005). – Красноярск : КрасГУ, 2005. – С. 109.

[8] Білик С. І. Вплив на стійкість ферми Мізеса напрямку дії вузлового навантаження при пружних опорах на прикладі сталевого ребристо-кільцевого купола / С. І.Білик, В. Г. Тонкачеєв // Строительство, материаловедение, машиностроение : сб. науч. трудов. Вып. 82. – Дн-вск : ГВУЗ ПГАСА, 2015. – С. 44–49.

[9] Huang N. C. Dynamic snap-through of an elastic imperfect simple shallow truss / N. C. Huang, B. Vanid // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (Zam. May 1968)/ – Volume 19, Issue 3. – P. 501–509.

[10] Nachbar W. Dynamic snap – through of a simple viscoelastic truss / W. Nachbar, N. C. Huang // Q. Appl. Math (1967). – Volume 19(25). – P. 65–82.

[11] Avramov K. V. Forced oscillations of a system, containing a snap-through truss, close to its equilibrium position / K. V. Avramov YU. V. Mikhlin // Nonlinear dynamics. – 2004. – № 35. – P. 361–379.

[12] Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1967. – 376 с.

Надійшла до редколегії 4.11.2015 р.