

УДК 624.014

Удосконалення методики розрахунку коливань сталевих башт при обпиранні на міжповерхові перекриття та пружну основу

Білик С.І., д.т.н, Бут М.О.

Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна

Анотація. Удосконалена методика визначення власних частот коливань призматичних пружних елементів при обпиранні на пружну основу. Викладено удосконалену методику визначення характеристики пружної основи при обпиранні на балки покриття і перекриття будівлі. Наведені приклади за числовими дослідженнями впливу пружної основи на параметр частоти власних коливань висотних споруд і конструкцій, розташованих на покриттях будівель.

Аннотация. Усовершенствована методика определения собственных частот колебаний призматических упругих элементов при расположении на упругом основании. Изложена усовершенствованная методика определения характеристики упругого основания при опирании на балки покрытия и перекрытия здания. Приведены примеры по числовым исследованиям влияния упругого основания на параметр частоты собственных колебаний высотных сооружений и конструкций, расположенных на покрытиях зданий.

Abstract. Method for determination of natural frequencies of prismatic elastic elements when placed on an elastic foundation is improved. Improved method of determining the elastic characteristics of the base when supported on the beam and floor coverings of the building is explained. Examples are presented concerning numerical studies of the effect of elastic foundations on the frequency of fluctuation of high-rise buildings and structures located on roofing of buildings.

Ключові слова: диманіка споруд, частота коливань, пружна основа.

Постановка проблеми. Актуальність роботи. Визначення взаємодії сталевих конструкції споруд і основи, на яку обпирається конструкція, актуальна і важлива науково-технічна проблема, оскільки пов'язана з багаточисельним використанням різних конструкцій башт, антен, технологічного обладнання під час обпирання на міжповерхове перекриття. Удосконалення методики розрахунку у сталевих конструкціях на пружній основі є також актуальною практичною задачею висотного металобудівництва.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Основи динаміки споруд, з урахуванням умов обпирання, викладені у книгах [1–6]. В монографії [1] наведено методика і розрахунок першої частоти власних коливань цегляної труби на пружній основі. В книгах [2, 5] приведені рішення задач коливань консольного стрижня на пружній основі при розташуванні на вільному кінці елемента зосередженої ваги та при нехтуванні власної ваги

елемента. В статті [7] наведено числові дослідження визначення першої частоти власних коливань сталевої антенної опори за допомогою програмного комплексу «SCAD-Office-11» на основі МСЕ. В дослідженнях [6] наведено послідовність визначення власних коливань балки при пружних опорах. Дослідженням коливань технологічного обладнання на пружному перекритті присвячена робота [8].

Загальний вид рівняння амплітудних коливань призматичної балки дано в роботі академіка С. П. Тимошенка [3, 6]:

$$X^{IV}(x) - k^4 X(x) = 0, \text{ де } k^4 = \frac{p^2}{EI_x / \rho A_F}. \quad (1)$$

При рівномірно розподіленому навантаженні власної ваги (ρA_F) на одиницю довжини та при згинальній жорсткості EI_x власні коливання пружної балки описують лінійним однорідним диференціальним рівнянням четвертого ступеня. Характеристичне рівняння диференціального рівняння (1) $n^4 - k^4 = 0$ приводить до коренів квадратного рівняння: $n^2 = \pm k^2$; $n_{1,2} = \pm \sqrt{k^2} = \pm k$; $n_{3,4} = \pm \sqrt{-k^2} \rightarrow n_{3,4} = \pm k\sqrt{-1}$. Прийняття комплексної змінної $i = \sqrt{-1}$ дає вирази чотирьох коренів характеристичного рівняння: $n_1 = +k$; $n_2 = -k$; $n_3 = ki$; $n_4 = -ki$. Рішення амплітудного рівняння коливань набуває вигляду в прийнятих позначеннях: $X = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} + C_3 e^{ikx} + C_4 e^{-ikx}$. При переході до тригонометричних і параболічних функцій [3, 6].

$$\begin{aligned} X &= C_1 [\cos(kx) + ch(kx)] + C_2 [\cos(kx) - ch(kx)] + \\ &+ C_3 [\sin(kx) + sh(kx)] + C_4 [\sin(kx) - sh(kx)]; \\ X' &= C_1 [-\sin(kx) + sh(kx)] + C_2 [-\sin(kx) - sh(kx)] + \\ &+ C_3 [\cos(kx) + ch(kx)] + C_4 [\cos(kx) - ch(kx)]; \\ X'' &= C_1 [-\cos(kx) + ch(kx)] + C_2 [-\cos(kx) - ch(kx)] + \\ &+ C_3 [-\sin(kx) + sh(kx)] + C_4 [-\sin(kx) - sh(kx)]; \\ X''' &= C_1 [\sin(kx) + sh(kx)] + C_2 [\sin(kx) - sh(kx)] + \\ &+ C_3 [-\cos(kx) + ch(kx)] + C_4 [-\cos(kx) - ch(kx)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Можливий запис останніх рівнянь через функції наведено в роботі [3].

Постановка задачі. Розробити методику визначення власних коливань пружно-защемленого елемента на базі аналітичних досліджень. Узагальнити методику розрахунку характеристики пружності основи при обпиранні на міжповерхове перекриття.

Виклад основного матеріалу досліджень

1. Розглянуто пружну консольно-защемлену балку з жорсткістю поперечного перерізу EI_x , балка пружно защемлена, яка при коливаннях має кут повороту защемленого перерізу β , а переміщення по напрямку пружної опори зведеної $\Delta = b\beta$, де b – половина ширини бази конструкції.

Пружність обпирання визначається: $M_{0k} = -k_b \Delta b = -k_b b^2 \beta$. Характеристикою пружності обпирання консольного елемента на балку є коефіцієнт (параметр) k_b . Граничні умови на кінцях консольної балки мають такий вигляд і дають відношення між невизначеними коефіцієнтами:

$$X_{x=0} = 0 \rightarrow 2C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0;$$

$$EI_x X''_{x=0} = M_{0k} \rightarrow C_2 = \frac{0,5k_1 b^2 \beta}{EI_x} \rightarrow 0,5\beta = \frac{EI_x}{k_1 b^2} C_2; \quad (3a)$$

$$X'_{x=0} = \beta \rightarrow C_3 = 0,5\beta \rightarrow C_3 = \frac{EI_x}{k_b b^2} C_2; \quad (3b)$$

$$EI_x X''_{x=l} = 0 \rightarrow C_2 [-\cos(kl) - ch(kl)] + C_3 [-\sin(kl) + sh(kl)] + C_4 [-\sin(kl) - sh(kl)] = 0; \quad (4a)$$

$$EI_x X'''_{x=l} = 0 \rightarrow C_2 [\sin(kl) - sh(kl)] + C_3 [-\cos(kx) + ch(kl)] + C_4 [-\cos(kl) - ch(kl)] = 0. \quad (4b)$$

Два останніх рівняння (4a, 4b) при заміні коефіцієнтів, які отримані з граничних умов пружного обпирання елемента при $x = 0$, дають однорідну систему двох трансцендентних рівнянь з постійними коефіцієнтами C_2 і C_4 :

$$\begin{cases} X''_{x=l} = 0 \rightarrow C_2 [-\cos(kl) - ch(kl) - \frac{EI_x}{k_1 b^2} \sin(kl) + \frac{EI_x}{k_1 b^2} sh(kl)] + \\ + C_4 [-\sin(kl) - sh(kl)] = 0; \\ X'''_{x=l} = 0 \rightarrow C_2 [\sin(kl) - sh(kl) - \frac{EI_x}{k_1 b^2} \cos(kx) + \frac{EI_x}{k_1 b^2} ch(kl)] + \\ + C_4 [-\cos(kl) - ch(kl)] = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Нетривіальне рішення системи (5) дає частотне рівняння при умові рівності нулю головного визначника системи.

$$1 + \cos(kl)ch(kl) + kl \frac{EI_x}{k_b b^2} [\sin(kl)\cos(kl) - sh(kl)ch(kl)] = 0. \quad (6)$$

При значній жорсткості опори $k_1 \rightarrow \infty$ частотне рівняння (6) переходить до частотного рівняння власних коливань жорстко консольно-защемленої балки [3, 5, 6]: $1 + \cos(kl)ch(kl) = 0$.

Частота коливань f_i визначається з умов:

$$p_i = k_i^2 \sqrt{\frac{EI_x}{m}} \rightarrow p_i = k_i^2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho A_F}} = k_i^2 l^2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho A_F l^4}}; \quad f_i = \frac{p_i}{2\pi}.$$

Останнє рівняння може бути переписано так:

$$p_i = k_i^2 l^2 \frac{i_x}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\psi_c \rho}}, \quad (7)$$

де ψ_c – конструкційний коефіцієнт вертикальної споруди, є відношення дійсної теоретичної ваги конструкції (за кресленнями КМ) до простої теоретичної.

Момент на опорі в защемленому кінці балки визначають через кут повороту перерізу і розміри бази обпирання: $M_{0k} = \beta b^2 k_b$. За законами будівельної механіки відомо, що при прикладанні до центру шарнірно обпертої балки одиничного зосередженого моменту кут повороту перерізу в центрі балки буде: $12EI_{xb}\beta = M_{0k}L$. Таким чином:

$$M_{0k}L = \beta b^2 k_b L = 12EI_{xb}\beta \rightarrow b^2 k_b = 12EI_{xb} / L; \\ \frac{EI_x}{k_b b^2} = \frac{EI_x}{12EI_{xb} b^2 / (L b^2)} \rightarrow \frac{EI_x}{k_b b^2} = \frac{I_x L}{12I_{xb}}. \quad (8)$$

Частотне рівняння (6) тепер має запис.

$$1 + \cos(kl)ch(kl) + kl \frac{I_x L}{12I_{xb} l} [\sin(kl)\cos(kl) - sh(kl)ch(kl)] = 0. \quad (9)$$

В таблиці 1 наведені результати числових досліджень впливу пружності основи на частоту власних коливань конструкцій, розташованих на конструкціях перекриття.

Таблиця 1

Залежність між коренями рівняння (9) і пружністю основи $\frac{EI_x}{k_b b^2} = \frac{I_x L}{12 I_{xb}}$

$\frac{EI_x}{k_1 b^2}$	kl	$\frac{EI_x}{k_1 b^2}$	kl	$\frac{EI_x}{k_1 b^2}$	kl
10	0,6199	0,75	1,1371	1,7905	0,02
8	0,655	0,5	1,2341	1,809	0,015
7	0,677	0,4	1,2881	1,8295	0,01
6	0,7027	0,3	1,3561	1,8515	0,005
5	0,7346	0,2	1,449	1,8625	0,0025
4	0,7753	0,1	1,5891	1,8705	0,001
3	0,8306	0,05	1,6981	1,8739	0,00025
2	0,9135	0,04	1,7252	1,8741	0,0002
1	1,0691	0,03	1,7559	1,8746	0,0001
				1,8751	0

2. При обпиранні на пружну основу розглянуто приклад консольної споруди висотою від 50–200 м. Кут повороту перерізу і пружність основи в цьому випадку слід визначати зі статичного розрахунку споруди:

$$k_b b^2 = \frac{M_{0k}}{\beta} ; \quad \frac{EI_x}{k_b b^2} = \beta \frac{EI_x}{M_{0k}}. \quad (10)$$

Проведені числові дослідження впливу пружності основи на частоту власних коливань висотних споруд, які наведені у таблиці 2.

Таблиця 2

Залежність між коренями рівняння (9) і пружністю основи $\frac{EI_x}{k_b b^2} = \beta \frac{EI_x}{M_{0k}}$

$\frac{EI_x}{k_1 b^2}$	kl	$\frac{EI_x}{k_1 b^2}$	kl	$\frac{EI_x}{k_1 b^2}$	kl
50	0,416	28	0,4805	15	0,5609
40	0,44	25	0,4942	12	0,5928
30	0,4723	20	0,5223	11	0,6056
35	0,4545	18	0,5361	10	0,6199

Від значень kl переходять до частоти та періоду власних коливань за відомими формулами.

Висновок

В роботі удосконалена фізико-математична модель коливань консольного елемента на пружній основі, отримано частотне рівняння коливань конструкції – (6, 7, 9) в залежності від конструкційних ознак пружної основи.

При розташуванні конструкцій на конструкції покриття уточнена методика визначення параметра пружної основи з урахуванням параметрів конструкції, що надбудовується.

Проведені числові дослідження впливу пружної основи на значення першої частоти власних коливань. Встановлено, що пружна основа зменшує значення першої частоти власних коливань (таблиці 1, 2).

Література

- [1] Безухов Н. И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах / Н. И. Безухов, О. В. Лужин. – М. : Госстройиздат, 1963 – 372 с.
- [2] Киселев В. А. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. Спецкурс / В. А. Киселев. – М. : Стройиздат, 1980. – 616 с.
- [3] Смирнов А. Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / [А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашенников, Н. Н. Шапошников]. – М. : Стройиздат, 1984 – 416 с.
- [4] Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический ; книга 2 / [Под ред. проф. Уманского А. А.] – М. : Изд. лит. по строительству, 1973. – 415 с.
- [5] Справочник по динамике сооружений / [Под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича] – М. : Стройиздат, 1972 – 711 с.
- [6] Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер, – М. : Машиностроение, 1985 – 476 с.
- [7] Альохін А. М. Числові дослідження поведінки антенних опор під дією ожеледно-вітрових навантажень / А. М. Альохін // Металеві конструкції : збірник наукових праць. – Донецьк : МОН України, Донбаська ДАБіА, 2008. – № 3, Том 14. – С. 189–199.
- [8] Бирбраер А. Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость / А. Н. Бирбраер. – СПб. : Наука, 1998. – 255 с.

Надійшла до редколегії 18.11.2016 р.