

УДК 624.072.323.2

Узагальнений підхід до перевірки міцності та стійкості круглих сталевих двошарнірних арок

Білик С.І., д.т.н, Шпинда В.З.

Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна

Анотація. У статті проведено порівняння методів розрахунку стійкості аркових металевих конструкцій. Розроблено підхід для перевірки стійкості двошарнірних круглих арок за деформованою схемою з урахуванням кривизни арки, геометричних характеристик перерізу та розрахункових зусиль.

Аннотация. В статье проведено сравнение методов расчета устойчивости арочных металлических конструкций. Разработан подход для проверки устойчивости двухшарнирных круглых арок по деформированной схеме с учетом кривизны арки, геометрических характеристик сечения и расчетных усилий.

Abstract. In the article the methods are compared for calculation of buckling resistance of arched steel structures. Approach to buckling resistance for two-hinged round arches on the deformed scheme has been developed. Presented methodology takes into account the arch curvature, geometric characteristics of the cross-section and calculated effort.

Ключові слова: аркові конструкції, втрата стійкості, нелінійний розрахунок.

Постановка проблеми. Питання забезпечення стійкості аркових конструкцій завжди було актуальною проблемою в проектуванні металевих конструкцій. Аркові та рамні конструкції, описані навколо функціонального дійної методології перевірки стійкості аркових сталевих конструкцій є актуальною задачею об'єму будівлі, є достатньо раціональними конструкційними формами [25], тому розроблення на з огляду на важливість практичного використання при проектуванні і будівництві конструкцій покриттів та мостів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Перші роботи, присвячені втраті стійкості арок, належать Тимошенку С. П., Гере Дж. М. [1]. За цими дослідженнями при рівномірно-розподіленому навантаженні критичне значення такого навантаження для двошарнірної арки слід визначати за формулою (2θ – центральний кут арки) при кососиметричній формі втрати стійкості:

$$q_{cr} = \frac{EI_y}{R_{arc}^3} \left(\frac{\pi^2}{\theta^2} - 1 \right).$$

Академіком Карнауховим Н. В. [2] запропонована більш універсальна формула розрахунку арок при несиметричній формі втрати стійкості:

$$q_{cr} = \eta^2 \frac{EI_y}{R_{arc}^3}.$$

В алгебраїчному виразі коефіцієнт η визначається з трансцендентного рівняння стійкості арок.

Академік Динник О. Д. [3] запропонував методику визначення стійкості арок через визначення коефіцієнтів розрахункової довжини. Динником О. Д. також були проведені перші дослідження з визначення стійкості арок змінного перерізу. Стійкість арок змінного перерізу досліджена в роботі [3].

Перші дослідження нелінійної стійкості арок за деформованою схемою проведені Григолюком Е. І. [4]. Проблеми нелінійного розрахунку пологих арок висвітлені в монографії Григолюка Е. І. [5]. Вплив схеми рівномірного навантаження на стійкість арок досліджувалася в роботах [21] та [22]. В роботах [15] та [19] за енергетичним методом отримані диференціальні рівняння стійкості пружних арок при дії зосередженої сили, отримані головні рішення диференціального рівняння та аналітичні вирази для визначення критичного навантаження.

Дослідження з визначення критичних навантажень з урахуванням геометрично-нелінійної поведінки арок під навантаженням приведені в роботах Schreyer H.L, Masur E.F [6]. В цих працях приведені графіки залежності переміщень від навантажень. В роботі Pi Y.L. та ін. [7] наведені уточнені рішення нелінійних задач стійкості двошарнірних арок при симетричній і кососиметричній формі втрати стійкості. Також приведено рішення задач втрати стійкості безшарнірних арок з різними поперечними перерізами.

Пост-критична поведінка пружних арок досліджена у статтях Pi Y.L, Trahair N.S. [11, 12]. Методом скінченних елементів з урахуванням розвитку непружних деформацій досліджена міцність двотаврових арок у площині та із площини згину конструкцій з урахуванням нелінійних переміщень під навантаженням. Проаналізовано також вплив початкових недосконалостей викривлення арок, залишкові напруження, вплив комбінації різних навантажень на розвиток непружних деформацій. Також показано, що правила перевірки стійкості при поздовжньому згині стоек і колон за нормами проектування Австралії не можуть бути застосовані для перевірки стійкості аркових конструкцій при різних рівномірних і нерівномірних навантаженнях. У цих роботах запропонована методика перевірки стійкості арок за правилами через визначення коефіцієнта розрахункової довжини та гнучкість пів-арки.

Дослідження Kuranishi S, Yabuki T. [14] стійкості параболічних арок привели до врахування розрахункової поздовжньої сили та відповідного згинального моменту, була запропонована методика, за якою враховувалось збільшення згинального моменту внаслідок впливу втрати стійкості арки за формулою:

$$N/N_u + M_y / [(1 - N/N_{cr}) M_{el}] \leq 1,$$

де N – розрахункове значення поздовжньої сили; N_u – максимальна несуча спроможність перерізу при сприйнятті поздовжньої стискаючої сили з урахуванням пластичних деформацій; M_y – розрахунковий згинальний момент без урахування впливу збільшення згинального моменту внаслідок дії поздовжньої сили при втраті стійкості; N_{cr} – критичне значення поздовжньої сили за методикою Ейлера; M_{el} – максимальна несуча спроможність перерізу арки при пружній роботі матеріалу.

У дослідженнях Verstacken I. [15] теж запропонована перевірка стійкості арок через методологію перевірки стійкості стояків, на які діють поздовжні сили і згинальні моменти.

За ДБН В.2.6.26-2010 прийнято пружні розрахунки міцності позацентрово-стиснутих елементів для перерізів 1-го класу при згині в одній головній площині виконувати за формулами:

$$\frac{N_{Ed}}{A} + \frac{M_{yED}}{W_y} \leq f_y \frac{m}{\gamma_r}; \quad M_{yED} = \frac{M_{yEd}}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{El}}}; \quad N_{El} = \frac{\pi^2 EI_y}{(\mu_y l_0)^2}.$$

N_{El} – критична сила за постановкою Ейлера.

У Європейських нормах проектування конструкцій [17–20] сформульовано принципи перевірки міцності позацентрово-стиснутих елементів за деформованою схемою:

$$\frac{N_{sd}}{N_{plRd}} + \frac{1}{1 - N_{sd}/N_{cr}} \frac{N_{sd} e_{0d}}{M_{elRd}} \leq 1,$$

де M_{elRd} – згинальний момент, який може сприйняти переріз елемента із умов пружної роботи; N_{plRd} – опір перерізу з урахуванням пластичної роботи сталі; N_{sd} – розрахункова поздовжня сила; e_{0d} – розрахунковий ексцентриситет поздовжньої сили; N_{cr} – критична сила при втраті стійкості при пружній роботі металу, без урахування розвитку обмежених пластичних деформацій.

У дослідженнях Bradford M. A., Yongjun Xu проведено пошук критичного навантаження для арок при дії зосередженої сили [8, 9, 13]. Проведені глибокі дослідження стійкості арок при різній кривині та при нелінійній роботі, у тому числі, вивчена симетрична і несиметрична форма втрата стійкості, показано особливості деформування арок при великій кривизні (пологих арок). Нелінійний характер втрати стійкості арок типу ферм Мізеса досліджено у роботі автора [26].

Виклад основного матеріалу дослідження. Арки виконані з елементів замкнутого перерізу. Якщо аркова конструкція виконана з елементів із замкнутим перерізом, то перевірку її міцності за деформованою схемою слід розраховувати без урахування появи бімоментних напружень від стиснутого крутіння. Це складені перерізи квадратного і прямокутного перерізу або елементи з труб.

Розглянута задача появи пластичних деформацій в аркових елементах зі сталевих труб. Прийнята гіпотеза про крайову текучість: поява пластичних деформацій в крайніх фібрових волокнах призводить до розвитку пластичних деформацій по перерізу, утворенню шарніра пластичності та до геометрично-змінної конструкції. Розглянуті двошарнірні арки кривиною (r_0), які мають жорсткість перерізу (EI_y).

Прийняте загальне уявлення про втрату стійкості арки за кососиметричною формою або симетричною формою. Вважається що при пружній втраті стійкості йде зростання згинального моменту внаслідок зміни форми арки. Арка має початкові недосконалості геометричної форми, які збільшують згинальний момент в розрахунковому перерізі: M_{y0} . Розвиток пружно-пластичних деформацій враховують через теорію подвійного модуля. Прийнято також, що пружно-пластичні деформації починаються з напруження (σ_e), яке береться з діаграми розтягу сталі. Прийнято принцип суперпозиції напружень, загальні деформації що виникають при втраті стійкості стрижня, розділені на три складові: деформації від центрального стиску (ε_N), деформації початкових недосконалостей (ε_0), деформації від згинального моменту (ε_M) в деформованому стані при втраті стійкості.

Прийнята робоча гіпотеза, що при втраті стійкості арки в поперечному перерізі в крайніх фібрових волокнах стрижня виникають пластичні деформації. Внаслідок зростання поздовжнього згину при втраті стійкості деформації в крайніх фібрових волокнах можуть мати значення близькі до деформацій границі текучості сталі (ε_y) або можуть перевищувати їх:

$$\varepsilon_{pl} = n_{ply}\varepsilon_y; \varepsilon_y = f_y / E.$$

E – модуль деформації сталі.

Загальна жорсткість стрижня з урахуванням розвитку обмежених пластичних деформацій враховується через теорію приведенного модуля [23, 24]:

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_0 + \varepsilon_N + \varepsilon_M.$$

З розрахунку арок на стійкість відомо, що між згинальним моментом і зміною кривини арки має місце залежність:

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} = -\frac{M_y}{EI_y}.$$

З іншого боку, зміна кута повороту перерізу відображає деформації фібрових волокон елемента від згину:

$$d\Theta = \frac{\Delta s}{x} \rightarrow \frac{d\Theta}{ds} = \frac{d\varphi_1 - d\varphi}{ds} = \frac{\Delta s}{x ds} = -\frac{M_y}{EI_y} \rightarrow$$

$$\varepsilon_M = \frac{\Delta s}{ds} = -\frac{M_y}{EI_y} x. \quad \varepsilon_{Mh} = \frac{\Delta s}{ds} = -\frac{M_y}{2EI_y} h.$$

В останній формулі через x позначено поточну координату перерізу, а через h позначено висоту перерізу.

Для **круглих двохшарнірних арок** диференційне рівняння стійкості записується у формі лінійного диференціального рівняння 2-го порядку і має відповідне генеральне рішення (v_M – максимальне переміщення арки в розрахунковому перерізі):

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + v = -\frac{M_y r_0^2}{EI_y}.$$

Умовно слід прийняти, що переміщення і згинальний момент є такі функції, які залежать від координати перерізу арки та критичного навантаження:

$$v = D_1 v_{M0} \sin(k_{ar} \varphi); \quad k_{ar}^2 = \frac{\pi^2}{\alpha^2}; \quad M_y = N_{cal} v_{M0} \sin(k_{ar} \varphi);$$

$$-D_1 k_{ar}^2 v_{M0} \sin(k_{ar} \varphi) + D_1 v_{M0} \sin(k_{ar} \varphi) = -\frac{N_{cal} v_{M0} \sin(k_{ar} \varphi) r_0^2}{EI_y}.$$

З останнього рівняння визначається коефіцієнт D_1 .

$$D_1 = \frac{N_{cal} r_0^2}{EI_y (k_{ar}^2 - 1)}.$$

Переміщення арки набувають остаточного вигляду:

$$v = v_{M0} \frac{N_{cal} r_0^2}{EI_y (k_{ar}^2 - 1)} \sin(k_{ar} \varphi).$$

Значення згинального моменту в двохшарнірній арці в деформованому стані:

$$M_{yD} = N_{cal} v = N_{cal} v_{M0} \frac{N_{cal} r_0^2}{EI_y (k_{ar}^2 - 1)} = M_y \frac{N_{cal} r_0^2}{EI_y (k_{ar}^2 - 1)};$$

$$\frac{M_{yD}}{EI_y} = \frac{N_{cal} v_{M0}}{EI_y} \frac{N_{cal} r_0^2}{EI_y (k_{ar}^2 - 1)}.$$

Деформації від згину (ε_M) залежать від максимальних вигинів при втраті стійкості арки:

$$\varepsilon_{Mh} = -\frac{M_{yD}}{2EI_y} (-h); \quad \varepsilon_{Mh} = -\frac{M_{yD} A_{cal} N_{cal}}{2EI_y A_{cal} N_{cal}} (-h);$$

$$\frac{M_y A_{cal} h}{2I_y A_{cal}} = \frac{M_y A_{cal} N_{cal}}{W_y A_{cal} N_{cal}}; \quad m_y = \frac{M_y A_{cal}}{W_y N_{cal}}; \quad \frac{M_y A_{cal} h}{2EI_y A_{cal}} = m_y \frac{N_{cal}}{EA_{cal}}.$$

Остаточо маємо:

$$\varepsilon_{Mh} = \frac{M_{yD} h}{2EI_y} \frac{N_{cal} r_0^2}{EI_y (k_{ar}^2 - 1)} \rightarrow \varepsilon_{Mh} = m_y \frac{N_{cal}}{EA_{cal}} \frac{N_{cal} r_0^2}{EI_y (k_{ar}^2 - 1)}.$$

$$\varepsilon_{Mh} = m_y \left(\frac{N_{cal}}{EA_{cal}} \right)^2 \frac{A_{cal} N_{cal} r_0^2}{I_y (k_{ar}^2 - 1)} \rightarrow \varepsilon_{Mh} = m_y \left(\frac{N_{cal}}{EA_{cal}} \right)^2 \frac{r_0^2 / i_y^2}{(k_{ar}^2 - 1)}.$$

Деформації розрахункового перерізу арок від згинального моменту за деформованою схемою арки набувають остаточного вигляду:

$$\varepsilon_{Mh} = \left(\frac{N_{cal} r_0}{EA_{cal} i_y} \right)^2 \frac{m_y}{(k_{ar}^2 - 1)}; \quad \varepsilon_{Mh} = \frac{1}{(k_{ar}^2 - 1)} \frac{M_{yD}}{EW_y} \frac{N_{cal}}{EA_{cal}} \frac{A_{cal} r_0^2}{I_y}.$$

Загальні деформації при втраті стійкості арки:

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_0 + \varepsilon_N + \varepsilon_M; \quad \varepsilon_N = \frac{N_{cal}}{EA_{cal}};$$

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_0 + \frac{N_{cal}}{EA_{cal}} + \frac{1}{(k_{ar}^2 - 1)} \frac{M_{yD}}{EW_y} \frac{N_{cal}}{EA_{cal}} \frac{A_{cal} r_0^2}{I_y}.$$

Прийнявши умову крайової текучості: $f_y = E\varepsilon_{pl} = E\varepsilon_y$, отримаємо наступне рівняння:

$$f_y = E\varepsilon_y = E\varepsilon_0 + \frac{N_{cal}}{A_{cal}} + \frac{M_{ycal}}{W_y} \frac{N_{cal}}{EA_{cal}} \frac{r_0^2}{i_y^2} \frac{1}{(k_{ar}^2 - 1)};$$

$$f_y = E\varepsilon_y = \sigma_{cal} \left[1 + \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_{cal}} + \frac{M_{ycal}}{EW_y} \frac{r_0^2}{i_y^2} \frac{1}{(k_{ar}^2 - 1)} \right].$$

Введемо позначення коефіцієнта втрати стійкості арки:

$$\sigma_{cal} = \frac{N_{cal}}{A_{cal}}; \rightarrow \frac{\sigma_{cal}}{f_y} = \chi_{BS}.$$

З наведених рівнянь вираз для обчислення коефіцієнта втрати стійкості двохарнійної арки буде наступним:

$$\chi_{BS} = \frac{\sigma_{cal}}{f_y} = \frac{\sigma_{cal}}{\sigma_{cal} \left[1 + \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_{cal}} + \frac{M_{ycal}}{EW_y} \frac{r_0^2}{i_y^2} \frac{1}{(k_{ar}^2 - 1)} \right]}.$$

Остаточна формула для визначення коефіцієнта втрати стійкості арки за деформованою схемою буде:

$$\chi_{BS} = \frac{\sigma_{cal}}{f_y} = \frac{1}{\left[1 + \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_{cal}} + \frac{M_{ycal}}{EW_y} \frac{r_0^2}{i_y^2} \frac{1}{(k_{ar}^2 - 1)} \right]}.$$

Таким чином, для перевірки стійкості і міцності арки за деформованою схемою пропонується наступна формула:

$$\frac{N_{cal}}{A_{cal} \chi_{arc} f_y} \leq 1; \quad \chi_{arc} = \frac{1}{\left[1 + \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_{cal}} + \frac{M_{ycal}}{(k_{ar}^2 - 1)EW_y} \frac{r_0^2}{i_y^2} \right]}.$$

Висновки

Розроблено і науково обґрунтовано підхід для перевірки стійкості арок за деформованою схемою з урахуванням кривизни арки, геометричних характеристик перерізу та розрахункових зусиль. Запропонований методологічний підхід дає можливість оцінити забезпечення стійкості арок порівняно з іншими методологічними підходами, що підвищує загальну достовірність розрахунків. Розроблений підхід базується на загальних теоретичних засадах стійкості елементів, викладених у роботах [23, 24, 25].

Література

- [1] Timoshenko S. P. Theory of elastic stability : 2nd ed. / S. P. Timoshenko, J. M. Gere. – New York (NY) : McGraw-Hill Book Co., Inc., 1961. – 535 p.
- [2] Карнаухов Н. В. Прочность и устойчивость стержневых систем / Н. В. Карнаухов. – М. : Стройиздат, 1949. – С. 376.
- [3] Динник А. Н. Об устойчивости бесшарнирных круговых арок переменного сечения / А. Н. Динник // Вестник инж. и техн.– 1933. – № 12. – С. 553–554.
- [4] Григолюк Э. И. К расчету устойчивости пологих арок / Э. И. Григолюк // Инж. сборник. – 1951. – № 9 – С. 177–201.
- [5] Григолюк Э. И. Проблемы нелинейного деформирования: Методы приложения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела / Э. И. Григолюк, В. И. Шалашилин. – М. : Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1988. – 233 с.
- [6] Schreyer H. L. Buckling of shallow arches / H. L. Schreyer, E. F. Masur // Proceedings of the American Society of Civil Engineers. Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1996. – 92. (EM4).
- [7] Pi Y. L. In-plane buckling and design of steel arches / Y. L. Pi, N. S. Trahair // Journal of Structural Engineering. – 1999. – № 125(11).
- [8] Pi Y. L. In-plane stability of arches / Y. L. Pi, M. A. Bradford // International Journal of Solids and Structures. – 2002. – № 39. – P. 105–25.
- [9] Bradford, M. A. In-Plane Stability of Arches under a Central Concentrated Load [Electronic resource] / M. A. Bradford, B. Uy, Y. L. Pi // Journal of Engineering Mechanics. – 2002. – № 128. P. 10–20. – Permalink: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:7\(710\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:7(710)) – Screen Title.
- [10] Bradford M. A. In-plane stability of arches under a central concentrated load / M. A. Bradford, B. Uy, Y. L. Pi // School of Civil and Environmental Engineering, Univ. of New South Wales, Sydney, Australia. – UNICIV, 2000. – Rep. No. 396.
- [11] Pi Y. L. Nonlinear buckling and postbuckling of elastic arches / Y. L. Pi, N. S. Trahair // Engineering Structures. – 1998. – No. 20(7). – P. 571–579.

- [12] Pi Y. L. In-plane inelastic buckling and strengths of steel arches / Y. L. Pi, N. S. Trahair // ASCE. Journal of Structural Engineering. – 1996. – No. 122(7).
- [13] Yongjun Xu. In-Plane Elastic Stability of Arches under a Radial Concentrated Load / [Yongjun Xu, Xiaoming Gui, Bin Zhao, Ruiqi Zhou] // Engineering. – 2014 – No. 6. – P. 572–583.
- [14] Kuranishi S. Some numerical estimation of the ultimate inplane strength of two-hinged steel arches / S. Kuranishi, T. Yabuki // Proceedings of JSCE. – 1979. – No. 287. – P. 155–8.
- [15] Verstappen I. Design rules for steel arches – in-plane stability / [Verstappen I, Snijger H, Bijlaard F.S.K., Steenbergen H.M.G.M.] // Journal of Constructional Steel Research. – 1998. – No. 46 (1–3). – P. 125–6.
- [16] Єврокод 3. Проектування сталевих конструкцій. Частина 2. Сталеві мости (EN 1993-2:2006, IDT) ДСТУ-Н Б EN 1993-2:2012 : проект [Електронний ресурс] / Національний транспортний університет. – Електронні дані. – К. : «НОРМАТИВ™ PRO». – С. 91–100. – Режим доступу: <http://document.ua/evrokod-3.-proektuvannja-stalevih-konstrukcii.-chastina-2.-s-nor24612.html> – Назва з екрану.
- [17] Єврокод 3. Проектування сталевих конструкцій. Частина 1-1. Загальні правила і правила для споруд (EN 1993-1-1:2005, IDT) : ДСТУ-Н Б EN 1993-1-1:2010. – Офіц. вид. – К. : Мінрегіонбуд України, 2013. – С. 63–107. – (Система надійності та безпеки в будівництві. Національний стандарт України).
- [18] Boissonnade N. New interaction formulae for beam-columns in Eurocode 3: The French–Belgian approach / N. Boissonnade, J. P. Jaspart, J. P. Muzeau, M. Villette // Journal of Constructional Steel Research. – 2004. – No. 60. – P. 421–31.
- [19] Dimopoulos C. A. Desing of circular steel arches with hollow circular cross-sections according EC3 / C. A. Dimopoulos, C. J. Gantec // Journal of Constructional Steel Research. – 2008. – No. 10. – P. 10– 16.
- [20] Greiner R. Interaction formulae for member subjected to bending and axial compression in EUROCODE 3 – the Method 2 approach / R. Greiner, J. Lindner // Journal of Constructional Steel Research. – 2006. – No. 62. – P. 757–70.
- [21] Ефимов А. С. К расчету на устойчивость пологих арок / А. С. Ефимов // Итоговая научная конференция КГУ, секция механики (Казань). – Изд. Каз. ун-та, 1962.
- [22] Ефимов А. С. Устойчивость пологих арок различного очертания под действием различных нагрузок. Нелинейная теория пластин и оболочек / А. С. Ефимов. – Изд. Каз. ун-та, 1962.

- [23] Білик С. І. Теоретичне порівняння фактора стійкості і коефіцієнта поздовжнього згину центрально-стиснутих сталевих колон з урахуванням початкових деформацій та вигинів / С. І. Білик // Збірник наукових праць Українського інституту сталевих конструкцій ім. В. М. Шимановського. – К. : Вид-во «Сталь», 2015. – Вип. 15.– С. 48–61.
- [24] Білик С. І. Стійкість холодно гнутих швелерів з урахуванням пластичних властивостей маловуглецевих сталей / [С. І. Білик, А. С. Білик, М. В. Усенко, О. Є. Золотопольський] // Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В. М. Шимановського. – К. : Вид-во «Сталь», 2011. – Вип. 7. – С. 26–35.
- [25] Білик С. І. Раціональна форма геометричної схеми рамного каркасу з карнизними похилими елементами навколо функціонального об'єму / С. І. Білик // Прикладна геометрія та інженерна графіка : міжвід. наук. зб. ; МОН України, КНУБА. – К., 2004. – Вип. 74. – С. 228–235.
- [26] Білик С. І. Стійкість двострижневих ферм з урахуванням пружної жорсткості гребеневого вузла // Збірник наукових праць Українського інституту сталевих конструкцій ім. В. М. Шимановського – К. : Вид-во «Сталь», 2015. – Вип. 16. – С. 13–21.

Надійшла до редколегії 22.11.2016 р.