

УДК 624.016

## **Расчет напряжений при изгибе круглых сталебетонных тонких плит**

**Шевченко А.А., к.т.н.**

Украинский государственный университет железнодорожного транспорта,  
Украина

**Анотація.** У статті отримано основні формули для розрахунку круглих сталебетонних тонких плит в пружній стадії. Тонка плита являє собою двохшарову композитну пластинку з заданими фізико-механічними характеристиками для кожного шару.

**Аннотация.** В статье получены основные формулы для расчёта круглых сталебетонных тонких плит в упругой стадии. Тонкая плита представляет собой двухслойную композитную пластинку с заданными физико-механическими характеристиками для каждого слоя.

**Abstract.** In the article basic formula were taken for calculation of circular steel-concrete thin plates in elastic stage. A thin plate is a two-layer composite plate with specified physical and mechanical characteristics for each layer.

**Ключевые слова:** круглая плита, композитная пластина, изгибающий момент.

**Введение.** Одним из перспективных направлений в области совершенствования строительных конструкций является применение внешнего листового армирования, которое выполняет одновременно силовые, защитные, изоляционные и технологические функции. К числу таких конструкций относятся и конструкции с внешним армированием. Применение внешнего армирования предполагает надежное объединение стального листа с бетоном. Такая конструкция перекрытия позволяет значительно снизить трудозатраты, сократить сроки возведения, уменьшить собственный вес перекрытия на 30 % по сравнению с обычными железобетонными. Снижение собственного веса перекрытий дает возможность сократить расход материалов на каркас и фундаменты здания, повысить сейсмостойкость и получить значительный экономический эффект при строительстве высотных зданий.

**Постановка цели и задач исследований.** Рассмотрена круглая сталебетонная пластинка, состоящая из бетона и стального листа, жестко объединенных между собой и работающих как единое целое. В данной статье получены основные зависимости для расчета круглых плит в полярной системе координат для определения положения нейтральной поверхности, вычисления цилиндрической жесткости, расчета внутренних усилий, нормальных и касательных напряжений, а так же решения уравнения изогнутой поверхности пластинки.

**Методика досліджень.** В роботі [1] отримано рівняння ізогнутої поверхні композитної сталобетонної пластинки в декартовій системі координат. Для круглих пластинок зручніше розв'язувати задачу в полярній системі координат. В цьому випадку прогиб пластинки і навантаження є функціями змінних  $r$  і  $\theta$ , тобто  $w = w(r, \theta)$  і  $q = q(r, \theta)$ . Всі основні рівняння вигину пластинки перетворюються до полярних координат за формулами (рис. 1):

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta \quad (a)$$

или 
$$\theta = \arctg \frac{y}{x}. \quad (б)$$

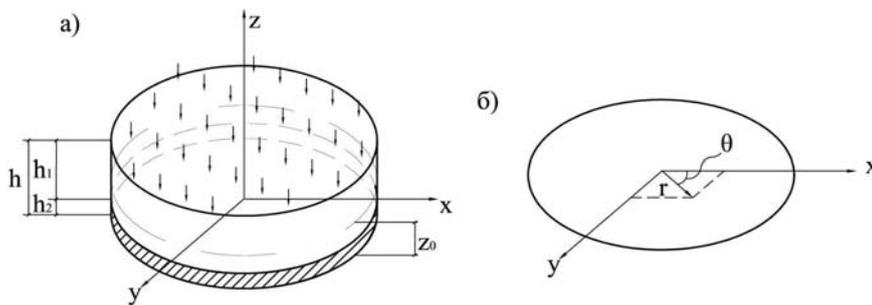


Рис. 1. Сталобетонна плита (а) і нейтральна площина (б)

Из (а) и (б) уклон ізогнутої поверхні пластинки в напрямленні  $x$  буде:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}. \quad (1)$$

Аналогічно в напрямленні  $y$ :

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}. \quad (2)$$

При такому перетворенні координат, складаючи по членно, отримуємо:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (3)$$

Після двукратного повторення цієї операції диференціальне рівняння ізогнутої поверхні пластинки:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q}{D_{mk}}, \quad (4)$$

где  $D_{mk} = D_{1,mi} + D_{2,mi}$  – цилиндрическая жесткость.

Обозначим с нормальми  $r$  и  $\theta$  изгибающие моменты соответственно через  $M_r$  и  $M_\theta$ , а крутящий момент через  $M_{r\theta}$ . Эти моменты, как обычно, отнесены к единице длины.

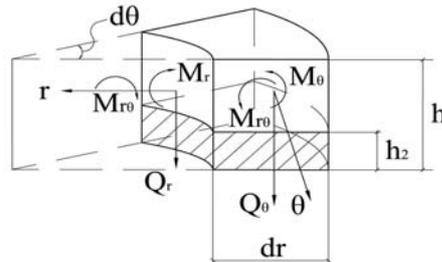


Рис. 2. Внутренние усилия в сечениях элемента

Если предположить, что ось  $ox$  совпадает с полярным радиусом  $r$ , то есть  $\theta = 0$ , тогда для этих моментов выражения значительно упрощаются:

$$M_r = - \left[ D_{mk} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (v_1 D_{1,mi} + v_2 D_{2,mi}) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \quad (5)$$

$$M_\theta = - \left[ D_{mk} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + (v_1 D_{1,mi} + v_2 D_{2,mi}) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right], \quad (6)$$

$$M_{r\theta} = - \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) ((1-v_1) D_{1,mi} + (1-v_2) D_{2,mi}) \right]. \quad (7)$$

Поперечные силы обозначим следующим образом:  $Q_r$  – поперечная сила на площадке с нормалью  $r$  (радиальная поперечная сила);  $Q_\theta$  – то же, на площадке, совпадающей с радиусом-вектором  $r$  (тангенциальная поперечная сила). Заменяя в (1) производные, получим поперечные силы в полярной системе координат при совпадении оси  $ox$  с полярным радиусом:

$$Q_r = -(D_{1Q} + D_{2Q}) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \quad (8)$$

$$Q_\theta = -(D_{1Q} + D_{2Q}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \quad (9)$$

где

$$D_{1Q} = \frac{E_1}{6(1-\nu_1^2)} \left[ 2(h-z_0)^3 + 3(h-z_0)^2(z_0-h_2) - (z_0-h_2)^3 \right],$$

$$D_{2Q} = \frac{E_2}{6(1-\nu_2^2)} \left[ 2z_0^3 - 3z_0^2(z_0-h_2) + (z_0-h_2)^3 \right].$$

Напряжения обозначим следующим образом:  $\sigma_r$  – нормальное напряжение на площадке с нормалью  $r$  (радиальное напряжение);  $\sigma_\theta$  – то же, на площадке, совпадающей с радиусом-вектором  $r$  (тангенциальное напряжение);  $\tau_{rz}$  – касательные напряжения на площадке с нормалью  $r$ . Заменяя в (1) производные, получим нормальные и касательные напряжения в полярной системе координат с полярным радиусом для бетона и стали:

$$\sigma_{r1} = -\frac{E_1 z}{1-\nu_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_1 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right), \quad (10)$$

$$\sigma_{r2} = -\frac{E_2 z}{1-\nu_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right), \quad (11)$$

$$\sigma_{\theta 1} = -\frac{E_1 z}{1-\nu_1^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \quad (12)$$

$$\sigma_{\theta 2} = -\frac{E_2 z}{1-\nu_2^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \quad (13)$$

$$\tau_{r\theta 1} = -\frac{E_1 z}{(1+\nu_1)} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad (14)$$

$$\tau_{r\theta 2} = -\frac{E_2 z}{(1 + \nu_2)} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad (15)$$

$$\tau_{r1z1} = \frac{E_1 [(h - z_0)^2 - z^2]}{2(1 - \nu_1^2)} \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \quad (16)$$

$$\tau_{r2z2} = \frac{E_1 [z_0^2 - z^2]}{2(1 - \nu_2^2)} \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \quad (17)$$

Задача об изгибе круглой пластинки будет осесимметричной [2], если нагрузка на пластинку, а так же условия закрепления ее краев не зависят от полярного угла  $\theta$ . В этом случае прогибы пластинки так же не зависят от полярного угла  $\theta$ , а являются функцией лишь координаты  $r$ , то есть  $w = w(r)$  [3]. Тогда уравнение изгиба пластинки (4) значительно упрощается:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q}{D_{mk}}; \quad (18)$$

или в развернутом виде:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q}{D_{mk}}. \quad (19)$$

Выражения для вычисления положения нейтральной поверхности будет:

$$z_0 = \frac{h^2 - \left( 1 - \frac{D_{2w}}{D_{1w}} \right) h_2^2}{2 \left[ h - \left( 1 - \frac{D_{2w}}{D_{1w}} \right) h_2 \right]},$$

где

$$D_{1w} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu_1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad (20)$$

$$D_{2w} = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu_2}{r} \frac{dw}{dr} \right). \quad (21)$$

Формулы изгибающих моментов имеют вид:

$$M_r = -D_{mk} \frac{d^2 w}{dr^2} - (D_{1,mi} \nu_1 + D_{2,mi} \nu_2) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}, \quad (22)$$

$$M_\theta = -D_{mk} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - (D_{1,mi} \nu_1 + D_{2,mi} \nu_2) \frac{d^2 w}{dr^2}. \quad (23)$$

Крутящий момент обращается (7) в нуль.

Упрощается и выражение поперечной силы (8):

$$Q_r = -(D_{1Q} + D_{2Q}) \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad (24)$$

а поперечная сила  $Q_\theta$  отсутствует.

Формулы нормальных и касательных напряжений будут иметь вид:

$$\sigma_{r1} = -\frac{E_1 z}{1 - \nu_1^2} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \nu_1 \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad (25)$$

$$\sigma_{r2} = -\frac{E_2 z}{1 - \nu_2^2} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \nu_2 \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad (26)$$

$$\sigma_{\theta 1} = -\frac{E_1 z}{1 - \nu_1^2} \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu_1 \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \quad (27)$$

$$\sigma_{\theta 2} = -\frac{E_2 z}{1 - \nu_2^2} \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu_2 \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \quad (28)$$

$$\tau_{r1z1} = \frac{E_1 [(h - z_0)^2 - z^2]}{2(1 - \nu_1^2)} \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad (29)$$

$$\tau_{r2z2} = \frac{E_1 [z_0^2 - z^2]}{2(1 - \nu_2^2)} \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right). \quad (30)$$

Уравнение (18) можно решить в общем виде. Как известно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения  $w_1$  и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения, то есть  $w = w_1 + w_2$ .

Однородное уравнение (18) после раскрытия будет:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = 0, \quad (31)$$

а его решение имеет вид:

$$w_1 = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r. \quad (32)$$

Чтобы получить частное решение  $w_2$ , уравнение (18) можно записать в следующем образом:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D_{mk}} \quad (33)$$

Интегрируя это уравнение последовательно четыре раза, найдем общий вид частного решения:

$$w_2 = \frac{1}{D_{mk}} \int_0^r \frac{1}{r} \left\{ \int_0^r r \left[ \int_0^r \frac{1}{r} \left( \int_0^r q(r) r dr \right) dr \right] dr \right\} dr. \quad (34)$$

Если нагрузка равномерно распределенная по всей поверхности пластинки, то есть  $q(r) = q = \text{const}$ , интегрирование (34) приводит к следующему результату:

$$w_2 = \frac{qr^4}{64D_{mk}}. \quad (57)$$

Рассмотрим пример круглой сталебетонной шарнирно опертой по контуру пластинки  $d = 1$  м, толщиной  $h = 5$  см, где размер бетонной части  $h_1 = 4,8$  см, стального листа  $h_2 = 0,2$  см, нагружена распределенной нагрузкой  $q = 20$  кН/м<sup>2</sup>. Бетон класса В30 с значением модуля упругости  $E_1 = E_b = 32500$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu_1 = \nu_b = 0,18$ . Стальной лист марки Ст-3 – модуль упругости  $E_2 = E_{st} = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu_2 = \nu_{st} = 0,30$  [4].

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения при равномерно-распределенной нагрузке (19) будет:

$$w = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D_{mk}}. \quad (58)$$

Для определения постоянных интегрирования имеем следующие граничные условия. В центре пластинки (при  $r = 0$ ) прогиб должен иметь конечное значение. Так как  $\ln 0 = -\infty$ , то в решении следует отбросить члены, содержащий множитель  $\ln r$ , то есть принять  $C_2 = C_4 = 0$ , тогда:

$$w = C_1 + C_3 r^2 + \frac{qr^4}{64D_{mk}}. \quad (59)$$

Имеем два условия на контуре пластинки, где должны обращаться в нуль прогиб  $w$  и радиальный изгибающий момент  $M_r$  [5]. Таким образом, при  $r = R$ :

$$w = 0 \text{ и } D_{1mu} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \nu_1 \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + D_{2mu} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \nu_2 \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0. \quad (60)$$

Подставляя в условия (60) функцию прогибов (59), получим:

$$w = \frac{qR^4}{64D_{mk}} \cdot \left[ 2 \frac{3D_{mk} + D_{1mu}\nu_1 + D_{2mu}\nu_2}{D_{mk} + D_{1mu}\nu_1 + D_{2mu}\nu_2} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - \left( 1 - \frac{r^4}{R^4} \right) \right].$$

Используя полученную функцию прогиба для данного случая опирания и загрузки пластинки вычисляем координаты (табл. 1) и построим соответствующие эпюры  $w$ ,  $M_r$ ,  $M_\theta$  и  $Q_r$  (рис. 3) [6–7].

Таблица 1

Ординаты эпюр  $w$ ,  $M_r$ ,  $M_\theta$ ,  $Q_r$

$r$ (м)	$z_0$ , (мм)	$D_{1mu}$ , (кНм)	$D_{2mu}$ , (кНм)	$D_{mk}$ , (кНм)	$w$ , (м)	$M_r$ , (кНм)	$M_\theta$ , (кНм)	$Q_r$ , (кН)
0	20,225	363,312	162,614	525,926	0,00015919	1,0053	1,0053	1,7012
0,1	20,214	363,516	162,429	525,945	0,00015139	0,9651	0,9847	1,6510
0,2	20,175	364,249	161,768	526,018	0,00012872	0,8444	0,9227	1,5005
0,3	20,077	366,109	160,117	526,226	0,00009331	0,6433	0,8196	1,2506
0,4	19,754	372,451	154,742	527,193	0,00004870	0,3617	0,6756	0,9061

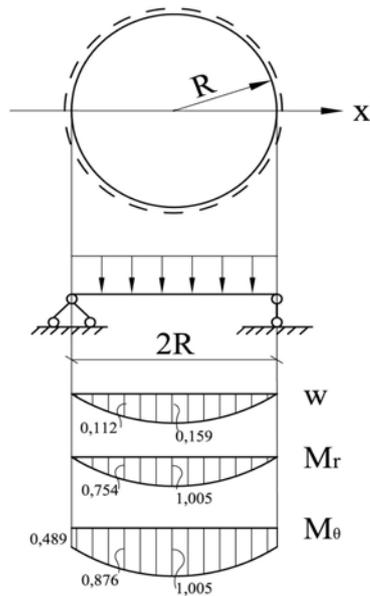


Рис. 3. Построение эюр  $w$ ,  $M_r$ ,  $M_\theta$

### Выводы

На основании полученных расчетных формул можно рассчитать круглую сталебетонную пластинку, состоящую из двух материалов с разными физико-механическими свойствами, которые жестко объединены друг с другом и работают как единое целое.

### Литература

- [1] Китов Ю. П. Расчет тонких сталебетонных плит при малых уровнях напряженного состояния : сб. научн. трудов / Ю. П. Китов, А. А. Шевченко, А. А. Петрушевская. – Харьков : УкрГАЗТ, 2011. – Вып. 122. – С. 293–298.
- [2] Амен-Заде Ю. А. Теория упругости / Ю. А. Амен-Заде. – М. : Высшая школа, 1971. – 288 с.
- [3] Чихладзе Э. Д. Основы линейной теории упругости, пластичности и ползучести : учебное пособие / [Э. Д. Чихладзе, М. А. Веревичева, Е. И. Галагуря, М. А. Ковалёв, Л. Б. Кравцов, Е. В. Опанасенко, А. Н. Петров]. – Харьков : УкрГАЗТ, 2010. – 149 с.
- [4] Шевченко А. А. Напряженно-деформированное состояние сталебетонных круглых плит : дис. ... канд. техн. наук : спец. 05.23.01 / А. А. Шевченко. – Харьков, 2012. – 167 с.

- [5] Ватуля Г. Л. Экспериментальная оценка напряженно-деформированного и предельного состояния сталебетонных круглых плит / Г. Л. Ватуля, А. А. Шевченко, Д. В. Головки // Сб. науч. трудов УкрГАЖТ – Харьков, 2012. – Вип. 129. – С. 145–149.
- [6] Ватуля Г. Л. Исследование работы сталебетонной круглой плиты при силовом воздействии / Г. Л. Ватуля, А. А. Шевченко Н. В. Смолянюк // Материалы научно-практической конференции «Модернизация и научные исследования в транспортном комплексе» – Пермь, 2012. – Т. 4. – С. 59–66.
- [7] Ватуля Г. Л. Предельное состояние сталебетонных круглых плит по нормальному сечению / Г. Л. Ватуля, А. А. Шевченко // Будівельні конструкції : Міжвідомчий науково-технічний збірник. – Київ : ДП НДІБК, 2013. – Вип. 78. Книга 1. – С. 137–143.

*Надійшла до редколегії 29.09.2015 р.*