УДК 624.072

Числові розрахунки висоти пружного ядра для несиметричного пружно-пластичного двотавру

Перетятько Ю.Г., к.т.н., **Ляшенко І.Ю.,** к.т.н.

Харківський національний університет будівництва та архітектури, Україна

Анотація. Наведено числові розрахунки залежності висоти пружного ядра від значення згинального моменту для несиметричних пружно-пластичних двотаврів з урахуванням різних випадків поширення пластичних деформацій по висоті поперечних перерізів.

Аннотация. Приведены числовые расчеты зависимости высоты упругого ядра от значения изгибающего момента для несимметричных упругопластических двутавров с учетом различных случаев распространения пластических деформаций по высоте поперечного сечения.

Abstract. Numerical calculations are presented according to the height of the elastic core of the bending moment value for asymmetrical elastic-plastic I-beams taking into account different cases of distribution of plastic deformations along the height of the cross section.

Ключові слова: несиметричні двотаври, пружно-пластичні балки, згинальний момент, пружне ядро.

Стан проблеми. Маючи залежність висоти пружного ядра від значення згинального моменту, можна визначати ступінь поширення пластичних деформацій по поперечному перерізу, а також відповідні прогини згинальних елементів. У вітчизняних [1] (і не тільки) існуючих нормах з проектування сталевих конструкцій немає відповіді на ці питання. Не висвітлені вони і в сучасній навчальній літературі [2−5].

Мета роботи – в аналітичному вигляді дати теоретичну основу для відповіді на поставлені питання. Дана публікація є продовженням роботи [10].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Ключова залежність між прогином балки *w* та напіввисотою пружного ядра *c* її поперечного перерізу має вигляд [6−8]:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{\sigma_T}{E \cdot c}. \tag{1}$$

У свою чергу, розмір *c* залежить від величини згинального моменту *M* і при поперечному згині є функцією координати *x*, що змінюється по довжині балки:

$$c(x) = f\left[M(x)\right]. \tag{2}$$

Інтегрування (1) в аналітичному вигляді є можливим лише для обмеженої кількості задач [6, 7]. Чисельні крокові методи [7, 8] дозволяють інтегрувати рівняння (1) без будь-яких обмежень. Найбільш сучасними і універсальними, у тому числі, і для згаданих задач, є чисельні методи, що спираються на метод скінченних елементів (МСЕ) [9] і, на відміну від виразу (1), дозволяють ураховувати вплив дотичних напружень на значення прогинів пружно-пластичних балок при поперечному згині. У той же час слід зазначити, що цей вплив для значної кількості практичних задач є досить незначним, і вираз (1) для них залишається прийнятним.

Конкретні вирази функції (2) для прямокутних перерізів наведені, зокрема, в [6, 11−13], а для симетричних двотаврових перерізів у дещо різних формах – в [7, 8].

Як показали дослідження [10], одним із найбільш складних перерізів для визначення залежності (2) виявився несиметричний двотавр, поширення пластичних деформацій по висоті поперечного перерізу якого характеризується різними **випадками** 1, …, 5, 3а, пов'язаними між собою окремими послідовностями.

Ціль роботи полягає в побудові алгоритмів та наведенні числових розрахунків висоти пружного ядра для несиметричних пружно-пластичних двотаврів з використанням аналітичних залежностей, отриманих в [10], для різних послідовностей реалізації **випадків** поширення пластичних деформацій по висоті поперечних перерізів.

Результати роботи. Нижче розглянуто несиметричні двотаври, у яких площі верхніх полиць більші, ніж нижніх: $A_{f,в} > A_{f,н}$, завдяки чому нейтральна вісь z_1- z_1, а також центральна вісь *z-z*, по відношенню до середини стінки двотавру є дещо зміщеними до верхньої полиці (рис. 1,…, 7).

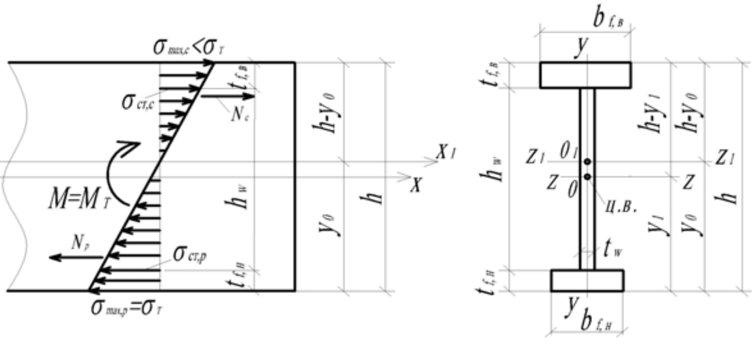

Рис. 1. **Випадок 1**: межа пружної роботи

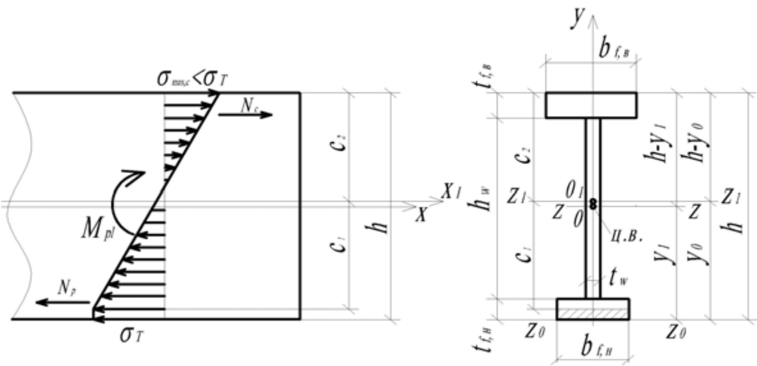

Рис. 2. **Випадок 2**: пластика на частині нижньої полиці;
верхня полиця – у пружній стадії

Для **несиметричного двотавру** у залежності від значення згинального моменту $M_T < M_{pl} < M_{\lim}$, що зростає при навантаженні, маємо **6 можливих випадків** [10]:

- **випадок 1:** максимальні нормальні напруження у крайніх волокнах нижньої полиці досягли границі текучості $\sigma_{p,\max} = \sigma_T$ (рис. 1) – границя лінійно-пружної роботи, та початку текучості;
- **випадок 2:** пластичні деформації та відповідні їм напруження σ_T поширені на частині нижньої полиці; верхня полиця у – пружній стадії $\sigma < \sigma_T$ (рис. 2);
- **випадок 3:** пластичні деформації у нижній полиці та у нижній частині стінки (рис. 3);
- **випадок 3 а:** пластичні деформації та відповідні їм напруження σ_T частково поширені на обидві полиці; цей випадок має місце замість випадку 3 для двотаврів із **незначною асиметрією** (рис. 7);
- **випадок 4:** пластичні деформації та відповідні їм напруження σ_T у нижній полиці та у нижній частині стінки, а також частково у верхній полиці (рис. 4);
- **випадок 5:** пластичні деформації та відповідні їм напруження σ_T – у полицях та на частині стінки; пружне ядро лише у межах стінки (рис. 6).

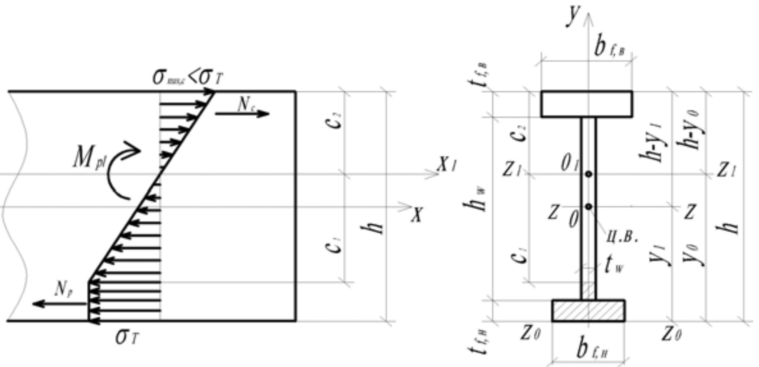

Рис. 3. **Випадок 3**: пластика у нижній полиці та нижній частині стінки

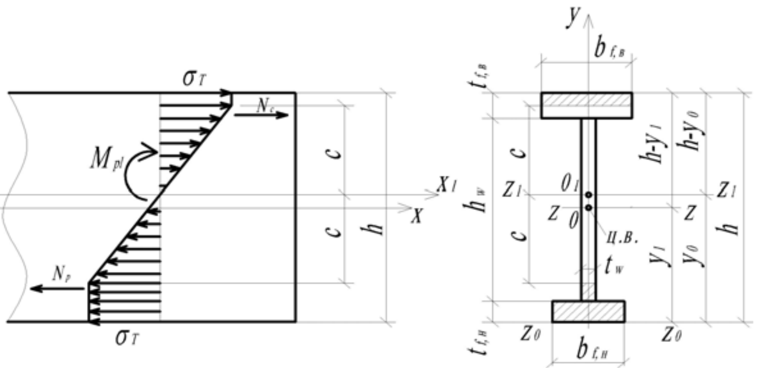

Рис. 4. **Випадок 4**: пластика у нижній полиці, на нижній частині стінки та на частині верхньої полиці

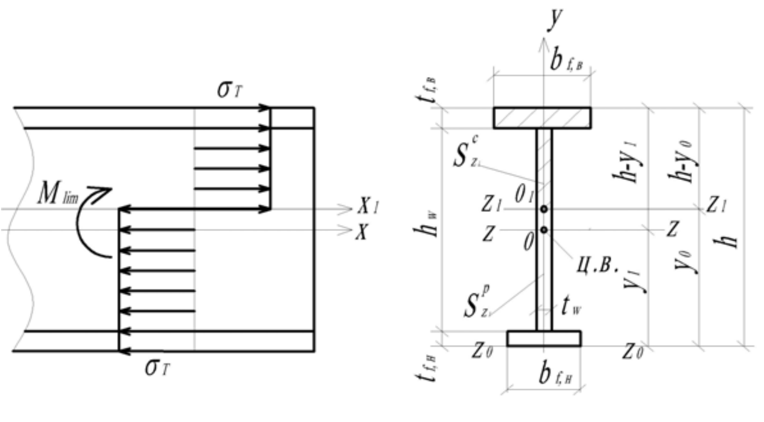

Рис. 5. До обчислення граничного значення згинального моменту $M_{\lim}$

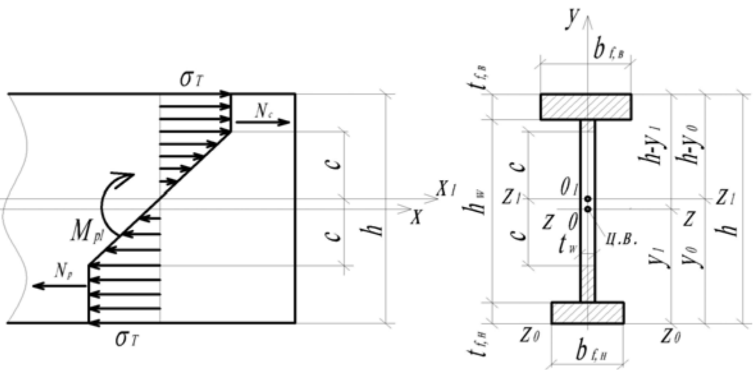

Рис. 6. **Випадок 5**: пружне ядро лише у межах стінки

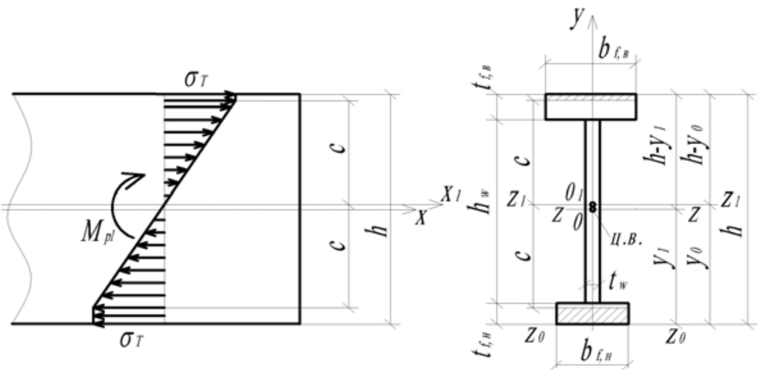

Рис. 7. **Випадок 3 а**: пластика у межах полиць

Алгоритми розрахунків за кожним із наведених вище випадків подані у числових прикладах.

Числові приклади. На числових прикладах продемонструємо, як із збільшенням значення згинального моменту M в перерізах несиметричних двотаврів зменшується пружне ядро та розвиваються пластичні деформації. Розглянемо три характерні приклади, кожний із яких має **свою особливість**:

- у прикладі 1 послідовно реалізуються усі **випадки:** з 1-го по 5-ий;
- у прикладі 2 (мало-асиметричний двотавр), замість **випадку 3,** реалізується **випадок 3 а**;
- у прикладі 3 за умови настання повного вичерпання несучої здатності $M = M_{\lim}$ нейтральна вісь z_1- z_1 знаходиться на межі верхньої полиці та стінки; при цьому послідовно реалізуються лише **випадки 1,…, 4**.

Приклад 1

Нехай маємо **несиметричний** двотавр (рис. 1,…,7) з наступними розмірами поперечного перерізу: $b_{f,в}$=30 см; $b_{f,н}$=20 см; $t_{f,в}=t_{f,н}=t_f$=2,0 см; h_w=40 см; t_w=0,75 см; h=44 см. Границя текучості: σ_T=24,5 кН/см^2.

Відповідно до рис. 5 за виразами (84), (82), (3), (4), (5), (7) [10] знаходимо **граничні значення** величин y_0, $M_{\lim}$, що відповідають шарніру пластичності, а також величин y_1, J_z, $W_z^{в}$, $W_z^{н}=W_{\min}$, M_T:

$$y_0=\frac{b_{f,в}\cdot t_{f,в}-b_{f,н}\cdot t_{f,н}+t_w\cdot(h-t_{f,в}+t_{f,н})}{2t_w}=$$
$$=\frac{30\cdot2-20\cdot2+0,75\cdot(44-2+2)}{2\cdot0,75}=35,33\ \text{см}.$$

$$M_{\lim}=\sigma_T\cdot\left[b_{f,н}\cdot t_{f,н}\cdot(y_0-\frac{t_{f,н}}{2})+\frac{1}{2}\cdot t_w(y_0-t_{f,н})^2+\right.$$
$$\left.+b_{f,в}\cdot t_{f,в}\cdot(h-y_0-\frac{t_{f,в}}{2})+\frac{1}{2}\cdot t_w(h-y_0-t_{f,в})^2\right]=$$
$$=24,5\cdot(20\cdot2\cdot(35,333-\frac{2}{2})+\frac{1}{2}\cdot0,75\cdot(35,333-2)^2+$$
$$+30\cdot2(44-35,333-\frac{2}{2})+\frac{1}{2}\cdot0,75(44-35,333-2)^2)=55533,336\ \text{кНсм};$$

$$y_1=\frac{b_{f,в}\cdot t_{f,в}\cdot(h-\frac{t_{f,в}}{2})+b_{f,н}\cdot t_{f,н}\cdot\frac{t_{f,н}}{2}+t_w\cdot h_w\cdot(\frac{h_w}{2}+t_{f,н})}{b_{f,в}\cdot t_{f,в}+b_{f,н}\cdot t_{f,н}+t_w\cdot h_w}=$$
$$=\frac{30\cdot2\cdot(44-\frac{2}{2})+20\cdot2\cdot\frac{2}{2}+0,75\cdot40\cdot(\frac{40}{2}+2)}{30\cdot2+20\cdot2+0,75\cdot40}=25,231\ \text{см};$$

$$J_z=\frac{b_{f,в}\cdot t_{f,в}^3}{12}+b_{f,в}\cdot t_{f,в}\cdot(h-y_1-\frac{t_{f,в}}{2})^2+\frac{b_{f,н}\cdot t_{f,н}^3}{12}+$$
$$+b_{f,н}\cdot t_{f,н}\cdot(y_1-\frac{t_{f,н}}{2})^2++\frac{t_w\cdot h_w^3}{12}+t_w\cdot h_w\cdot(y_1-t_{f,н}-\frac{h_w}{2})^2=$$

$$=\frac{30\cdot 2^3}{12}+30\cdot 2(44-25{,}231-\frac{2}{2})^2+\frac{20\cdot 2^3}{12}+20\cdot 2(25{,}231-\frac{2}{2})^2+$$

$$+\frac{0{,}75\cdot 40^3}{12}+0{,}75\cdot 40\cdot(25{,}231-2-\frac{40}{2})^2=46776{,}41\ \text{см}^4;$$

$$W_z^{в}=\frac{J_z}{(h-y_1)}=\frac{46776{,}41}{(44-25{,}231)}=2492{,}186\ \text{см}^3;$$

$$W_z^{н}=W_{\min}=\frac{J_z}{y_1}=\frac{46776{,}41}{25{,}231}=1853{,}943\ \text{см}^3;$$

$$M_T=\sigma_T\cdot W_{\min}=24{,}5\cdot 1853{,}943=\ 45421{,}602\ \text{кНсм}.$$

Також обчислюємо **граничні значення** величин:

$$W_{\lim}=\frac{M_{\lim}}{\sigma_T}=\frac{55533{,}336}{24{,}5}=2266{,}667\ \text{см}^3;\ \ f_{\max}=\frac{W_{\lim}}{W_{\min}}=\frac{2266{,}667}{1853{,}943}=1{,}223.$$

У процесі зростання згинального моменту M прослідкуємо, які **випадки** розвитку пластичних деформацій по поперечному перерізу мають місце для двотавру заданих розмірів .

<u>Випадок 1:</u> максимальні нормальні напруження у крайніх волокнах нижньої полиці досягли границі текучості $\sigma_{\max,p}=\sigma_T$.

Оскільки умова $M\le M_T$ відповідає пружній стадії, то нейтральна вісь z_1-z_1 співпадає з центральною віссю z-z (рис. 1), тобто маємо рівність розмірів: $y_0=y_1$.

Тоді замість обчислення положення нейтральної осі z_1-z_1 за (24) [10] запишемо безпосередньо: $y_0=y_1=25{,}231$ см.

За (28) [10] обчислюємо значення $M=M_T$:

$$M_T=\sigma_T/(3y_0)\cdot\Big\{b_{f,н}\cdot t_{f,н}\cdot(3y_0{}^2-3y_0\cdot t_{f,н}+t_{f,н}^2)+$$

$$+\left[(y_0-t_{f,н})^3+(h-y_0-t_{f,в})^3\right]\cdot t_w+$$

$$+b_{f,в}\cdot t_{f,в}\cdot(3h^2-6h\cdot y_0-3h\cdot t_{f,в}+3y_0^2+3y_0\cdot t_{f,в}+t_{f,в}^2)\Big\}=$$

$$= 24,5/(3\cdot 27,25)\cdot\left\{20\cdot 2\cdot(3\cdot 25,231^2 - 3\cdot 25,231\cdot 2 + 2^2) + \right.$$

$$+\left[(25,231-2)^3 + (44-25,231-2)^3\right]\cdot 0,75 + 30\cdot 2\cdot(3\cdot 44^2 - 6\cdot 44\cdot 25,231 -$$

$$\left. -3\cdot 44\cdot 2 + 3\cdot 25,231^2 + 3\cdot 25,231\cdot 2 + 2^2)\right\} = 45421,602 \text{ кНсм}.$$

<u>Випадок 2:</u> пластичні деформації та відповідні їм напруження σ_T поширені на частині нижньої полиці; верхня полиця − у пружній стадії.

Даний випадок (рис. 2) виникає при незначному зростанні згинального моменту $M = M_{pl}$ у порівнянні зі значенням $M = M_T$. Але, на відміну від попереднього, у цьому випадку і у наступних нейтральна вісь z_1- z_1 за умови: $A_{f,в} > A_{f,н}$ уже не співпадає з центральною віссю z- z, а дещо переміщується вгору до верхньої полиці двотавра.

Положення нейтральної осі z_1- z_1 визначається розміром y_0, який, у свою чергу, залежить від розміру c_1 (рис. 2). Останній відповідно до (44) [10] змінюється у межах:

$$c_{1,\max} = y_{0,\min} \geq c_1 \geq c_{1,\min} = y_{0,\max} - t_{f,н}.$$

Оскільки умова (41) [10]: $c_{1,\max} = y_0$ приводить нас до рівності $M_{pl} = M_T$ (див. вирази (28) та (42) [10]), тобто фактично до **випадку 1**, значення $c_{1,\max}$ на межі **випадків 1** і **2** з урахуванням, що для **випадку 1** отримано: $y_0 = y_1 = 25,231$ см, буде: $c_{1,\max} = 25,231$ см.

Умова (44) [10] для $c_{1,\min}$ потребує попереднього визначення розміру $y_{0,\max}$ за виразом (46) [10]:

$$y_{0,\max} = \frac{2b_{f,н}\cdot t_{f,н}^2 + 2hb_{f,в}\cdot t_{f,в} - b_{f,в}\cdot t_{f,в}^2 + (t_{f,в}^2 - t_{f,н}^2 + h^2 - 2ht_{f,в})\cdot t_w}{2\cdot(b_{f,в}\cdot t_{f,в} + b_{f,н}\cdot t_{f,н} + h_w\cdot t_w)} =$$

$$= \frac{2\cdot 20\cdot 2^2 + 2\cdot 44\cdot 30\cdot 2 - 30\cdot 2^2 + (2^2 - 2^2 + 44^2 - 2\cdot 44\cdot 2)\cdot 0,75}{2\cdot(30\cdot 2 + 20\cdot 2 + 40\cdot 0,75)} = 25,538 \text{ см}.$$

Тоді $c_{1,\min} = y_{0,\max} - t_{f,н} = 25,538 - 2 = 23,538$ см.

Таким чином, маємо межі зміни взаємопов'язаних величин:

$$y_{0,\min} = 25{,}231 \le y_0 \le y_{0,\max} = 25{,}538 \text{ см};$$

$$c_{1,\max} = 25{,}231 \ge c_1 \ge c_{1,\min} = 23{,}538 \text{ см}.$$

Як бачимо, із збільшенням згинаючого моменту M_{pl} розмір y_0 зростає, тобто нейтральна вісь z_1-z_1 все більше піднімається над центральною віссю z-z ($y_0 > y_1$), а розмір c_1 відповідно зменшується (див. рис. 2).

Задаючи можливі значення розміру c_1, із розв'язку квадратного рівняння (35) [9] знаходимо відповідний розмір y_0, а за виразом (40) [10] обчислюємо величину M_{pl}, і, відповідно, W_{pl}, f_{pl}.

Так, при $c_1 = c_{1,\max} = 25{,}231$ см (**межа випадків 2** і **1**) послідовно обчислюємо:

за (36) [10] – коефіцієнти квадратного рівняння (35):

$$A_1 = b_{f,н} = 20;$$

$$A_2 = -2 \cdot (b_{f,н} \cdot t_{f,н} + b_{f,в} \cdot t_{f,в} + c_1 \cdot b_{f,н} + h_w \cdot t_w) =$$
$$= -2 \cdot (20 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 25{,}231 \cdot 20 + 40 \cdot 0{,}75) = -1269{,}24;$$

$$A_3 = c_1^2 \cdot b_{f,н} + b_{f,н} \cdot t_{f,н}^2 + 2h \cdot b_{f,в} \cdot t_{f,в} - b_{f,в} \cdot t_{f,в}^2 +$$
$$+(t_{f,в}^2 - t_{f,н}^2 + h^2 - 2ht_{f,в}) \cdot t_w =$$
$$= 25{,}231^2 \cdot 20 + 20 \cdot 2^2 + 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 - 30 \cdot 2^2 +$$
$$+(2^2 - 2^2 + 44^2 - 2 \cdot 44 \cdot 2) \cdot 0{,}75 = 19292{,}068;$$

за (37) – його корені:

$$y_0 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4 \cdot A_1 \cdot A_3}}{2 \cdot A_1}; \; y_{0,1} = 38{,}231 \text{ см}; \; y_{0,2} = 25{,}231 \text{ см}.$$

Перший корінь є стороннім, оскільки $y_{0,1} > y_{0,\max} = 25{,}538$ см. Таким чином, остаточно приймаємо для $c_1 = c_{1,\max} = 25{,}231$ см, $y_0 = y_{0,2} = 25{,}231$ см. Підставляємо ці значення в (40) [10]:

$$M_{pl} = \sigma_T/(3 \cdot c_1) \cdot \left[\frac{3}{2} c_1 \cdot b_{f,н} \cdot (y_0^2 - c_1^2) + (c_1 - y_0 + t_{f,н}) \cdot b_{f,н} \times \right.$$

$$\times (c_1^2 + c_1 \cdot y_0 + y_0^2 - 2 \cdot y_0 \cdot t_{f,н} - t_{f,н} \cdot c_1 + t_{f,н}^2) + (y_0 - t_{f,н})^3 \cdot t_w +$$

$$\times + (h - y_0 - t_{f,в})^3 t_w + b_{f,в} \cdot t_{f,в} \times$$

$$\left. (3h^2 - 6hy_0 - 3ht_{f,в} + 3y_0^2 + 3y_0 t_{f,в} + t_{f,в}^2) \right] =$$

$$= 24,5/(3 \cdot 25,231) \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot 25,231 \cdot 20 \cdot (25,231^2 - 25,231^2) + \right.$$

$$+ (25,231 - 25,231 + 2) \cdot 20 \cdot (25,231^2 + 25,231 \cdot 25,231 + 25,231^2 -$$

$$-2 \cdot 25,231 \cdot 2 - 2 \cdot 25,231 + 2^2) + (25,231 - 2)^3 0,75 +$$

$$+(44 - 25,231 - 2)^3 \cdot 0,75 + 30 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 44^2 -$$

$$\left. -6 \cdot 44 \cdot 25,231 - 3 \cdot 44 \cdot 2 + 3 \cdot 25,231^2 + 3 \cdot 25,231 \cdot 2 + 2^2) \right] = 45421,602 \text{ кНсм};$$

тобто $M_{pl} = M_T$. Тоді:

$$W_{pl} = M_{pl}/\sigma_T = 45421,602/24,5 = 1853,943 \text{ см}^3 = W_{\min},$$

$$f_{pl} = W_{pl}/W_{\min} = 1853,943/1853,943 = 1,0.$$

За виразом (29) [10] обчислюємо максимальні напруження у верхній полиці:

$$\sigma_{\max,c} = \sigma_T(h - y_0)/c_1 = 24,5(44 - 25,231)/25,231 =$$

$$= 18,225 \text{кН/см}^2 < \sigma_T = 24,5 \text{ кН/см}^2$$

– верхня полиця у пружній стадії.

Нехай $c_1 = c_{1,\min} = 23,538$ см (**друга межа** для **випадку 2**). За (36) – обчислюємо коефіцієнти квадратного рівняння (35):

$A_1 = 20$; $\quad A_2 = -2 \cdot (20 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 23,538 \cdot 20 + 40 \cdot 0,75) = -1201,52$;

$$A_3 = 23,538^2 \cdot 20 + 20 \cdot 2^2 + 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 - 30 \cdot 2^2 +$$

$$+(2^2 - 2^2 + 44^2 - 2 \cdot 44 \cdot 2) \cdot 0,75 = 17640,748;$$

за (37) – його корені:

$$y_0 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4 \cdot A_1 \cdot A_3}}{2 \cdot A_1}, \; y_{0,1} = 34,537 \text{ см}; \; y_{0,2} = 25,538 \text{ см}.$$

Перший корінь є стороннім, оскільки $y_{0,1} > y_{0,\max} = 25,538$ см. Таким чином, остаточно приймаємо для $c_1 = 23,538$ см: $y_0 = y_{0,2} = 25,538$ см. Підставляємо ці значення в (40):

$$M_{pl} = 24,5/(3 \cdot 23,538) \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot 23,538 \cdot 20 \cdot (25,538^2 - 23,538^2) + \right.$$

$$+(23,538 - 25,538 + 2) \cdot 20(23,538^2 + 23,538 \cdot 25,538 + 25,538^2 - 2 \cdot 25,538 \cdot 2 -$$

$$-2 \cdot 23,538 + 2^2) + (25,538 - 2)^3 0,75 + (44 - 25,538 - 2)^3 0,75 + 30 \cdot 2(3 \cdot 44^2 -$$

$$\left. -6 \cdot 44 \cdot 25,538 - 3 \cdot 44 \cdot 2 + 3 \cdot 25,538^2 + 3 \cdot 25,538 \cdot 2 + 2^2) \right] = 47664,777 \text{ кНсм}.$$

Тоді:

$$W_{pl} = \frac{M_{pl}}{\sigma_T} = \frac{47664,777}{24,5} = 1945,501 \text{ см}^3; \; f_{pl} = \frac{W_{pl}}{W_{\min}} = \frac{1945,501}{1853,943} = 1,049.$$

За виразом (29) обчислюємо максимальні напруження у верхній полиці:

$$\sigma_{\max,c} = \sigma_T \cdot (h - y_0)/c_1 = 24,5 \cdot (44 - 25,538)/23,538 =$$

$$= 19,216 \text{ кН/см}^2 < \sigma_T = 24,5 \text{ кН/см}^2.$$

Остання перевірка напружень $\sigma_{\max,c}$ свідчить про те, що на **другій межі випадку 2** пластичні деформації розвинулися по всій нижній полиці, а верхня полиця за пружними напруженнями має певний запас. Звідси **робимо висновок**, що при подальшому зростанні згинального моменту M_{pl} **наступним буде випадок 3**, коли пластика у нижній частині перерізу поширюється на стінку, а верхня полиця працює пружно (рис. 3). **Випадок 3 а** (рис. 7) для даного двотавру **виключається**.

<u>Випадок 3:</u> пластичні деформації у нижній полиці та нижній частині стінки.

Межі можливих значень розміру c_1 для **випадку 3** (рис. 3) відображені у (62) [10]:

$c_{1,\max} = y_0 - t_{f,н} \ge c_1 \ge c_{1,\min} = h - y_0$. Але, як уже зазначалося вище (див. **випадок 2** даного прикладу), спочатку необхідно для кожного із граничних значень $c_{1,\max}$, $c_{1,\min}$ величини c_1 обчислити відповідні їм граничні значення розміру y_0: $y_{0,\min}$ та $y_{0,\max}$.

Граничний розмір $y_{0,\min}$ знаходимо за виразом (63) [10]:

$$y_{0,\min} = \frac{(2 \cdot b_{f,н} - t_w) \cdot t_{f,н}^2 + 2h \cdot b_{f,в} \cdot t_{f,в} - b_{f,в} \cdot t_{f,в}^2 +}{2 \cdot (h_w \cdot t_w + b_{f,в} \cdot t_{f,в} + b_{f,н} \cdot t_{f,н})}$$

$$\frac{+(h^2 + t_{f,в}^2 - 2 \cdot h \cdot t_{f,в}) \cdot t_w}{2 \cdot (h_w \cdot t_w + b_{f,в} \cdot t_{f,в} + b_{f,н} \cdot t_{f,н})}$$

$$= \frac{(2 \cdot 20 - 0,75) \cdot 2^2 + 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 - 30 \cdot 2^2 +}{2 \cdot (40 \cdot 0,75 + 30 \cdot 2 + 20 \cdot 2)}$$

$$\frac{+(44^2 + 2^2 - 2 \cdot 44 \cdot 2) \cdot 0,75}{2 \cdot (40 \cdot 0,75 + 30 \cdot 2 + 20 \cdot 2)} = 25,538 \text{ см.}$$

Тоді за (62): $c_{1,\max} = 25,533 - 2 = 23,538$ см. Як бачимо, граничні значення $y_{0,\min}$, $c_{1,\max}$ у **випадку 3** співпали з відповідними величинами $y_{0,\max}$, $c_{1,\min}$ для **випадку 2**.

Граничний розмір $y_{0,\max}$ знаходимо із розвязку квадратного рівняння (54) [10], коефіцієнти якого обчислюємо за (64): $A_1 = 4 \cdot t_w = 4 \cdot 0,75 = 3$;

$$A_2 = -2 \cdot (3 \cdot h \cdot t_w - t_{f,в} \cdot t_w + t_w \cdot t_{f,н} + b_{f,в} \cdot t_{f,в} - b_{f,н} \cdot t_{f,н}) =$$
$$= -2 \cdot (3 \cdot 44 \cdot 0,75 - 2 \cdot 0,75 + 0,75 \cdot 2 + 30 \cdot 2 - 20 \cdot 2) = -238,0;$$

$$A_3 = 2 \cdot h \cdot (b_{f,в} \cdot t_{f,в} - \cdot b_{f,н} \cdot t_{f,н}) - b_{f,в} \cdot t_{f,в}^2 + (2h^2 + t_{f,в}^2 +$$
$$+ t_{f,в}^2 + 2 \cdot h \cdot t_{f,н} - 2 \cdot h \cdot t_{f,в}) \cdot t_w =$$
$$= 2 \cdot 44 \cdot (30 \cdot 2 - 20 \cdot 2) - 30 \cdot 2^2 + (2 \cdot 44^2 + 2^2 + 2 \cdot 44 \cdot 2 - 2 \cdot 44 \cdot 2) \cdot 0,75 = 4547,0.$$

Корені рівняння (54) обчислюємо за (56):

$$y_0 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4 \cdot A_1 \cdot A_3}}{2 \cdot A_1}, \quad y_{0,1} = 47{,}267 \text{ см}; \quad y_{0,2} = 32{,}066 \text{ см}.$$

Корінь $y_{0,1}$ є стороннім, оскільки $y_{0,1} > h$. Остаточно приймаємо:

$y_{0,\max} = y_{0,2} = 32{,}066$ см.

Тоді за (62): $c_{1,\min} = h - y_0 = 44 - 32{,}066 = 11{,}934$.

Таким чином, маємо наступні **межі** для зміни взаємопов'язаних величин:

$y_{0,\min} = 25{,}538 \le y_0 \le y_{0,\max} = 32{,}066$ см та
$c_{1,\max} = 23{,}538 \ge c_1 \ge c_{1,\min} = 11{,}934$ см.

Задаючи можливі значення розміру c_1, із розв'язку квадратного рівняння (54) з урахуванням (55) знаходимо відповідний розмір y_0, а за виразом (58) обчислюємо величину M_{pl} і далі: W_{pl}, f_{pl}.

Так, при $c_1 = c_{1,\max} = 23{,}538$ см (межа **випадків 3** і **2**) послідовно обчислюємо:

за (55) - коефіцієнти квадратного рівняння (54):

$A_1 = t_w = 0{,}75$;

$$A_2 = -2 \cdot (t_w \cdot c_1 + h \cdot t_w - t_{f,в} \cdot t_w + b_{f,в} \cdot t_{f,в}) =$$
$$= -2 \cdot (0{,}75 \cdot 23{,}538 + 44 \cdot 0{,}75 - 2 \cdot 0{,}75 + 30 \cdot 2) = -218{,}307;$$

$$A_3 = 2t_w \cdot t_{f,н} \cdot c_1 - 2 \cdot b_{f,н} \cdot t_{f,н} \cdot c_1 + t_w \cdot c_1^2 + h^2 \cdot t_w +$$
$$+ t_{f,в}^2 \cdot t_w - 2 \cdot h \cdot t_{f,в} \cdot t_w + 2h \cdot b_{f,в} \cdot t_{f,в} - b_{f,в} \cdot t_{f,в}^2 =$$
$$= 2 \cdot 0{,}75 \cdot 2 \cdot 23{,}538 - 2 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 23{,}538 + 0{,}75 \cdot 23{,}538^2 +$$
$$+ 44^2 \cdot 0{,}75 + 2^2 \cdot 0{,}75 - -2 \cdot 44 \cdot 2 \cdot 0{,}75 + 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 -$$
$$- 30 \cdot 2^2 = 5086{,}102;$$

за (56) – його корені:

$$y_0 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4 \cdot A_1 \cdot A_3}}{2 \cdot A_1}, \quad y_{0,1} = 265{,}537 \text{ см}; \quad y_{0,2} = 25{,}538 \text{ см}.$$

Корінь $y_{0,1}$ є стороннім, оскільки $y_{0,1} > h$. Остаточно приймаємо: $y_0 = y_{0,\min} = y_{0,2} = 25{,}538$ см – співпало з граничним значенням $y_{0,\max}$ для **випадку 2**.

Значення $c_1 = c_{1,\max} = 23{,}538$ см: $y_0 = y_{0,2} = 25{,}538$ см підставляємо в (58):

$$M_{pl} = \sigma_T \cdot \Bigg[b_{f,н} \cdot t_{f,н} \cdot (y_0 - \frac{t_{f,н}}{2}) + \frac{1}{2} \cdot t_w \cdot ((y_0 - t_{f,н})^2 - c_1^2) +$$
$$+ \frac{1}{3} \cdot t_w \cdot c_1^2 + \frac{1}{3c_1} \cdot (h - y_0 - t_{f,в})^3 \cdot t_w + \frac{1}{3c_1} \cdot b_{f,в} \cdot t_{f,в} \times$$
$$\times (3h^2 - 6h \cdot y_0 - 3h \cdot t_{f,в} + 3 \cdot y_0^2 + 3y_0 \cdot t_{f,в} + t_{f,в}^2) \Bigg] =$$
$$= 24{,}5 \cdot \Bigg[20 \cdot 2 \cdot (25{,}538 - \frac{2}{2}) + \frac{1}{2} \cdot 0{,}75 \cdot ((25{,}538 - 2)^2 - 23{,}538^2) +$$
$$+ \frac{1}{3} \cdot 0{,}75 \cdot 23{,}538^2 + \frac{1}{3 \cdot 23{,}538} \cdot (44 - 25{,}538 - 2)^3 \cdot 0{,}75 + \frac{1}{3 \cdot 23{,}538} \times$$
$$\times 30 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 44^2 - 6 \cdot 44 \cdot 25{,}538 - 3 \cdot 44 \cdot 2 + 3 \cdot 25{,}538^2 + 3 \cdot 25{,}538 \cdot 2 + 2^2) \Bigg] =$$
$$= 47664{,}777 \text{ кНсм.}$$

Тоді: $W_{pl} = \frac{M_{pl}}{\sigma_T} = \frac{47664{,}777}{24{,}5} = 1945{,}501$ см^3; $f_{pl} = \frac{W_{pl}}{W_{\min}} = \frac{1945{,}501}{1853{,}943} = 1{,}049$.

За виразом (53) обчислюємо максимальні напруження у верхній полиці:

$$\sigma_{\max,c} = \sigma_T (h - y_0) / c_1 = 24{,}5(44 - 25{,}538) / 23{,}538 =$$
$$= 19{,}216 \text{ кН/см}^2 < \sigma_T = 24{,}5 \text{ кН/см}^2.$$

Як бачимо, усі величини співпали з аналогічними для **випадку 2** на його **межі** з випадком **3**.

З метою скорочення матеріалу опускаємо розрахунки для проміжних значень c_1, їх результати наведені в табл. 1.

Нехай $c_1 = c_{1,\min} = 11{,}934$ см (2-а межа для **випадку 3**). Тоді за (55) – обчислюємо коефіцієнти квадратного рівняння (54):

$$A_1 = t_w = 0{,}75;$$

$$A_2 = -2 \cdot (t_w \cdot c_1 + h \cdot t_w - t_{f,в} \cdot t_w + b_{f,в} \cdot t_{f,в}) =$$
$$= -2 \cdot (0{,}75 \cdot 11{,}934 + 44 \cdot 0{,}75 - 2 \cdot 0{,}75 + 30 \cdot 2) = -200{,}902;$$

$$A_3 = 2t_w \cdot t_{f,н} \cdot c_1 - 2 \cdot b_{f,н} \cdot t_{f,н} \cdot c_1 + t_w \cdot c_1^2 + h^2 \cdot t_w + t_{f,в}^2 \cdot t_w -$$
$$-2 \cdot h \cdot t_{f,в} \cdot t_w + 2h \cdot b_{f,в} \cdot t_{f,в} - b_{f,в} \cdot t_{f,в}^2 =$$
$$= 2 \cdot 0,75 \cdot 2 \cdot 11,934 - 2 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 11,934 + 0,75 \cdot 11,934^2 + 44^2 \cdot 0,75 +$$
$$+2^2 \cdot 0,75 - 2 \cdot 44 \cdot 2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 - 30 \cdot 2^2 = 5670,868;$$

за (56) – його корені:

$$y_0 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4 \cdot A_1 \cdot A_3}}{2 \cdot A_1}, \quad y_{0,1} = 235,804 \text{ см}; \quad y_{0,2} = 32,066 \text{ см}.$$

Корінь $y_{0,1}$ є стороннім, оскільки $y_{0,1} > h$.

Остаточно приймаємо: $y_0 = y_{0,\max} = y_{0,2} = 32,066$ см – співпало з граничним значенням $y_{0,\max}$, отриманим із розв'язку квадратного рівняння (54) з урахуванням (64).

Значення $c_1 = c_{1,\min} = 11,934$ см: $y_0 = y_{0,2} = 32,066$ см підставляємо в (58):

$$M_{pl} = \sigma_T \cdot \left[b_{f,н} \cdot t_{f,н} \cdot (y_0 - \frac{t_{f,н}}{2}) + \frac{1}{2} \cdot t_w \cdot ((y_0 - t_{f,н})^2 - c_1^2) + \right.$$
$$+\frac{1}{3} \cdot t_w \cdot c_1^2 + \frac{1}{3c_1} \cdot (h - y_0 - t_{f,в})^3 \cdot t_w + \frac{1}{3c_1} \cdot b_{f,в} \cdot t_{f,в} \times$$
$$\left. \times (3h^2 - 6h \cdot y_0 - 3h \cdot t_{f,в} + 3 \cdot y_0^2 + 3y_0 \cdot t_{f,в} + t_{f,в}^2) \right] =$$
$$= 24,5 \cdot \left[20 \cdot 2 \cdot (32,066 - \frac{2}{2}) + \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot ((32,066 - 2)^2 - 11,934^2) + \right.$$
$$+\frac{1}{3} \cdot 0,75 \cdot 11,934^2 + \frac{1}{3 \cdot 11,934} \cdot (44 - 32,066 - 2)^3 \cdot 0,75 + \frac{1}{3 \cdot 11,934} \times$$
$$\left. 30 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 44^2 - 6 \cdot 44 \cdot 32,066 - 3 \cdot 44 \cdot 2 + 3 \cdot 32,066^2 + 3 \cdot 32,066 \cdot 2 + 2^2) \right] =$$
$$= 53584,035 \text{ кНсм}.$$

Тоді:

$$W_{pl} = \frac{M_{pl}}{\sigma_T} = \frac{53584,035}{24,5} = 2187,104 \text{ см}^3; \quad f_{pl} = \frac{W_{pl}}{W_{\min}} = \frac{2187,104}{1853,943} = 1,18.$$

За виразом (53) обчислюємо максимальні напруження у верхній полиці:

$$\sigma_{\max,c} = \sigma_T \cdot (h - y_0)/c_1 = 24{,}5 \cdot (44 - 32{,}066)/11{,}934 = 24{,}5 \text{ кН/см}^2 = \sigma_T .$$

Оскільки вони досягли межі текучості, то при подальшому зростанні згинального моменту $M_{pl} > 53584{,}035$ кНсм **випадок 3** переходить у **випадок 4**.

<u>Випадок 4:</u> пластичні деформації у нижній полиці та нижній частині стінки, а також частково у верхній полиці

Межі можливих значень розміру c для **випадку 4** (рис. 4) зазначені у (74) [10]:

$$c_{\max} = h - y_{0,\min} \geq c \geq c_{\min} = h - y_{0,\max} - t_{f,в} .$$

Для знаходження граничного розміру $c_{\max}$ із рішення квадратного рівняння (67) визначимо відповідний граничний розмір $y_{0,\min}$. Для цього обчислюємо коефіцієнти рівняння (67) за виразами (75):

$$A_1 = 4 \cdot t_W = 4 \cdot 0{,}75 = 3 ;$$

$$A_2 = -2 \cdot (3h \cdot t_W - t_{f,в} \cdot t_W + t_W \cdot t_{f,н} + b_{f,в} \cdot t_{f,в} - b_{f,н} \cdot t_{f,н}) =$$
$$= -2 \cdot (3 \cdot 44 \cdot 0{,}75 - 2 \cdot 0{,}75 + 0{,}75 \cdot 2 + 30 \cdot 2 - 20 \cdot 2) = -238{,}0;$$

$$A_3 = -2h \cdot (b_{f,н} \cdot t_{f,н} - b_{f,в} \cdot t_{f,в}) - 2h \cdot t_W \cdot (t_{f,в} - t_{f,н}) +$$
$$+(2h^2 + t_{f,в}{}^2) \cdot t_W - b_{f,в} \cdot t_{f,в}{}^2 = -2 \cdot 44(20 \cdot 2 - 30 \cdot 2) -$$
$$-2 \cdot 44 \cdot 0{,}75(2 - 2) + (2 \cdot 44^2 + 2^2)0{,}75 - 30 \cdot 2^2 = 4547{,}0.$$

Тоді за (69) маємо корені рівняння (67):

$$y_0 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4 \cdot A_1 \cdot A_3}}{2 \cdot A_1}, \quad y_{0,1} = 47{,}268 \text{ см}; \quad y_{0,2} = 32{,}066 \text{ см}.$$

Корінь $y_{0,1}$ є стороннім, оскільки $y_{0,1} > h$.

Остаточно приймаємо: $y_0 = y_{0,\min} = y_{0,2} = 32{,}066$ см.

За (74) обчислюємо відповідне граничне значення $c_{\max}$:

$$c_{\max} = h - y_{0,\min} = 44 - 32{,}066 = 11{,}934 \text{ см}.$$

Як бачимо, граничні значення $y_{0,\min}$, $c_{\max}$ співпали з відповідними граничними значеннями $y_{0,\max}$, $c_{1,\min}$, отриманими для **випадку 3** на межі **випадків 4** та **3**.

Для знаходження граничного розміру $c_{\min}$ із рішення квадратного рівняння (67) визначимо відповідний граничний розмір $y_{0,\max}$. Для цього обчислюємо коефіцієнти рівняння (67) за виразами (76):

$$A_1 = 4 \cdot t_W = 4 \cdot 0,75 = 3;$$

$$A_2 = -2 \cdot (3h \cdot t_W - 3t_W \cdot t_{f,в} + t_W \cdot t_{f,н} - b_{f,н} \cdot t_{f,н} + b_{f,в} \cdot t_{f,в}) =$$
$$= -2 \cdot (3 \cdot 44 \cdot 0,75 - 3 \cdot 0,75 \cdot 2 + 0,75 \cdot 2 - 20 \cdot 2 + 30 \cdot 2) = -232,0;$$

$$A_3 = -2b_{f,н} \cdot t_{f,н} \cdot h + 2b_{f,н} \cdot t_{f,н} \cdot t_{f,в} + 2t_W \cdot t_{f,н} \cdot h - 2t_W \cdot t_{f,н} \cdot t_{f,в} +$$
$$+2h^2 \cdot t_W - 2b_{f,в} \cdot t_{f,в}{}^2 + 2t_{f,в}{}^2 t_W - 4ht_{f,в} t_W + 2hb_{f,в} \cdot t_{f,в} =$$
$$= -2 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 44 + 2 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,75 \cdot 2 \cdot 44 - 2 \cdot 0,75 \cdot 2 \cdot 2 +$$
$$+2 \cdot 44^2 \cdot 0,75 - 2 \cdot 30 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 \cdot 0,75 - 4 \cdot 44 \cdot 2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 = 4452,0.$$

За (69) маємо корені рівняння (67):

$$y_0 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4 \cdot A_1 \cdot A_3}}{2 \cdot A_1}, \quad y_{0,1} = 42,0 \text{ см}; \quad y_{0,2} = 35,333 \text{ см}.$$

Корінь $y_{0,1}$ є стороннім, оскільки $y_{0,1} = 42,0 > y_0 = 35,333$ см, де остання величина обчислена на початку даного прикладу за виразом (84) за умови повного вичерпання заданим перерізом несучої здатності.

Корінь $y_{0,2}$ співпадає з величиною $y_0 = 35,333$ см, що фіксує положення нейтральної осі z_1-z_1 або за умови поширення пластичних деформацій на весь переріз (рис. 5), або у настанні **випадку 5**, включаючи межу **випадків 4** і **5** (див. вираз (85)).

За (74) обчислюємо відповідне граничне значення $c_{\min}$:

$$c_{\min} = h - y_{0,\max} - t_{f,в} = 44 - 35,333 - 2 = 6,667 \text{ см}.$$

Оскільки відповідно до рис. 5 при $y_0 = 35,333$ см пружне ядро має бути відсутнім: $c = 0$, то корінь $y_{0,2}$ у даному прикладі відповідає значенню $y_{0,2} = y_{0,\max} = 35,333$ см з відповідною напіввисотою пружного ядра $c_{\min} = 6,667$ см.

Таким чином, маємо межі зміни взаємопов'язаних величин:

$$y_{0,\min} = 32,066 \le y_0 \le y_{0,\max} = 35,333 \text{ см};$$

$$c_{\max} = 11,934 \ge c \ \ge c_{\min} = 6,667 \text{ см}.$$

Задаючи можливі значення розміру *c*, із розв'язку квадратного рівняння (67) знаходимо відповідний розмір y_0, а за виразом (71) обчислюємо величину M_{pl} і далі W_{pl}, f_{pl}.

Так, при $c = c_{\max} = 11,934$ см (межа **випадків 4** і **3**) послідовно обчислюємо:

за (68) – коефіцієнти квадратного рівняння (67):

$$A_1 = b_{f,в} - t_w = 30 - 0,75 = 29,25;$$

$$A_2 = 2 \cdot (t_w \cdot c + h \cdot t_w - t_{f,в} \cdot t_w - h \cdot b_{f,в} + b_{f,в} \cdot t_{f,в} + b_{f,в} \cdot c) =$$
$$= 2 \cdot (0,75 \cdot 11,934 + 44 \cdot 0,75 - 2 \cdot 0,75 - 44 \cdot 30 + 30 \cdot 2 + 30 \cdot 11,934) =$$
$$= -1723,028;$$

$$A_3 = 2b_{f,н} \cdot t_{f,н} \cdot c - 2t_w \cdot t_{f,н} \cdot c - t_w \cdot c^2 - h^2 \cdot t_w - t_{f,в}{}^2 \cdot t_w + 2ht_{f,в} \cdot t_w +$$
$$+ b_{f,в} \cdot h^2 + b_{f,в} \cdot t_{f,в}{}^2 - 2hb_{f,в} \cdot t_{f,в} - 2b_{f,в} \cdot hc + b_{f,в} \cdot c^2 =$$
$$= 2 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 11,934 - 2 \cdot 0,75 \cdot 2 \cdot 11,934 - 0,75 \cdot 11,934^2 - 44^2 \cdot 0,75 - 2^2 \cdot 0,75 +$$
$$+ 2 \cdot 44 \cdot 2 \cdot 0,75 + 30 \cdot 44^2 + 30 \cdot 2^2 - 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 - 2 \cdot 30 \cdot 44 \cdot 11,934 +$$
$$+ 30 \cdot 11,934^2 = 25175,021;$$

за (69) – його корені:

$$y_0 = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4 \cdot A_1 \cdot A_3}}{2 \cdot A_1}, \quad y_{0,1} = 32,066 \text{ см}; \quad y_{0,2} = 26,841 \text{ см}.$$

Корінь $y_{0,2}$ є стороннім, оскільки $y_{0,2} < y_{0,\min} = 32,066$ см.

Остаточно приймаємо: $y_0 = y_{0,1} == y_{0,\min} = 32,066$ см.

Значення $c = c_{\max} = 11{,}934$ см, $y_0 = y_{0,1} = y_{0,\min} = 32{,}066$ см підставляємо у (71):

$$M_{pl} = \sigma_T \cdot b_{f,н} \cdot t_{f,н} \cdot (y_0 - \frac{t_{f,н}}{2}) + \sigma_T \cdot t_w \cdot (y_0 - t_{f,н} - c) \cdot \frac{1}{2} \cdot (y_0 - t_{f,н} + c) +$$

$$+\frac{1}{2} \cdot \sigma_T \cdot t_w \cdot c \cdot \frac{2}{3} \cdot c + \frac{1}{2} \cdot \sigma_T \cdot \frac{(h - y_0 - t_{f,в})^2}{c} \cdot t_w \cdot \frac{2}{3} \cdot (h - y_0 - t_{f,в}) +$$

$$+\frac{1}{2c} \cdot \sigma_T \cdot b_{f,в} \cdot (c^2 - h^2 - y_0{}^2 - t_{f,в}{}^2 + 2h \cdot y_0 + 2h \cdot t_{f,в} - 2t_{f,в} \cdot y_0) \times$$

$$\times \frac{(2h^2 + 2y_0{}^2 + 2c^2 + 2t_{f,в}{}^2 + 2hc - 2y_0 c - 2t_{f,в} c - 4hy_0 - 4ht_{f,в} + 4t_{f,в} y_0)}{3(c + h - y_0 - t_{f,в})} +$$

$$+\sigma_T \cdot b_{f,в} \cdot (h - y_0 - c) \cdot \frac{1}{2} \cdot (h - y_0 + c) =$$

$$= 24{,}5 \cdot 20 \cdot 2 \cdot (32{,}066 - \frac{2}{2}) + 24{,}5 \cdot 0{,}75 \cdot (32{,}066 - 2 - 11{,}934) \cdot \frac{1}{2} \times$$

$$\times (32{,}066 - 2 + 11{,}934) + \frac{1}{2} \cdot 24{,}5 \cdot 0{,}75 \cdot 11{,}934 \cdot \frac{2}{3} \cdot 11{,}934 +$$

$$+\frac{1}{2} \cdot 24{,}5 \cdot \frac{(44 - 32{,}066 - 2^2}{11{,}934} \cdot 0{,}75 \cdot \frac{2}{3} \cdot (44 - 32{,}066 - 2) +$$

$$+\frac{1}{2 \cdot 11{,}934} \cdot 24{,}5 \cdot 30 \cdot (11{,}934^2 - 44^2 - 32{,}066^2 - 2^2 + 2 \cdot 44 \cdot 32{,}066 +$$

$$+2 \cdot 44 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 32{,}066) \cdot (2 \cdot 44^2 + 2 \cdot 32{,}066^2 + 2 \cdot 11{,}934^2 + 2 \cdot 2^2 +$$

$$2 \cdot 44 \cdot 11{,}934 - 2 \cdot 32{,}066 \cdot 11{,}934 - 2 \cdot 2 \cdot 11{,}934 - 4 \cdot 44 \cdot 32{,}066 - 4 \cdot 44 \cdot 2 +$$

$$+4 \cdot 2 \cdot 32{,}066) \frac{1}{3 \cdot (11{,}934 + 44 - 32{,}066 - 2)} + 24{,}5 \cdot 30(44 - 32{,}066 - 11{,}934) \times$$

$$\times \frac{1}{2} \cdot (44 - 32{,}066 + 11{,}934) = 53584{,}035 \text{ кНсм.}$$

Тоді:

$$W_{pl} = \frac{M_{pl}}{\sigma_T} = \frac{53584{,}035}{24{,}5} = 2187{,}104 \text{ см}^3; \; f_{pl} = \frac{W_{pl}}{W_{\min}} = \frac{2187{,}104}{1853{,}943} = 1{,}18.$$

За виразом (53) обчислюємо напруження на межі верхньої полиці зі стінкою:

$$\sigma_{cm,c} = \sigma_T (h - y_0 - t_{f,в}) / c = 24,5(44 - 32,066 - 2)/11,934 =$$
$$= 20,394 \text{ кН/см}^2 < \sigma_T.$$

З метою скорочення матеріалу опускаємо розрахунки для проміжних значень c, їх результати наведені в табл. 1.

Нехай $c = c_{\min} = 6,667$ см (межа **випадків 4** і **5**). Тоді, аналогічно до попереднього, послідовно обчислюємо: за (68) − коефіцієнти квадратного рівняння (67):

$$A_1 = 30 - 0,75 = 29,25\ ;$$

$$A_2 = 2 \cdot (0,75 \cdot 6,667 + 44 \cdot 0,75 - 2 \cdot 0,75 - 44 \cdot 30 + 30 \cdot 2 + 30 \cdot 6,667) = \text{-}2047,0\ ;$$

$$A_3 = 2 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 6,667 - 2 \cdot 0,75 \cdot 2 \cdot 6,667 - 0,75 \cdot 6,667^2 - 44^2 \cdot 0,75 - 2^2 \cdot 0,75 +$$
$$+ 2 \cdot 44 \cdot 2 \cdot 0,75 + 30 \cdot 44^2 + 30 \cdot 2^2 - 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 - 2 \cdot 30 \cdot 44 \cdot 6,667 +$$
$$+ 30 \cdot 6,667^2 = 35810,328;$$

за (69) – його корені: $y_{0,1} = 35,333$ см; $y_{0,2} = 34,65$ см.

Корінь $y_{0,2}$ є стороннім, оскільки $y_{0,2}$ його значення не задовольняє умові (73):

$$h - y_0 - t_{f,в} = 44 - 34,65 - 2 = 7,35 \neq c_{\min} = 6,667\ .$$

Остаточно приймаємо: $y_0 = y_{0,1} = y_{0,\max} = 35,333$ см.

Значення $c = c_{\min} = 6,667$ см, $y_0 = y_{0,1} = y_{0,\max} = 35,333$ см підставляємо у (71):

$$M_{pl} = 24,5 \cdot 20 \cdot 2 \cdot (35,333 - \frac{2}{2}) + 24,5 \cdot 0,75 \cdot (35,333 - 2 - 6,667) \cdot \frac{1}{2} \times$$
$$\times (35,333 - 2 + 6,667) + \frac{1}{2} \cdot 24,5 \cdot 0,75 \cdot 6,667 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6,667 +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot 24,5 \cdot \frac{(44 - 35,333 - 2^2}{6,667} \cdot 0,75 \cdot \frac{2}{3} \cdot (44 - 35,333 - 2) +$$
$$+ \frac{1}{2 \cdot 6,667} \cdot 24,5 \cdot 30 \cdot (6,667^2 - 44^2 - 35,333^2 - 2^2 + 2 \cdot 44 \cdot 35,333 + 2 \cdot 44 \cdot 2 -$$
$$- 2 \cdot 2 \cdot 35,333) \cdot (2 \cdot 44^2 + 2 \cdot 35,333^2 + 2 \cdot 6,667^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 44 \cdot 6,667 -$$

$$-2\cdot 35{,}333\cdot 6{,}667-2\cdot 2\cdot 6{,}667-4\cdot 44\cdot 35{,}333-4\cdot 44\cdot 2+4\cdot 2\cdot 35{,}333)\times$$

$$\times\frac{1}{3\cdot(6{,}667+44-35{,}333-2)}++24{,}5\cdot 30\cdot(44-35{,}333-6{,}667)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\cdot(44-35{,}333+6{,}667)=55261{,}109 \text{ кНсм.}$$

Тоді:

$$W_{pl}=\frac{M_{pl}}{\sigma_T}=\frac{55261{,}109}{24{,}5}=2255{,}555 \text{ см}^3;\quad f_{pl}=\frac{W_{pl}}{W_{\min}}=\frac{2255{,}555}{1853{,}943}=1{,}217\,.$$

За виразом (53) обчислюємо напруження на межі верхньої полиці зі стінкою:

$$\sigma_{cm,c}=\sigma_T\cdot\frac{(h-y_0-t_{f,в})}{\text{c}}=24{,}5\cdot\frac{(44-35{,}333-2)}{6{,}667}=24{,}5 \text{ кН/см}^2=\sigma_T\,.$$

Остання перевірка показала, що при $M_{pl}=55261{,}109$ кНсм верхня полиця двотавра повністю перейшла в пластичний стан, тобто маємо межу між **випадками 4** та **5**.

<u>Випадок 5:</u> пружне ядро лише у межах стінки.

Межі можливих значень розміру *c* для **випадку 5** (рис. 6) наведені у (90) [10]:

$$c_{\max}=(h-y_{0,\min}-t_{f,в})\ge c\ge c_{\min}=0\,.$$

Оскільки вирази (85) та (84) для визначення розміру y_0 співпадають і не залежать від напіввисоти пружного ядра *c*, приймаємо значення $y_0=35{,}333$ см, обчислене на початку прикладу за виразом (84). Тоді за (90) знаходимо:

$$c_{\max}=h-y_0-t_{f,в}=44-35{,}333-2=6{,}667 \text{ см};$$

$$c_{\max}=35{,}333 \text{ см}\ge c\ge c_{\min}=0\,.$$

При $c=c_{\max}=35{,}333$ см за виразом (87) обчислюємо:

$$M_{pl}=\sigma_T\cdot\left[b_{f,н}\cdot t_{f,н}\cdot(y_0-\frac{t_{f,н}}{2})+b_{f,в}\cdot t_{f,в}\cdot(h-y_0-\frac{t_{f,в}}{2})+\frac{1}{2}\cdot t_w\times\right.$$

$$\left.\times(h^2+t_{f,в}{}^2+t_{f,н}{}^2)+t_w(y_0{}^2+y_0t_{f,в}-y_0t_{f,н}-hy_0-ht_{f,в})-\frac{1}{3}t_w\cdot c^2\right]=$$

$$=24{,}5\cdot\left[20\cdot 2\cdot(35{,}333-\frac{2}{2})+30\cdot 2\cdot(44-35{,}333-\frac{2}{2})+\frac{1}{2}\cdot 0{,}75\cdot(44^2+\right.$$

$$+2^2+2^2)+0,75\cdot(35,333^2+35,333\cdot 2-35,333\cdot 2-44\cdot 35,333-44\cdot 2)-$$
$$\left.-\frac{1}{3}\cdot 0,75\cdot 6,667^2\right]=55261,109 \text{ кНсм.}$$

Тоді:

$$W_{pl}=\frac{M_{pl}}{\sigma_T}=\frac{55261,109}{24,5}=2255,555\text{ см}^3;\quad f_{pl}=\frac{W_{pl}}{W_{\min}}=\frac{2255,555}{1853,943}=1,217.$$

При $c=c_{\min}=0$, як було показано у теоретичній частині **випадку 5** [10], вираз (87) для обчислення M_{pl} переходить у вираз (92) для обчислення $M_{\lim}$. Оскільки значення $M_{\lim}$ уже обчислено у початковій частині даного прикладу, то можемо зразу записати для $c=c_{\min}=0$:

$$M_{pl}=M_{\lim}=55533,336\text{ кНсм};\quad W_{pl}=W_{\lim}=2266,667\text{ см}^3;$$
$$f_{pl}=f_{\max}=1,223.$$

Більш повно результати обчислень даного прикладу наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Результати обчислень прикладу 1

c_l/c, см	M_T, кНсм	M_{pl}, кНсм	$M_{\lim}$, кНсм	$W_{z,\min}$, см^3	W_{pl}, см^3	$W_{\lim}$, см^3	f_{pl}
Випадок 1							
- / -	45421,6	**45421,6**	55533,34	1853,94	1853,94	2266,67	**1,0**
Випадок 2							
25,231/-	45421,6	**45421,6**	55533,34	1853,94	1853,94	2266,67	**1,0**
24,4/ -	45421,6	**46768,93**	55533,34	1853,94	1908,94	2266,67	**1,03**
23,538/-	45421,6	**47664,78**	55533,34	1853,94	1945,50	2266,67	**1,049**
Випадок 3							
23,538/-	45421,6	**47664,78**	55533,34	1853,94	1945,50	2266,67	**1,049**
19,67/ -	45421,6	**49801,71**	55533,34	1853,94	2032,72	2266,67	**1,096**
15,80/ -	45421,6	**51793,70**	55533,34	1853,94	2114,03	2266,67	**1,14**
11,934/-	45421,6	**53584,04**	55533,34	1853,94	2187,10	2266,67	**1,18**
Випадок 4							
-/**11,934**	45421,6	**53584,04**	55533,34	1853,94	2187,10	2266,67	**1,18**
-/**9,3**	45421,6	**54587,13**	55533,34	1853,94	2228,04	2266,67	**1,202**
- /**6,667**	45421,6	**55261,11**	55533,34	1853,94	2255,56	2266,67	**1,217**
Випадок 5							
- /**6,667**	45421,6	**55261,11**	55533,34	1853,94	2255,56	2266,67	**1,217**
-/**3,4**	45421,6	**55462,53**	55533,34	1853,94	2263,78	2266,67	**1,221**
- /**0,0**	45421,6	**55533,34**	55533,34	1853,94	2266,67	2266,67	**1,223**

Приклад 2

Нехай маємо **несиметричний** двотавр (рис. 1,…,7) з наступними розмірами поперечного перерізу: $b_{f,в}$ = 30 см; $t_{f,в} = t_{f,н} = t_f$ = 2,0 см; h_w= 40 см; t_w = 0,75 см; h = 44 см. Границя текучості: σ_T=24,5 кН/см^2.

Для того, щоб у даному прикладі, замість **випадку 3,** був зреалізований **випадок 3 а** (випадок **мало асиметричного** двотавру), попередньо визначимо найменшу ширину нижньої полиці $b^*_{f,н}$, яка б забезпечила перехід від **випадку 2** (рис. 2) до **випадку 3 а** (рис. 7). Цю ширину знаходимо із розв'язування квадратного рівняння (50) [10]:

$$B_1 \cdot y_0^2 + B_2 \cdot y_0 + B_3 = 0\,.$$

За (51) обчислюємо коефіцієнти B_1, …, B_3 даного рівняння:

$$B_1 = 4 \cdot t_{f,н} \cdot (-3 \cdot t_{f,н} + 4 \cdot h) = 4 \cdot 2 \cdot (-3 \cdot 2 + 4 \cdot 44) = 1360{,}0\,;$$

$$B_2 = 8 \cdot (t_{f,н} \cdot b_{f,в} \cdot t_{f,в} + t_{f,н} \cdot h_W \cdot t_W + 2 \cdot b_{f,в} \cdot t_{f,в} \cdot h + 2 \cdot h \cdot h_W \cdot t_W -$$
$$-4 \cdot h \cdot b_{f,в} \cdot t_{f,в} + 2 \cdot b_{f,в} \cdot t_{f,в}^2 - 2 \cdot t_W \cdot t_{f,в}^2 + 2 \cdot t_W \cdot t_{f,н}^2 - 2 \cdot t_W \cdot h^2 +$$
$$+4 \cdot t_W \cdot h \cdot t_{f,в}) = 8 \cdot (2 \cdot 30 \cdot 2 + 2 \cdot 40 \cdot 0{,}75 + 2 \cdot 30 \cdot 2 \cdot 44 + 2 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 0{,}75 -$$
$$-4 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 + 2 \cdot 30 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0{,}75 \cdot 2^2 + 2 \cdot 0{,}75 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0{,}75 \cdot 44^2 +$$
$$+4 \cdot 0{,}75 \cdot 44 \cdot 2) = -38880{,}0;$$

$$B_3 = 4 \cdot {b_{f,в}}^2 \cdot {t_{f,в}}^2 + 4 \cdot {h_W}^2 \cdot {t_W}^2 + 8 \cdot b_{f,в} \cdot t_{f,в} \cdot h_W \cdot t_W =$$
$$= 4 \cdot 30^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 40^2 \cdot 0{,}75^2 + 8 \cdot 30 \cdot 2 \cdot 40 \cdot 0{,}75 = 32400{,}0.$$

Корені рівняння обчислюємо за (52): $b^*_{f,н,1} = 27{,}73$ см, $b^*_{f,н,2} = 0{,}859$ см.

Другий корінь є, очевидно, стороннім, оскільки двотавр з такою шириною нижньої полиці не є **мало асиметричним**.

Тепер остаточно приймаємо **вихідні дані** для розрахунку даного прикладу (**прикладу 2**). Нехай маємо **несиметричний** двотавр (рис. 1, …, 7) з наступними розмірами поперечного перерізу: $b_{f,в} = 30$ см; $b_{f,н} = 28\text{см} > b^*_{f,н,1}$; $t_{f,в} = t_{f,н} = 2{,}0$см; h_w=40 см; t_w =0,75см; h=44 см. Границя текучості: σ_T= 24,5 кН/см^2.

За виразами (84), (82), (3), (4), (5), (7) [10] знаходимо **граничні значення** величин y_0, $M_{\lim}$, що відповідають шарніру пластичності, а також величин y_1, J_z, $W_z^в$, $W_z^н$=$W_{\min}$, M_T (**ці вирази, а також наступні для усіх випадків, окрім випадку 3а, – див. приклад 1**):

$$y_0 = (30 \cdot 2 - 28 \cdot 2 + 0,75 \cdot (44 - 2 + 2))/(2 \cdot 0,75) = 24,667 \text{ см};$$

$$M_{\lim} = 24,5 \cdot (28 \cdot 2 \cdot (24,667 - \frac{2}{2}) + \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot (24,667 - 2)^2 +$$

$$+30 \cdot 2 \cdot (44 - 24,667 - \frac{2}{2}) + \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot (44 - 24,667 - 2)^2) = 66901,336 \text{ кНсм};$$

$$y_1 = \frac{30 \cdot 2 \cdot (44 - \frac{2}{2}) + 28 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 0,75 \cdot 40 \cdot (\frac{40}{2} + 2)}{30 \cdot 2 + 28 \cdot 2 + 0,75 \cdot 40} = 22,575 \text{ см};$$

$$J_z = \frac{30 \cdot 2^3}{12} + 30 \cdot 2 \cdot (44 - 22,575 - \frac{2}{2})^2 + \frac{28 \cdot 2^3}{12} + 28 \cdot 2 \cdot (22,575 - \frac{2}{2})^2 +$$

$$+\frac{0,75 \cdot 40^3}{12} + 0,75 \cdot 40 \cdot (22,575 - 2 - \frac{40}{2})^2 = 55146,34 \text{ см}^4$$

$$W_z^в = \frac{55146,34}{(44 - 22,575)} = 2573,966 \text{ см}^3;$$

$$W_z^н = W_{\min} = \frac{55146,34}{22,575} = 2442,769 \text{ см}^3;$$

$$M_T = \sigma_T \cdot W_{\min} = 24,5 \cdot 2442,769 = 59847,836 \text{ кНсм}.$$

Також обчислюємо **граничні значення** величин:

$$W_{\lim} = \frac{M_{\lim}}{\sigma_T} = \frac{66901,336}{24,5} = 2730,667 \text{ см}^3; \quad f_{\max} = \frac{W_{\lim}}{W_{\min}} = \frac{2730,667}{2442,769} = 1,118.$$

<u>Випадок 1:</u> максимальні нормальні напруження у крайніх волокнах нижньої полиці досягли границі текучості $\sigma_{\max,p} = \sigma_T$ (рис. 1)

За аналогією до прикладу 1, за умови пружної роботи маємо:
$y_0 = y_1 = 22,575$ см.

За умови: $\sigma_{\max,p} = \sigma_T$ за виразом (28) [10] обчислюємо:

$$M = M_T = 24,5/(3 \cdot 27,25) \cdot \Big\{ 28 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 22,575^2 - 3 \cdot 22,575 \cdot 2 + 2^2) +$$

$$+ \Big[(22,575-2)^3 + (44 - 22,575 - 2)^3 \Big] 0,75 + 30 \cdot 2(3 \cdot 44^2 - 6 \cdot 44 \cdot 22,575 -$$

$$-3 \cdot 44 \cdot 2 + 3 \cdot 22,575^2 + 3 \cdot 22,575 \cdot 2 + 2^2) \Big\} = 59847,836 \text{ кНсм.}$$

<u>Випадок 2:</u> пластичні деформації та відповідні їм напруження σ_T поширені на частині нижньої полиці; верхня полиця – у пружній стадії

Як і в попередньому прикладі, розмір c_1 (рис. 2) у **випадку 2** відповідно до (44) [10] змінюється у межах: $c_{1,\max} = y_0 \ge c_1 \ge c_{1,\min} = y_0 - t_{f,н}$.

Оскільки умова (41) [10]: $c_{1,\max} = y_0$ приводить нас до рівності $M_{pl} = M_T$ (див. вирази (28) та (42) [10]), тобто фактично до **випадку 1**, значення $c_{1,\max} = y_0$ обчислюємо з урахуванням, що для **випадку 1** отримано: $y_0 = y_1 = 22,575$ см: $c_{1,\max} = y_0 = 22,575$ см.

Розміру $c_{1,\min}$ відповідає взаємозв'язаний з ним розмір $y_0 = y_{0,\max}$, який обчислюємо за (46) [10]:

$$y_{0,\max} = \frac{2 \cdot 28 \cdot 2^2 + 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 - 30 \cdot 2^2 + (2^2 - 2^2 + 44^2 - 2 \cdot 44 \cdot 2)0,75}{2 \cdot (30 \cdot 2 + 28 \cdot 2 + 40 \cdot 0,75)} =$$

$= 2,959$ см.

Тоді $c_{1,\min} = y_0 - t_{f,н} = 22,959 - 2 = 20,959$ см.

Таким чином, маємо **межі** зміни взаємопов'язаних величин:

$$y_{0,\min} = 22,575 \le y_0 \le y_{0,\max} = 22,959 \text{ см;}$$

$$c_{1,\max} = 22,575 \ge c_1 \ge c_{1,\min} = 20,959 \text{ см.}$$

Задаючи можливі значення розміру c_1, із розв'язку квадратного рівняння (35) [10] знаходимо відповідний розмір y_0, а за виразом (40) [10] обчислюємо величину M_{pl}, і, відповідно, W_{pl}, f_{pl}.

Так, при $c_1 = c_{1,\max} = 22{,}575$ см (**межа випадків 2** і **1**) послідовно обчислюємо: за (36) [10] − коефіцієнти квадратного рівняння (35):

$A_1 = 28$; $A_2 = -2 \cdot (28 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 22{,}575 \cdot 28 + 40 \cdot 0{,}75) = -1556{,}2$;

$$A_3 = 22{,}575^2 \cdot 28 + 28 \cdot 2^2 + 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 - 30 \cdot 2^2 +$$
$$+(2^2 - 2^2 + 44^2 - 2 \cdot 44 \cdot 2) \cdot 0{,}75 = 20861{,}658;$$

за (37) – його корені: $y_{0,1} = 33{,}003$ см; $y_{0,2} = 22{,}575$ см.

Перший корінь є стороннім, оскільки $y_{0,1} > y_{0,\max} = 22{,}959$ см.

Таким чином, остаточно приймаємо для $c_1 = c_{1,\max} = 22{,}575$ см:

$$y_0 = y_{0,2} = 22{,}575 \text{ см.}$$

Підставляємо ці значення в (40) [10]:

$$M_{pl} = 24{,}5/(3 \cdot 25{,}231) \cdot \Big[3/2 \cdot 22{,}575 \cdot 28 \cdot (22{,}575^2 - 22{,}575^2) +$$
$$+(22{,}575 - 22{,}575 + 2) \cdot 28 \cdot (22{,}575^2 + 22{,}575 \cdot 22{,}575 + 22{,}575^2 -$$
$$-2 \cdot 22{,}575 \cdot 2 - 2 \cdot 22{,}575 + 2^2) + (22{,}575 - 2)^3 \cdot 0{,}75 + (44 - 22{,}575 - 2)^3 \times$$
$$\times 0{,}75 + 30 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 44^2 - 6 \cdot 44 \cdot 22{,}575 - 3 \cdot 44 \cdot 2 + 3 \cdot 22{,}575^2 +$$
$$+3 \cdot 22{,}575 \cdot 2 + 2^2) \Big] = 59847{,}836 \text{ кНсм} = M_T.$$

Тоді:

$$W_{pl} = M_{pl} / \sigma_T = 59847{,}836/24{,}5 = 2442{,}769 \text{см}^3 = W_{\min};$$
$$f_{pl} = \frac{W_{pl}}{W_{\min}} = \frac{2442{,}769}{2442{,}769} = 1{,}0 = f_{\max}.$$

За виразом (29) [10] обчислюємо максимальні напруження у верхній полиці:

$$\sigma_{\max,c} = \sigma_T \cdot (h - y_0) / c_1 = 24{,}5 \cdot (44 - 22{,}575) / 22{,}575 =$$
$$= 23{,}252 \text{ кН/см}^2 < \sigma_T = 24{,}5 \text{ кН/см}^2$$

– верхня полиця ще у пружній стадії.

Нехай $c_1 = c_{1,\min} = 20{,}959$ см (**друга межа** для **випадку 2**). За (36) обчислюємо коефіцієнти квадратного рівняння (35):

$$A_1 = 28; \quad A_2 = -2 \cdot (28 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 20{,}959 \cdot 28 + 40 \cdot 0{,}75) = -1465{,}704;$$

$$A_3 = 20{,}959^2 \cdot 28 + 28 \cdot 2^2 + 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 - 30 \cdot 2^2 +$$
$$+(2^2 - 2^2 + 44^2 - 2 \cdot 44 \cdot 2) \cdot 0{,}75 = 18891{,}83;$$

за (37) – його корені: $y_{0,1} = 29{,}388$ см; $y_{0,2} = 22{,}959$ см.

Перший корінь є стороннім, оскільки $y_{0,1} > y_{0,\max} = 22{,}959$ см. Таким чином, остаточно приймаємо для $c_1 = 20{,}959$ см: $y_0 = y_{0,2} = 22{,}959$ см. Підставляємо ці значення в (40):

$$M_{pl} = 24{,}5.(3 \cdot 20{,}959) \cdot \Big[3/2 \cdot 20{,}959 \cdot 28 \cdot (22{,}959^2 - 20{,}959^2) +$$
$$+(20{,}959 - 22{,}959 + 2) \cdot 28 \cdot (20{,}959^2 + 20{,}959 \cdot 22{,}959 + 22{,}959^2 -$$
$$-2 \cdot 22{,}959 \cdot 2 - 2 \cdot 20{,}959 + 2^2) + (22{,}959 - 2)^3 \cdot 0{,}75 +$$
$$+(44 - 22{,}959 - 2)^3 \cdot 0{,}75 + 30 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 44^2 - 6 \cdot 44 \cdot 22{,}959 - 3 \cdot 44 \cdot 2 +$$
$$+3 \cdot 22{,}959^2 + 3 \cdot 22{,}959 \cdot 2 + 2^2) \Big] = 63029{,}309 \text{ кНсм.}$$

Тоді:

$$W_{pl} = \frac{M_{pl}}{\sigma_T} = \frac{63029{,}309}{24{,}5} = 2572{,}625 \text{ см}^3;$$

$$f_{pl} = \frac{W_{pl}}{W_{\min}} = \frac{2572{,}625}{2442{,}769} = 1{,}053.$$

За виразом (29) обчислюємо максимальні напруження у верхній полиці:

$$\sigma_{\max,c} = \sigma_T \cdot (h - y_0)/c_1 = 24{,}5 \cdot (44 - 22{,}959)/20{,}959 =$$
$$= 24{,}596 \text{кН/см}^2 > \sigma_T = 24{,}5 \text{кН/см}^2$$

– у верхній полиці маємо «**перенапруження**», що свідчить про те, що умова:

— $c_{1,\min} = y_0 - t_{f,н}$ ще не реалізується, як у верхній полиці починає розвиватися пластика, тобто настає **випадок 3 а**. Тому **межу випадків 2** і **3 а** шукаємо за умови (47): $\sigma_{\max,c} = \sigma_T$, тобто розмір $c_{1,\min}$ слід обчислити за виразом: $c_1 = h - y_{0,\max}$, що випливає із (29): $\sigma_{\max,c} = \sigma_T = \sigma_T \cdot (h - y_0)/c_1$, а відповідний розмір $y_0 = y_{0,\max}$ визначаємо із розв'язку квадратного рівняння (35): $A_1 \cdot y_0^2 + A_2 \cdot y_0 + A_3 = 0$,

— коефіцієнти якого мають наступні вирази (**у роботі [10] їх вирази не приведені**):

$$A_1 = 4b_{f,н} = 4 \cdot 28 = 112;$$

$$A_2 = -2 \cdot (b_{f,н} \cdot t_{f,н} + b_{f,в} \cdot t_{f,в} + 2h \cdot b_{f,н} + h_w \cdot t_w) =$$
$$= -2 \cdot (28 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 2 \cdot 44 \cdot 28 + 40 \cdot 0,75) = -5220,0;$$

$$A_3 = h^2 \cdot b_{f,н} + b_{f,н} \cdot t_{f,н}^2 + 2h \cdot b_{f,в} \cdot t_{f,в} - b_{f,в} \cdot t_{f,в}^2 +$$
$$+(t_{f,в}^2 - t_{f,н}^2 + h^2 - 2ht_{f,в}) \cdot t_w =$$
$$= 44^2 \cdot 28 + 28 \cdot 2^2 + 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 - 30 \cdot 2^2 +$$
$$+(2^2 - 2^2 + 44^2 - 2 \cdot 44 \cdot 2) \cdot 0,75 = 60800.$$

Корені рівняння (35) знаходимо за (37): $y_{0,1} = 23,75$ см; $y_{0,2} = 22,857$ см. Перший корінь є стороннім, оскільки $y_{0,1} > y_{0,\max} = 22,959$ см, де значення $y_{0,\max} = 22,959$ см отримано вище за виразом (46) [10]. Тоді: $c_1 = c_{1,\min} = h - y_{0,\max} = 44 - 22,857 = 21,143$ см і **скореговані** нові **межі** зміни взаємозв'язаних величин приймають остаточний вид:

$$y_{0,\min} = 22,575 \le y_0 \le y_{0,\max} = 22,857 \text{ см};$$

$$c_{1,\max} = 22,575 \ge c_1 \ge c_{1,\min} = 21,143 \text{ см}.$$

За виразом (29) перевіряємо граничне значення максимальних напружень у верхній полиці:

$$\sigma_{\max,c} = \sigma_T \cdot (h - y_0)/c_1 = 24,5 \cdot (44 - 22,857)/21,143 = 24,5 \text{кН/см}^2 = \sigma_T$$

– умова (47) виконується, тобто верхня полиця перебуває на межі пружної роботи та початку розвитку пластичних деформацій.

За третім виразом (29) перевіряємо напруження на межі нижньої полиці із стінкою:

$$\sigma_{cm,p} = \sigma_T \cdot (y_0 - t_{f,н}) / c_1 = 24,5 \cdot (22,857 - 2) / 21,143 =$$
$$= 24,169 \text{кН/см}^2 < \sigma_T = 24,5 \text{кН/см}^2$$

– верхня частина нижньої полиці ще перебуває у пружній стадії.

Таким чином, при $y_{0,\max} = 22,857$ см і $c_{1,\min} = 21,143$ см **випадок 2** має межу не з **випадком 3**, як у прикладі 1, а з **випадком 3 а**.

Підставляємо значення $y_{0,\max} = 22,857$ см і $c_{1,\min} = 21,143$ см в (40):

$$M_{pl} = 24,5/(3 \cdot 21,143) \cdot \Big[3/2 \cdot 21,143 \cdot 28 \cdot (22,857^2 - 21,143^2) +$$
$$+(21,143 - 22,857 + 2) \cdot 28 \cdot (21,143^2 + 21,143 \cdot 22,857 + 22,857^2 -$$
$$-2 \cdot 22,857 \cdot 2 - 2 \cdot 21,143 + 2^2) + (22,857 - 2)^3 \cdot 0,75 +$$
$$+(44 - 22,857 - 2)^3 \times 0,75 + 30 \cdot 2(3 \cdot 44^2 - 6 \cdot 44 \cdot 22,857 - 3 \cdot 44 \cdot 2 +$$
$$+3 \cdot 22,857^2 + 3 \cdot 22,857 \cdot 2 + 2^2) \Big] = 62853,6 \text{кНсм.}$$

Тоді: $W_{pl} = \dfrac{M_{pl}}{\sigma_T} = \dfrac{62853,6}{24,5} = 2565,45$ см^3; $f_{pl} = \dfrac{W_{pl}}{W_{\min}} = \dfrac{2565,45}{2442,769} = 1,05$.

<u>Випадок 3 а:</u> пластичні деформації та відповідні їм напруження σ_T мають місце лише у частинах полиць (рис. 7)

Перехід від **випадку 2** до **випадку 3 а** (перша межа) настає за умови (47) у вигляді (100): $c_{\max} = h - y_{0,\min}$, що безпосередньо випливає із рис. 2, 7.

Значення $y = y_{0,\min}$ знаходимо із квадратного рівняння (101): $A_1 y_0^2 + A_2 y_0 + A_3 = 0$, коефіцієнти якого мають вид (102):

$$A_1 = -4b_{f,н} = -4 \cdot 28 = -112;$$

$$A_2 = 2(b_{f,в} \cdot t_{f,в} + b_{f,н} \cdot t_{f,н} + t_w \cdot h_w + 2b_{f,н} \cdot h) =$$
$$= 2(30 \cdot 2 + 28 \cdot 2 + 0,75 \cdot 40 + 2 \cdot 28 \cdot 44) = 5220;$$

$$A_3 = b_{f,в} t_{f,в}{}^2 - b_{f,н} \cdot t_{f,н}^2 - b_{f,н} \cdot h^2 - t_w \cdot h^2 + t_w \cdot t_{f,н}^2 - t_w \cdot t_{f,в}{}^2 -$$
$$-2h \cdot b_{f,в} \cdot t_{f,в} + 2h \cdot t_{f,в} \cdot t_w =$$
$$= 30 \cdot 2^2 - 28 \cdot 2^2 - 28 \cdot 44^2 - 0,75 \cdot 44^2 + 0,75 \cdot 2^2 - 0,75 \cdot 2^2 -$$
$$-2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 + 2 \cdot 44 \cdot 2 \cdot 0,75 = -60800.$$

Тоді за (103) [9]:, $y_{0,1} = 22,857$ см; $y_{0,2} = 23,75$ см.

Другий корінь є стороннім, оскільки $y_{0,2} > y_{0,\max} = 22,857$ см, де значення $y_{0,\max} = 22,857$ см отримано у **випадку 2** на **межі** з **випадком 3а**. Таким чином, остаточно приймаємо для $c = c_{\min}$ відповідне значення $y_{0,\min} = y_{0,1} = 22,857$ см.

Тоді за (100): $c_{\max} = h - y_{0,\min} = 44 - 22,857 = 21,143$ см.

При цьому, контролюємо умову (рис. 7):

$y_{0,\min} = 22,857 \text{см} > c_{\max} = 21,143 \text{см} > y_{0,\min} - t_{f,н} = 22,857 - 2 = 20,857 \text{см}$,

тобто пластика ще в нижній полиці.

Для стороннього кореня $y_{0,2} = 23,75$ см маємо:

$$c_{\max} = h - y_{0,2} = 44 - 23,75 = 20,25 \text{ см},$$

при цьому контрольна умова не виконується:

$$y_{0,2} = 23,75 \text{ см} > c_{\max} = 20,25 \text{ см}, \text{ але}$$

$$c_{\max} = 20,25 \text{ см} < y_{0,2} - t_{f,н} = 23,75 - 2 = 21,75 \text{ см}.$$

Остання нерівність вказує на те, що пластика уже в нижній частині стінки, а це суперечить **випадку 3а**.

Як бачимо, значення $c_{\max}$ та $y_{0,\min}$ співпали з аналогічними у **випадку 2** на **межі випадків 2** і **3а** і, зрозуміло, забезпечують виконання пограничної умови (47).

При цьому, напруження у стінці на межі зі стиснутою та розтягнутою полицями, які обчислюємо за виразами (94), маємо наступні:

$$\sigma_{cm,c} = \sigma_T \cdot \frac{((h - y_{0,\min}) - t_{f,в})}{c_{\max}} = 24,5 \cdot \frac{(44 - 22,857 - 2)}{21,143} =$$

$$= 22,182 \text{кН/см}^2 < \sigma_T = 24,5 \text{кН/см}^2;$$

$$\sigma_{cm,p} = \sigma_T \cdot (y_{0,\min} - t_{f,н}) / c_{\max} = 24,5 \cdot (22,857 - 2) / 21,143 =$$

$$-24,17 \text{кН/см}^2 < \sigma_T = 24,5 \text{кН/см}^2$$

− працюють у пружній стадії.

Перехід від **випадку 3 а** до **випадку 4**, як це випливає безпосередньо із рис. 4, 7, настає за наступної умови (104) [10]: $c_{\min} = y_{0,\max} - t_{f,н}$. При цьому, $c_{\min} > h - y_{0,\max} - t_{f,в}$.

Підставивши (104) у (94), на межі нижньої полиці із стінкою отримуємо: $\sigma_{cm,p} = \sigma_T$, що, відповідно до рис. 4, 7, є умовою границі для **випадків 3а** і **4**. Розмір $y_0 = y_{0,\max}$ знаходимо із розв'язку (108) квадратного рівняння (106): $A_1 \cdot y_0^2 + A_2 \cdot y_0 + A_3 = 0$, коефіцієнтами якого є вирази (107):

$$A_1 = 4 \cdot b_{f,в} = 4 \cdot 30 = 120;$$

$$A_2 = 2 \cdot (b_{f,в} \cdot t_{f,в} + b_{f,н} \cdot t_{f,н} + t_w \cdot h_w - 2 \cdot b_{f,в} \cdot h - 2 \cdot b_{f,в} \cdot t_{f,н}) =$$
$$= 2 \cdot (30 \cdot 2 + 28 \cdot 2 + 0,75 \cdot 40 - 2 \cdot 30 \cdot 44 - 2 \cdot 30 \cdot 2) = -5228;$$

$$A_3 = b_{f,в} \cdot ({t_{f,в}}^2 + {t_{f,н}}^2 + h^2 - 2 \cdot t_{f,в} \cdot h + 2 \cdot t_{f,н} \cdot h) - 2 \cdot b_{f,н} \cdot {t_{f,н}}^2 +$$

$$+t_w \cdot (2 \cdot h \cdot t_{f,в} - h^2 + {t_{f,н}}^2 - {t_{f,в}}^2) =$$

$$= 30 \cdot (2^2 + 2^2 + 44^2 - 2 \cdot 2 \cdot 44 + 2 \cdot 2 \cdot 44) - 2 \cdot 28 \cdot 2^2 +$$

$$+0,75 \cdot (2 \cdot 44 \cdot 2 - 44^2 + 2^2 - 2^2) = 58320 - 224 - 1320 = 56776.$$

Тоді $y_{0,1} = 20,608$ см; $y_{0,2} = 22,958$ см і, відповідно до умови: $c_{\min} = y_{0,\max} - t_{f,н}$, обчислюємо:

$$c_{\min,1} = y_{0,1} - t_{f,н} = 20,608 - 2 = 18,608 \text{ см};$$
$$c_{\min,2} = y_{0,2} - t_{f,н} = 22,958 - 2 = 20,958 \text{ см}.$$

Для того, щоб визначити сторонній корінь, перевіряємо умову (рис. 7) $c_{\min} > h - y_{0,\max} - t_{f,в}$:

- $c_{\min,1} = 18,608 < h - y_{0,1} - t_{f,в} = 44 - 20,608 - 2 = 21,392$ см – пластика у верхній частині стінки, що суперечить **випадку 3 а**;
- $c_{\min,2} = 20,958 > h - y_{0,2} - t_{f,в} = 44 - 22,958 - 2 = 19,042$ см – пластика в межах верхньої полиці.

Таким чином, стороннім є корінь $y_{0,1}$. Тоді на **межі** з **випадком 4** маємо: $y_{0,\max} = 22,958$ см; $c_{\min} = 20,958$ см. При цьому, напруження у стінці на межі із стиснутою та розтягнутою полицями, які обчислюємо за виразами (94), маємо наступні:

$$\sigma_{ст,с} = \sigma_T \cdot \frac{((h - y_{0,\max}) - t_{f,в})}{c_{\min}} = 24,5 \cdot \frac{(44 - 22,958 - 2)}{20,958} =$$

$$= 22,26 \text{ кН/см}^2 < \sigma_T = 24,5 \text{ кН/см}^2;$$

$$\sigma_{ст,р} = \sigma_T \cdot (y_{0,\max} - t_{f,н}) / c_{\min} = 24,5 \cdot (22,958 - 2) / 20,958 =$$

$$= 24,5 \text{кН/см}^2 = \sigma_T$$

– верхня полиця працює у пружній стадії, а нижня – вся у пластичній.

Задаючи можливі значення розміру c, із розв’язку квадратного рівняння (95) [10] знаходимо відповідний розмір y_0, а за виразом (99) обчислюємо величину M_{pl}.

Так, при $c = c_{\max} = 21,143$ см (**межа випадків 3 а** і **2**) послідовно обчислюємо:

за (96) – коефіцієнти квадратного рівняння (95):

$$A_1 \cdot y_0^2 + A_2 \cdot y_0 + A_3 = 0;$$

$$A_1 = -\frac{1}{2c} \cdot (b_{f,н} - b_{f,в}) = -\frac{1}{2 \cdot 21,143} \cdot (28 - 30) = 0,047;$$

$$A_2 = \frac{1}{c} \cdot \left[(b_{f,н} - t_w) \cdot t_{f,н} - (b_{f,в} - t_w) \cdot (h - t_{f,в})\right] + b_{f,н} + b_{f,в} =$$

$$= \frac{1}{21,143} \cdot \left[(28 - 0,75) \cdot 2 - (30 - 0,75) \cdot (44 - 2)\right] + 28 + 30 = 2,473;$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\cdot(b_{f,н} - b_{f,в})\cdot c - \frac{1}{2c}\cdot\left[(b_{f,н} - t_w)\cdot t_{f,н}^2 - (b_{f,в} - t_w)\cdot(h - t_{f,в})^2\right] -$$

$$-b_{f,в}\cdot h = -\frac{1}{2}(28-30)\cdot 21{,}143 - \frac{1}{2\cdot 21{,}143}\times$$

$$\times\left[(28-0{,}75)\cdot 2^2 - (30-0{,}75)\cdot(44-2)^2\right] - 30\cdot 44 = -81{,}243;$$

за (97) – його корені: $y_{0,1} = -75{,}151$ см; $y_{0,2} = 22{,}857$ см.

Розмір $y_{0,2} = 22{,}857$ см відповідає **межі випадків 3 а** і **2.**

Значення $c = c_{\max} = 21{,}143$ см, $y_0 = y_{0,2} = y_{0,\min} = 22{,}857$ см підставляємо у (99) (у роботі [10] у цьому виразі **є помилки!**) :

$$M_{pl} = \sigma_T\cdot b_{f,н}\cdot(y_0 - c)\cdot\frac{1}{2}\cdot(y_0 + c) + \frac{1}{2}\cdot\left[\sigma_T + \sigma_T\cdot\frac{(y_0 - t_{f,н})}{c}\right]\times$$

$$\times\left[c - (y_0 - t_{f,н})\right]\cdot b_{f,н}\left[(y_0 - t_{f,н}) + \frac{1}{3}\cdot(1 + \frac{c}{c + (y_0 - t_{f,н})})\cdot(c - y_0 + t_{f,н})\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left[\sigma_T\cdot\frac{(y_0 - t_{f,н})}{c}\right]\cdot(y_0 - t_{f,н})\cdot t_w\cdot\frac{2}{3}\cdot(y_0 - t_{f,н}) +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left[\sigma_T\cdot\frac{((h - y_0) - t_{f,в})}{c}\right]\cdot\left[(h - y_0) - t_{f,в}\right]\cdot t_w\cdot\frac{2}{3}\cdot(h - y_0 - t_{f,в}) +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left[\sigma_T + \sigma_T\cdot\frac{((h - y_0) - t_{f,в})}{c}\right]\cdot\left[c - ((h - y_0) - t_{f,в})\right]\cdot b_{f,в}\times$$

$$\times\left[(h - y_0 - t_{f,в}) + \frac{1}{3}\cdot\left[1 + \frac{c}{(c + h - y_0 - t_{f,в})}\right]\cdot(c - h + y_0 + t_{f,в})\right] +$$

$$+\sigma_T\cdot b_{f,в}\cdot(h - y_0 - c)\cdot\frac{1}{2}\cdot(h - y_0 + c) =$$

$$= 24{,}5\cdot 28\cdot(22{,}857 - 21{,}143)\cdot\frac{1}{2}\cdot(22{,}857 + 21{,}143) +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left[24{,}5 + 24{,}5\cdot\frac{(22{,}857-2)}{21{,}143}\right]\times\left[21{,}143 - (22{,}857-2)\right]\cdot 28\times$$

$$\times\left[(22{,}857-2) + \frac{1}{3}\cdot(1 + \frac{21{,}143}{21{,}143 + (22{,}857-2)})\cdot(21{,}143 - 22{,}857 + 2)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left[24,5\cdot\frac{(22,857-2)}{21,143}\right]\cdot(22,857-2)\cdot 0,75\cdot\frac{2}{3}\cdot(22,857-2)+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left[24,5\cdot\frac{((44-22,857)-2)}{21,143}\right]\cdot\left[(44-22,857)-2\right]\cdot 0,75\cdot\frac{2}{3}\times$$

$$\times(44-22,857-2)+\frac{1}{2}\cdot\left[24,5+24,5\cdot\frac{((44-22,857)-2)}{21,143}\right]\times$$

$$\times\left[21,143-((44-22,857)-2)\right]\cdot 30\cdot\left[(44-22,857-2)+\frac{1}{3}\times\right.$$

$$\left.\times\left[1+\frac{21,143}{(21,143+44-22,857-2)}\right](21,143-44+22,857+2)\right]+$$

$$+24,5\cdot 30(44-22,857-21,143)\cdot\frac{1}{2}(44-22,857+21,143)=62853,6\text{ кНсм.}$$

Тоді: $W_{pl}=\dfrac{M_{pl}}{\sigma_T}=\dfrac{62853,6}{24,5}=2565,56$ см^3; $f_{pl}=\dfrac{W_{pl}}{W_{\min}}=\dfrac{2565,56}{2442,769}=1,05$.

Аналогічно попередньому, при $c=c_{\min}=20,958$ см (**межа випадків 3 а** і **4**) маємо корені квадратного рівняння (95): $y_{0,1}=-64,52$ см; $y_{0,2}=22,958$ см.

Розмір $y_{0,2}=22,958$ см відповідає **межі випадків 3 а** і **4.**

Підставивши значення $c=c_{\min}=20,958$ см, $y_0=y_{0,2}=y_{0,\max}=22,958$ см у (99), отримаємо: $M_{pl}=63029,43,56$ кНсм.

Тоді:

$$W_{pl}=\frac{M_{pl}}{\sigma_T}=\frac{63029,44}{24,5}=2572,63\text{ см}^3;\quad f_{pl}=\frac{W_{pl}}{W_{\min}}=\frac{2572,63}{2442,769}=1,053.$$

<u>Випадок 4:</u> пластичні деформації у нижній полиці та нижній частині стінки, а також частково у верхній полиці

Особливістю **випадку 4,** коли замість **випадку 3** маємо **випадок 3 а,** є те, що межа для $c_{\max}$ у **випадку 4** (рис. 4) з попереднім не описується виразами (72), (74) [10], оскільки верхня полиця відповідно до **випадку 3 а** уже частково має пластичні деформації. Тому значення розміру $c_{\max}$

приймаємо рівним значенню $c_{\min}$, знайденим для **випадку 3 а**: $c_{\max} = 20,958$ см. Відповідне йому значення $y_{0,\min}$ знайдемо із розв'язку квадратного рівняння (67): $A_1 \cdot y_0^2 + A_2 \cdot y_0 + A_3 = 0$, коефіцієнти якого обчислюємо за (68):

$$A_1 = b_{f,в} - t_w = 30 - 0,75 = 29,25;$$

$$A_2 = 2 \cdot (t_w \cdot c + h \cdot t_w - t_{f,в} \cdot t_w - h \cdot b_{f,в} + b_{f,в} \cdot t_{f,в} + b_{f,в} \cdot c) =$$
$$= 2(0,75 \cdot 20,958 + 44 \cdot 0,75 - 2 \cdot 0,75 - 44 \cdot 30 + 30 \cdot 2 + 30 \cdot 20,958) =$$
$$= -1168,083;$$

$$A_3 = 2b_{f,н} \cdot t_{f,н} \cdot c - 2t_w \cdot t_{f,н} \cdot c - t_w \cdot c^2 - h^2 \cdot t_w - t_{f,в}{}^2 \cdot t_w +$$
$$+2ht_{f,в} \cdot t_w + b_{f,в} \cdot h^2 + b_{f,в} \cdot t_{f,в}{}^2 - 2hb_{f,в} \cdot t_{f,в} - 2b_{f,в} \cdot hc + b_{f,в} \cdot c^2 =$$
$$= 2 \cdot 28 \cdot 2 \cdot 20,958 - 2 \cdot 0,75 \cdot 2 \cdot 20,958 - 0,75 \cdot 20,958^2 - 44^2 \cdot 0,75 -$$
$$-2^2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 44 \cdot 2 \cdot 0,75 + 30 \cdot 44^2 + 30 \cdot 2^2 - 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 -$$
$$-2 \cdot 30 \cdot 44 \cdot 20,958 + 30 \cdot 20,958^2 = 11400,01;$$

а його корені за (69): $y_{0,1} = 16,98$ см; $y_{0,2} = 22,958$ см.

Корінь $y_{0,1}$ є стороннім, оскільки $y_{0,1} < y_{0,\max} = 22,958$ см – див. **випадок 3 а**.

Остаточно приймаємо: $y_{0,2} = y_{0,\min} = 22,958$ см, що співпав з $y_{0,\max}$ для **випадку 3 а**.

Для знаходження граничного розміру $c_{\min}$ за виразом (73), із рішення квадратного рівняння (67) визначимо відповідний граничний розмір $y_{0,\max}$. Обчислюємо коефіцієнти рівняння (67) за виразами (76):

$$A_1 = 4 \cdot t_w = 4 \cdot 0,75 = 3;$$

$$A_2 = -2 \cdot (3h \cdot t_w - 3t_w \cdot t_{f,в} + t_w \cdot t_{f,н} - b_{f,н} \cdot t_{f,н} + b_{f,в} \cdot t_{f,в}) =$$

$$= -2 \cdot (3 \cdot 44 \cdot 0,75 - 3 \cdot 0,75 \cdot 2 + 0,75 \cdot 2 - 28 \cdot 2 + 30 \cdot 2) = -200,0;$$

$$A_3 = -2b_{f,н} \cdot t_{f,н} \cdot h + 2b_{f,н} \cdot t_{f,н} \cdot t_{f,в} + 2t_w \cdot t_{f,н} \cdot h - 2t_w \cdot t_{f,н} \cdot t_{f,в} +$$

$$+2h^2 \cdot t_w - 2b_{f,в} \cdot t_{f,в}{}^2 + 2t_{f,в}{}^2 t_w - 4ht_{f,в} t_w + 2hb_{f,в} \cdot t_{f,в} =$$

$= -2 \cdot 28 \cdot 2 \cdot 44 + 2 \cdot 28 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,75 \cdot 2 \cdot 44 - 2 \cdot 0,75 \cdot 2 \cdot 2 +$

$+2 \cdot 44^2 \cdot 0,75 - 2 \cdot 30 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 \cdot 0,75 - 4 \cdot 44 \cdot 2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 = 3108,0$.

За (69) маємо корені рівняння (67): $y_{0,1} = 42,0$ см; $y_{0,2} = 24,667$ см.

Корінь $y_{0,1}$ є стороннім, оскільки $y_{0,1} = 42,0 > y_0 = 24,667$ см, де остання величина обчислена на початку даного прикладу за виразом (84) за умови повного вичерпання заданим перерізом несучої здатності. Корінь $y_{0,2}$ співпадає з величиною $y_0 = 24,667$ см, що фіксує положення нейтральної осі *z₁-z₁* або за умови поширення пластичних деформацій на весь переріз (рис. 5), або у настанні **випадку 5**, включаючи межу **випадків 4** і **5** (див. вираз (85)).

За (73) обчислюємо відповідне граничне значення $c_{\min}$:

$$c_{\min} = h - y_{0,\max} - t_{f,в} = 44 - 24,667 - 2 = 17,333 \text{ см.}$$

Оскільки відповідно до рис. 5 при $y_0 = 24,667$ см пружне ядро має бути відсутнім $c = 0$, то корінь $y_{0,2}$ у даному **випадку 4** відповідає значенню $y_{0,2} = y_{0,\max} = 24,667$ см з відповідною напіввисотою пружного ядра $c_{\min} = 17,333$ см.

Таким чином, маємо межі зміни взаємопов'язаних величин:

$$y_{0,\min} = 22,958 \le y_0 \le y_{0,\max} = 24,667 \text{ см;}$$

$$c_{\max} = 20,958 \ge c \ge c_{\min} = 17,333 \text{ см.}$$

Задаючи можливі значення розміру *c*, із розв'язку квадратного рівняння (67) знаходимо відповідний розмір y_0, а за виразом (71) обчислюємо величину M_{pl} і далі W_{pl}, f_{pl}.

Так, при $c = c_{\max} = 20,958$ см; $y_0 = y_{0,\min} = 22,958$ см (межа **випадків 4** і **3 а**) за (71) обчислюємо:

$$M_{pl} = \sigma_T \cdot b_{f,н} \cdot t_{f,н} \cdot (y_0 - \frac{t_{f,н}}{2}) + \sigma_T \cdot t_w \cdot (y_0 - t_{f,н} - c) \cdot \frac{1}{2} \cdot (y_0 - t_{f,н} + c) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \sigma_T \cdot t_w \cdot c \cdot \frac{2}{3} \cdot c + \frac{1}{2} \cdot \sigma_T \cdot \frac{(h - y_0 - t_{f,в})^2}{c} \cdot t_w \cdot \frac{2}{3} \cdot (h - y_0 - t_{f,в}) +$$

$$+\frac{1}{2c}\cdot\sigma_T\cdot b_{f,в}\cdot(c^2-h^2-{y_0}^2-{t_{f,в}}^2+2h\cdot y_0+2h\cdot t_{f,в}-2t_{f,в}\cdot y_0)\times$$

$$\times\frac{(2h^2+2{y_0}^2+2c^2+2{t_{f,в}}^2+2hc-2y_0c-2t_{f,в}c-4hy_0-4ht_{f,в}+4t_{f,в}y_0)}{3(c+h-y_0-t_{f,в})}+$$

$$+\sigma_T\cdot b_{f,в}\cdot(h-y_0-c)\cdot\frac{1}{2}\cdot(h-y_0+c)=$$

$$=24,5\cdot 28\cdot 2\cdot(22{,}958-\frac{2}{2})+24,5\cdot 0,75\cdot(22{,}958-2-20{,}958)\cdot\frac{1}{2}\times$$

$$\times(22{,}958-2+20{,}958)+\frac{1}{2}\cdot 24,5\cdot 0,75\cdot 20{,}958\cdot\frac{2}{3}\cdot 20{,}958+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot 24,5\cdot\frac{(44-22{,}958-2)^2}{20{,}958}\cdot 0,75\cdot\frac{2}{3}\cdot(44-22{,}958-2)+$$

$$+\frac{1}{2\cdot 20{,}958}\cdot 24,5\cdot 30\cdot(20{,}958^2-44^2-22{,}958^2-2^2+2\cdot 44\cdot 22{,}958+2\cdot 44\cdot 2-$$

$$-2\cdot 2\cdot 22{,}958)\cdot(2\cdot 44^2+2\cdot 22{,}958^2+2\cdot 20{,}958^2+2\cdot 2^2+2\cdot 44\cdot 20{,}958-$$

$$-2\cdot 22{,}958\cdot 20{,}958-2\cdot 2\cdot 20{,}958-4\cdot 44\cdot 22{,}958-4\cdot 44\cdot 2+4\cdot 2\cdot 22{,}958)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{3\cdot(20{,}958+44-22{,}958-2)}+$$

$$+24,5\cdot 30\cdot(44-22{,}958-20{,}958)\cdot\frac{1}{2}\cdot(44-22{,}958+20{,}958)=63029,4\ \text{кНсм}$$

– співпало з **випадком 3 а** на **межі випадків 4** і **3 а**.

За виразом (53) обчислюємо напруження на межі верхньої полиці зі стінкою:

$$\sigma_{ст,с}=\sigma_T\cdot(h-y_0-t_{f,в})/c=24,5\cdot(44-22{,}958-2)/20{,}958=$$

$$=22{,}26\text{кН/см}^2<\sigma_T.$$

Нехай $c=c_{\min}=17,333$ см (межа **випадків 4** і **5**). Тоді послідовно обчислюємо:

за (68) – коефіцієнти квадратного рівняння (67):

$$A_1=b_{f,в}-t_w=30-0,75=29,25;$$

$$A_2 = 2\cdot(t_w\cdot c + h\cdot t_w - t_{f,в}\cdot t_w - h\cdot b_{f,в} + b_{f,в}\cdot t_{f,в} + b_{f,в}\cdot c) =$$

$$= 2(0,75\cdot 17,333 + 44\cdot 0,75 - 2\cdot 0,75 - 44\cdot 30 + 30\cdot 2 + 30\cdot 17,333) = -1391,02;$$

$$A_3 = 2b_{f,н}\cdot t_{f,н}\cdot c - 2t_w\cdot t_{f,н}\cdot c - t_w\cdot c^2 - h^2\cdot t_w - t_{f,в}{}^2\cdot t_w + 2ht_{f,в}\cdot t_w +$$

$$+b_{f,в}\cdot h^2 + b_{f,в}\cdot t_{f,в}{}^2 - 2hb_{f,в}\cdot t_{f,в} - 2b_{f,в}\cdot hc + b_{f,в}\cdot c^2 =$$

$$= 2\cdot 28\cdot 2\cdot 17,333 - 2\cdot 0,75\cdot 2\cdot 17,333 - 0,75\cdot 17,333^2 - 44^2\cdot 0,75 -$$

$$2^2\cdot 0,75 + 2\cdot 44\cdot 2\cdot 0,75 + 30\cdot 44^2 + 30\cdot 2^2 - 2\cdot 44\cdot 30\cdot 2 -$$

$$-2\cdot 30\cdot 44\cdot 17,333 + 30\cdot 17,333^2 = 16514,84;$$

за (69) – його корені: $y_{0,1} = 24,667$ см; $y_{0,2} = 22,89$ см.

Корінь $y_{0,2}$ є стороннім, оскільки він не задовольняє умові (73):

$$h - y_{0,2} - t_{f,в} = 44 - 22,89 - 2 = 19,11 \neq c_{\min} = 17,333\,.$$

Остаточно приймаємо: $y_0 = y_{0,1} = y_{0,\max} = 24,667$ см.

Значення $c = c_{\min} = 17,333$ см, $y_0 = y_{0,1} = y_{0,\max} = 24,667$ см підставляємо у (71):

$$M_{pl} = 24,5\cdot 28\cdot 2\cdot(24,667 - \frac{2}{2}) + 24,5\cdot 0,75\cdot(24,667 - 2 - 17,333)\cdot\frac{1}{2}\times$$

$$\times(24,667 - 2 + 17,333) + \frac{1}{2}\cdot 24,5\cdot 0,75\cdot 17,333\cdot\frac{2}{3}\cdot 17,333 +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot 24,5\cdot\frac{(44 - 24,667 - 2)^2}{17,333}\cdot 0,75\cdot\frac{2}{3}\cdot(44 - 24,667 - 2) +$$

$$+\frac{1}{2\cdot 17,333}\cdot 24,5\cdot 30\cdot(17,333^2 - 44^2 - 24,667^2 - 2^2 + 2\cdot 44\cdot 24,667 + 2\cdot 44\cdot 2 -$$

$$-2\cdot 2\cdot 24,667)\cdot(2\cdot 44^2 + 2\cdot 24,667^2 + 2\cdot 17,333^2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 44\cdot 17,333 -$$

$$-2\cdot 24,667\cdot 17,333 - 2\cdot 2\cdot 17,333 - 4\cdot 44\cdot 24,667 - 4\cdot 44\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot 24,667)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{3\cdot(17,333 + 44 - 24,667 - 2)} +$$

$$+24,5\cdot 30\cdot(44 - 24,667 - 17,333)\cdot\frac{1}{2}\cdot(44 - 24,667 + 17,333) = 65061,18 \text{ кНсм.}$$

Тоді:

$$W_{pl}=\frac{M_{pl}}{\sigma_T}=\frac{65061{,}18}{24,5}=2655{,}558\ \text{см}^3;\ f_{pl}=\frac{W_{pl}}{W_{\min}}=\frac{2655{,}558}{2442{,}769}=1,087\,.$$

За виразом (53) обчислюємо напруження на межі верхньої полиці зі стінкою:

$$\sigma_{cm,c}=\sigma_T\cdot(h-y_0-t_{f,в})/c=24,5\cdot(44-24{,}667-2)/17,333=$$

$$=24{,}5\text{кН/см}^2=\sigma_T\,.$$

Остання перевірка показала, що при $M_{pl}=65061{,}18$ кНсм верхня полиця двотавра повністю перейшла в пластичний стан, тобто маємо межу між **випадками 4** та **5**.

<u>Випадок 5:</u> пружне ядро лише у межах стінки

Межі можливих значень розміру *c* для **випадку 5** (рис. 6) наведені у (90) [10]:

$$c_{\max}=(h-y_{0,\min}-t_{f,в})\geq c\geq c_{\min}=0\,.$$

Оскільки вирази (85) та (84) [10] для визначення розміру y_0 співпадають і не залежать від напіввисоти пружного ядра *c*, приймаємо значення $y_0=24,667$ см, обчислене на початку прикладу за виразом (84). Тоді за (90) знаходимо:

$$c_{\max}=h-y_0-t_{f,в}=44-24,667-2=17,333\ \text{см};$$

$$c_{\max}=17,333см\geq c\geq c_{\min}=0\,.$$

При $c=c_{\max}=17,333$ см за виразом (87) [10] обчислюємо:

$$M_{pl}=\sigma_T\cdot\left[b_{f,н}\cdot t_{f,н}\cdot(y_0-\frac{t_{f,н}}{2})+b_{f,в}\cdot t_{f,в}\cdot(h-y_0-\frac{t_{f,в}}{2})+\frac{1}{2}\cdot t_w\cdot(h^2+\right.$$

$$\left.+t_{f,в}{}^2+t_{f,н}{}^2)+t_w\cdot(y_0{}^2+y_0t_{f,в}-y_0t_{f,н}-hy_0-ht_{f,в})-\frac{1}{3}\cdot t_w\cdot c^2\right]=$$

$$=24,5\cdot\left[28\cdot2\cdot(24,667-\frac{2}{2})+30\cdot2\cdot(44-24,667-\frac{2}{2})+\frac{1}{2}\cdot0,75\cdot(44^2+\right.$$

$$+2^2+2^2)+0,75\cdot(24,667^2+24,667\cdot 2-24,667\cdot 2-44\cdot 24,667-44\cdot 2)-$$

$$\left.-\frac{1}{3}\cdot 0,75\cdot 6,667^2\right]=65061,18\text{ кНсм}$$

– співпало з **випадком 4** на **межі випадків 4** і **5**.

При $c=c_{\min}=0$, як було показано у теоретичній частині **випадку 5** [10], вираз (87) для обчислення M_{pl} переходить у вираз (92) для обчислення $M_{\lim}$. Оскільки значення $M_{\lim}$ уже обчислено у початковій частині даного прикладу, то можемо зразу записати для $c=c_{\min}=0$:

$M_{pl}=M_{\lim}=66901{,}336$ кНсм; $W_{pl}=W_{\lim}=2730{,}667$ см^3; $f_{pl}=f_{\max}=1{,}118$.

Більш повно результати обчислень даного прикладу наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Результати обчислень прикладу 2

c_1/c, см	M_T, кНсм	M_{pl}, кНсм	$M_{\lim}$, кНсм	$W_{z,\min}$, см^3	W_{pl}, см^3	$W_{\lim}$, см^3	f_{pl}
Випадок 1							
- / -	59847,84	59847,84	66901,34	2442,77	2442,77	2730,67	**1,0**
Випадок 2							
22,575/-	59847,84	**59847,84**	66901,34	2442,77	2442,77	2730,67	**1,0**
21,216/ -	59847,84	**62762,21**	66901,34	2442,77	2561,72	2730,67	**1,049**
21,143/-	59847,84	**62853,60**	66901,34	2442,77	2565,45	2730,67	**1,05**
Випадок 3а							
-/**21,143**	59847,84	**62853,60**	66901,34	2442,77	2565,45	2730,67	**1,05**
-/21,081	59847,84	**62921,78**	66901,34	2442,77	2568,24	2730,67	**1,051**
-/21,02	59847,84	**62979,93**	66901,34	2442,77	2570,61	2730,67	**1,052**
-/20,958	59847,84	**63029,44**	66901,34	2442,77	2572,63	2730,67	**1,053**
Випадок 4							
-/20,958	59847,84	**63029,44**	66901,34	2442,77	2572,63	2730,67	**1,053**
-/20,052	59847,84	**63646,98**	66901,34	2442,77	2597,84	2730,67	**1,063**
- /19,146	59847,84	**64213,25**	66901,34	2442,77	2620,95	2730,67	**1,073**
- /18,239	59847,84	**64709,07**	66901,34	2442,77	2641,19	2730,67	**1,081**
- /**17,333**	59847,84	**65061,18**	66901,34	2442,77	2655,56	2730,67	**1,087**
Випадок 5							
- /**17,333**	59847,84	**65061,18**	66901,34	2442,77	2655,56	2730,67	**1,087**
-/13,000	59847,84	**65866,21**	66901,34	2442,77	2688,42	2730,67	**1,1**
-/8,667	59847,84	**66441,24**	66901,34	2442,77	2711,89	2730,67	**1,11**
-/4,333	59847,84	**66786,34**	66901,34	2442,77	2725,97	2730,67	**1,16**
- /**0,0**	59847,84	**66901,34**	66901,34	2442,77	2730,67	2730,67	**1,118**

Приклад 3

Нехай маємо **несиметричний** двотавр (рис. 1, …, 7) з наступними розмірами поперечного перерізу: $b_{f,в} = 30$ см; $b_{f,н} = 15$ см; $t_{f,в} = t_{f,н} = t_f$ =2,0 см; h_w=40 см; t_w =0,75 см; h=44 см. Границя текучості: σ_T=24,5 кН/см^2.

За виразами (84), (82), (3), (4), (5), (7) [10] знаходимо **граничні значення** величин y_0, $M_{\lim}$, що відповідають шарніру пластичності, а також величин y_1, J_z, $W_z^в$, $W_z^н$=$W_{\min}$, M_T (**ці вирази, а також наступні для усіх випадків, окрім випадку 3 а, – див. приклад 1**):

$$y_0 = \frac{30\cdot 2 - 15\cdot 2 + 0,75\cdot(44-2+2)}{2\cdot 0,75} = 42,0 \text{ см};$$

$$M_{\lim} = 24,5\cdot(15\cdot 2\cdot(42-\frac{2}{2}) + \frac{1}{2}\cdot 0,75\cdot(42-2)^2 +$$

$$+30\cdot 2\cdot(44-42-\frac{2}{2}) + \frac{1}{2}\cdot 0,75\cdot(44-42-2)^2) = 46305,0 \text{ кНсм};$$

$$y_1 = \frac{30\cdot 2\cdot(44-\frac{2}{2}) + 15\cdot 2\cdot\frac{2}{2} + 0,75\cdot 40\cdot(\frac{40}{2}+2)}{30\cdot 2 + 15\cdot 2 + 0,75\cdot 40} = 27,25 \text{ см};$$

$$J_z = \frac{30\cdot 2^3}{12} + 30\cdot 2\cdot(44-27,25-\frac{2}{2})^2 + \frac{15\cdot 2^3}{12} + 15\cdot 2\cdot(27,25-\frac{2}{2})^2 +$$

$$+\frac{0,75\cdot 40^3}{12} + 0,75\cdot 40\cdot(27,25-2-\frac{40}{2})^2 = 40412,5 \text{ см}^4;$$

$$W_z^в = \frac{40412,5}{(44-27,25)} = 2412,687 \text{ см}^3;\ W_z^н = W_{\min} = \frac{40412,5}{27,25} = 1483,027 \text{ см}^3;$$

$$M_T = \sigma_T\cdot W_{\min} = 24,5\cdot 1483,027 = 36334,172 \text{ кНсм}.$$

Також обчислюємо **граничні значення** величин:

$$W_{\lim} = \frac{M_{\lim}}{\sigma_T} = \frac{46305,0}{24,5} = 1890,0 \text{ см}^3;\ f_{\max} = \frac{W_{\lim}}{W_{\min}} = \frac{1890,0}{1483,027} = 1,274.$$

У процесі зростання згинального моменту M прослідкуємо, які випадки розвитку пластичних деформацій по поперечному перерізу мають місце для двотавру заданих розмірів .

<u>Випадок 1:</u> максимальні нормальні напруження у крайніх волокнах нижньої полиці досягли границі текучості $\sigma_{\max,p} = \sigma_T$ (рис. 1).

За аналогією до прикладу 1, за умови пружної роботи маємо: $y_0 = y_1 = 27,25$ см.

За умови: $\sigma_{\max,p} = \sigma_T$ за виразом (28) [10] обчислюємо:

$$M = M_T = 24,5/(3\cdot 27,25)\cdot\Big\{15\cdot 2\cdot(3\cdot 27,25^2 - 3\cdot 27,25\cdot 2 + 2^2) +$$
$$+\Big[(27,25-2)^3 + (44-27,25-2)^3\Big]\cdot 0,75 +$$
$$+30\cdot 2(3\cdot 44^2 - 6\cdot 44\cdot 27,25 - 3\cdot 44\cdot 2 + 3\cdot 27,25^2 + 3\cdot 27,25\cdot 2 + 2^2)\Big\} =$$
$$= 36334{,}172 \text{ кНсм}.$$

<u>Випадок 2:</u> пластичні деформації та відповідні їм напруження σ_T поширені на частині нижньої полиці; верхня полиця - у пружній стадії

Як і в попередніх прикладах, розмір c_1 (рис. 2) у **випадку 2** відповідно до (44) [10] змінюється у межах: $c_{1,\max} = y_0 \ge c_1 \ge c_{1,\min} = y_0 - t_{f,н}$. Оскільки умова (41) [10]: $c_{1,\max} = y_0$ приводить нас до рівності $M_{pl} = M_T$ (див. вирази (28) та (42) [10]) , тобто фактично до **випадку 1**, значення $c_{1,\max} = y_0$ обчислюємо з урахуванням, що для **випадку 1** отримано: $y_0 = y_1 = 27,25$ см: $c_{1,\max} = y_0 = 27{,}25$ см.

Розміру $c_{1,\min}$ відповідає взаємозв'язаний з ним розмір $y_0 = y_{0,\max}$, який обчислюємо за (46) [10]:

$$y_0 = y_{0,\max} = \frac{2\cdot 15\cdot 2^2 + 2\cdot 44\cdot 30\cdot 2 - 30\cdot 2^2 + (2^2 - 2^2 + 44^2 - 2\cdot 44\cdot 2)0,75}{2\cdot(30\cdot 2 + 15\cdot 2 + 40\cdot 0,75)} =$$
$$= 27,5 \text{ см}.$$

Тоді $c_{1,\min} = y_0 - t_{f,н} = 27,5 - 2 = 25,5$ см.

Таким чином, маємо межі зміни взаємопов'язаних величин:

$$y_{0,\min} = 27,25 \le y_0 \le y_{0,\max} = 27,5 \text{ см};$$

$$c_{1,\max} = 27,25 \ge c_1 \ge c_{1,\min} = 25,5 \text{ см}.$$

Задаючи можливі значення розміру c_1, із розв'язку квадратного рівняння (35) [10] знаходимо відповідний розмір y_0, а за виразом (40) [9] обчислюємо величину M_{pl}, і, відповідно, W_{pl}, f_{pl}.

Так, при $c_1 = c_{1,\max} = 27,25$ см (**межа випадків 2** і **1**) послідовно обчислюємо:

за (36) [9] − коефіцієнти квадратного рівняння (35):

$$A_1 = 15; \quad A_2 = -2\cdot(15\cdot 2 + 30\cdot 2 + 27,25\cdot 15 + 40\cdot 0,75) = -1057,5;$$

$$A_3 = 27,25^2\cdot 15 + 15\cdot 2^2 + 2\cdot 44\cdot 30\cdot 2 - 30\cdot 2^2 +$$
$$+(2^2 - 2^2 + 44^2 - 2\cdot 44\cdot 2)0,75 = 17678,438;$$

за (37) – його корені: $y_{0,1} = 43,25$ см; $y_{0,2} = 27,25$ см.

Перший корінь є стороннім, оскільки $y_{0,1} > y_{0,\max} = 27,5$ см. Таким чином, остаточно приймаємо для $c_1 = c_{1,\max} = 27,25$ см: $y_0 = y_{0,2} = 27,25$ см. Підставляємо ці значення в (40) [10]:

$$M_{pl} = 24,5/(3\cdot 27,25)\cdot\Big[3/2\cdot 27,25\cdot 15\cdot(27,25^2 - 27,25^2) +$$
$$+(27,25 - 27,25 + 2)\cdot 15(27,25^2 + 27,25\cdot 27,25 + 27,25^2 -$$
$$-2\cdot 27,25\cdot 2 - 2\cdot 27,25 + 2^2) + (27,25 - 2)^3\cdot 0,75 +$$
$$+(44 - 27,25 - 2)^3\cdot 0,75 + 30\cdot 2\cdot(3\cdot 44^2 - 6\cdot 44\cdot 27,25 -$$
$$-3\cdot 44\cdot 2 + 3\cdot 27,25^2 + 3\cdot 27,25\cdot 2 + 2^2)\Big] = 36334,172 \text{ кНсм}.$$

Тобто $M_{pl} = M_T$.

Тоді:

$$W_{pl} = \frac{M_{pl}}{\sigma_T} = \frac{36334,172}{24,5} = 1483,027 \text{ см}^3, \text{ тобто } W_{pl} = W_{\min};$$

$$f_{pl} = \frac{W_{pl}}{W_{\min}} = \frac{1483,027}{1483,027} = 1,0.$$

За виразом (29) [10] обчислюємо максимальні напруження у верхній полиці:

$$\sigma_{\max,c} = \sigma_T \cdot (h - y_0)/c_1 = 24,5 \cdot (44 - 27,25)/27,25 =$$

$$= 15{,}06\text{кН/см}^2 < \sigma_T = 24,5\text{кН/см}^2$$

– верхня полиця ще у пружній стадії.

Нехай $c_1 = c_{1,\min} = 25,5$ см (**друга межа** для **випадку 2**). За (36) обчислюємо коефіцієнти квадратного рівняння (35):

$$A_1 = 15; \quad A_2 = -2 \cdot (15 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 25,5 \cdot 15 + 40 \cdot 0,75) = -1005{,}0;$$

$$A_3 = 25,5^2 \cdot 15 + 15 \cdot 2^2 + 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 - 30 \cdot 2^2 +$$

$$+(2^2 - 2^2 + 44^2 - 2 \cdot 44 \cdot 2)0,75 = 16293{,}75;$$

за (37) – його корені: $y_{0,1} = 39{,}5$ см; $y_{0,2} = 27{,}5$ см.

Перший корінь є стороннім, оскільки $y_{0,1} > y_{0,\max} = 27,5$ см. Таким чином, остаточно приймаємо для $c_1 = c_{1,\min} = 25,5$ см: $y_0 = y_{0,2} = 27,5$ см. Підставляємо ці значення в (40):

$$M_{pl} = 24,5/(3 \cdot 25,5) \cdot \Big[3/2 \cdot 25,5 \cdot 15 \cdot (27,5^2 - 25,5^2) + (25,5 - 27,5 + 2) \cdot 15 \cdot$$

$$\cdot (25,5^2 + 25,5 \cdot 27,5 + 27,5^2 - 2 \cdot 27,5 \cdot 2 - 2 \cdot 25,5 + 2^2) +$$

$$+(27,5 - 2)^3 \cdot 0,75 + (44 - 27,5 - 2)^3 \cdot 0,75 + 30 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 44^2 -$$

$$-6 \cdot 44 \cdot 27,5 - 3 \cdot 44 \cdot 2 + 3 \cdot 27,5^2 + +3 \cdot 27,5 \cdot 2 + 2^2) \Big] = 38061{,}469 \text{ кНсм.}$$

Тоді:

$$W_{pl} = \frac{M_{pl}}{\sigma_T} = \frac{38061{,}469}{24,5} = 1553{,}529 \text{ см}^3; \; f_{pl} = \frac{W_{pl}}{W_{\min}} = \frac{1553{,}529}{1483{,}027} = 1,048 .$$

За виразом (29) обчислюємо максимальні напруження у верхній полиці:

$$\sigma_{\max,c} = \sigma_T \cdot (h - y_0)/c_1 = 24,5 \cdot (44 - 27,5)/25,5 =$$

$$= 15{,}853\text{кН/см}^2 < \sigma_T = 24,5\text{кН/см}^2.$$

Остання перевірка напружень $\sigma_{\max,c}$ свідчить про те, що на **другій межі випадку 2** пластичні деформації розвинулися по всій нижній полиці, а верхня полиця за пружними напруженнями має певний запас. Звідси **робимо висновок**, що при подальшому зростанні згинального моменту M_{pl} **наступним буде випадок 3**, коли пластика у нижній частині перерізу поширюється на стінку, а верхня полиця працює пружно (рис. 3). **Випадок 3 а** (рис. 7) для даного двотавру **виключається**.

<u>Випадок 3:</u> пластичні деформації у нижній полиці та нижній частині стінки (рис. 3).

Межі можливих значень розміру c_1 для **випадку 3** (рис. 3) відображені у (62) [10]:

$$c_{1,\max} = y_0 - t_{f,н} \geq c_1 \geq c_{1,\min} = h - y_0 .$$

Але, як уже зазначалося вище (див. випадок 2 даного прикладу), спочатку необхідно для кожного із граничних значень $c_{1,\max}$, $c_{1,\min}$ величини c_1 обчислити відповідні їм граничні значення розміру y_0 : $y_{0,\min}$ та $y_{0,\max}$.

Граничний розмір $y_{0,\min}$ знаходимо за виразом (63) [10]:

$$y_{0,\min} = \frac{(2\cdot 15 - 0,75)\cdot 2^2 + 2\cdot 44\cdot 30\cdot 2 - 30\cdot 2^2 + (44^2 + 2^2 - 2\cdot 44\cdot 2)0,75}{2\cdot(40\cdot 0,75 + 30\cdot 2 + 15\cdot 2)} =$$

$$= 27,5 \text{ см.}$$

Тоді за (182): $c_{1,\max} = 27,5 - 2 = 25,5$ см.

Як бачимо, граничні значення $y_{0,\min}$, $c_{1,\max}$ у **випадку 3** співпали з відповідними величинами $y_{0,\max}$, $c_{1,\min}$ для **випадку 2**. Граничний розмір $y_{0,\max}$ знаходимо із розв'язку квадратного рівняння (54) [10], коефіцієнти якого обчислюємо за (64):

$$A_1 = 4\cdot 0,75 = 3 ;$$

$$A_2 = -2\cdot(3\cdot 44\cdot 0,75 - 2\cdot 0,75 + 0,75\cdot 2 + 30\cdot 2 - 15\cdot 2) = -258,0 ;$$

$$A_3 = 2\cdot 44\cdot(30\cdot 2 - 15\cdot 2) - 30\cdot 2^2 +$$
$$+(2\cdot 44^2 + 2^2 + 2\cdot 44\cdot 2 - 2\cdot 44\cdot 2)\cdot 0,75 = 5427,0.$$

Корені рівняння (54) обчислюємо за (56): $y_{0,1} =$ 49,325 см; $y_{0,2} =$ 36,675 см.

Корінь $y_{0,1}$ є стороннім, оскільки $y_{0,1} > h$. Остаточно приймаємо:

$y_{0,\max} = y_{0,2} = 36,675$ см.

Тоді за (184): $c_{1,\min} = h - y_0 = 44 - 36,675 = 7,325$.

Таким чином, маємо наступні **межі** для зміни взаємопов'язаних величин:

$$y_{0,\min} = 27,5 \le y_0 \le y_{0,\max} = 36,675\,\text{см};$$

$$c_{1,\max} = 25,5 \ge c_1 \ge c_{1,\min} = 7,325\,\text{см}.$$

Задаючи можливі значення розміру c_1, із розв'язку квадратного рівняння (54) з урахуванням (55) знаходимо відповідний розмір y_0, а за виразом (58) обчислюємо величину M_{pl} і далі: W_{pl}, f_{pl}.

Так, при $c_1 = c_{1,\max} = 25,5$ см (межа **випадків 3** і **2**) послідовно обчислюємо:

за (55) – коефіцієнти квадратного рівняння (54):

$A_1 = 0,75$; $A_2 = -2 \cdot (0,75 \cdot 25,5 + 44 \cdot 0,75 - 2 \cdot 0,75 + 30 \cdot 2) = -221,25$;

$A_3 = 2 \cdot 0,75 \cdot 2 \cdot 25,5 - 2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 25,5 + 0,75 \cdot 25,5^2 + 44^2 \cdot 0,75 + 2^2 \cdot 0,75 -$
$-2 \cdot 44 \cdot 2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 - 30 \cdot 2^2 = 5517,188$;

за (56) – його корені: $y_{0,1} = 267,5$ см; $y_{0,2} = 27,5$ см. Корінь $y_{0,1}$ є стороннім, оскільки $y_{0,1} > h$.

Остаточно приймаємо: $y_0 = y_{0,\min} = y_{0,2} = 27,5$ см – співпало з граничним значенням $y_{0,\max}$ для **випадку 2**. Значення $c_1 = c_{1,\max} = 25,5$ см: $y_0 = y_{0,2} = 27,5$ см підставляємо в (58):

$$M_{pl} = 24,5 \cdot \Bigg[15 \cdot 2 \cdot (27,5 - \frac{2}{2}) + \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot ((27,5-2)^2 - 25,5^2) +$$

$$+\frac{1}{3} \cdot 0,75 \cdot 25,5^2 + \frac{1}{3 \cdot 25,5} \cdot (44 - 27,5 - 2)^3 \cdot 0,75 + \frac{1}{3 \cdot 25,5} \cdot 30 \cdot 2 \times$$

$$\times(3\cdot 44^2 - 6\cdot 44\cdot 27,5 - 3\cdot 44\cdot 2 + 3\cdot 27,5^2 + 3\cdot 27,5\cdot 2 + 2^2)\Big] =$$

$= 38061,469$ кНсм.

Тоді: $W_{pl} = \dfrac{M_{pl}}{\sigma_T} = \dfrac{38061,469}{24,5} = 1553,53$ см^3; $f_{pl} = \dfrac{W_{pl}}{W_{\min}} = \dfrac{1553,53}{1483,027} = 1,048$.

За виразом (53) обчислюємо максимальні напруження у верхній полиці:

$$\sigma_{\max,c} = \sigma_T \cdot (h - y_0)/c_1 = 24,5\cdot(44 - 27,5)/25,5 =$$

$$= 15,853 \text{кН/см}^2 < \sigma_T = 24,5 \text{кН/см}^2.$$

Як бачимо, усі величини співпали з аналогічними до **випадку 2** на його межі з **випадком 3**.

Нехай $c_1 = c_{1,\min} = 7,325$ см (**2-а межа** для **випадку 3**). Тоді за (55) – обчислюємо коефіцієнти квадратного рівняння (54):

$$A_1 = 0,75\,; \quad A_2 = -2\cdot(0,75\cdot 7,325 + 44\cdot 0,75 - 2\cdot 0,75 + 30\cdot 2) = \text{-}193,988\,;$$

$$A_3 = 2\cdot 0,75\cdot 2\cdot 7,325 - 2\cdot 15\cdot 2\cdot 7,325 + 0,75\cdot 7,325^2 + 44^2\cdot 0,75 + 2^2\cdot 0,75 -$$

$$-2\cdot 44\cdot 2\cdot 0,75 + 2\cdot 44\cdot 30\cdot 2 - 30\cdot 2^2 = 6105,717\,;$$

за (56) –його корені: $y_{0,1} = 221,975$ см; $y_{0,2} = 36,675$ см.

Корінь $y_{0,1}$ є стороннім, оскільки $y_{0,1} > h$.

Остаточно приймаємо: $y_0 = y_{0,\max} = y_{0,2} = 36,675$ см – співпало з граничним значенням $y_{0,\max}$, отриманим із розв'язку квадратного рівняння (54).

Значення $c_1 = c_{1,\min} = 7,325$ см: $y_0 = y_{0,2} = 36,675$ см підставляємо в (58):

$$M_{pl} = 24,5\cdot\Bigg[15\cdot 2\cdot(36,675 - \frac{2}{2}) + \frac{1}{2}\cdot 0,75\cdot((36,675-2)^2 - 7,325^2) +$$

$$+\frac{1}{3}\cdot 0,75\cdot 7,325^2 + \frac{1}{3\cdot 7,325}\cdot(44 - 36,675 - 2)^3\cdot 0,75 + \frac{1}{3\cdot 7,325}\cdot 30\cdot 2\times$$

$$\times(3\cdot 44^2-6\cdot 44\cdot 36{,}675-3\cdot 44\cdot 2+3\cdot 36{,}675^2+3\cdot 36{,}675\cdot 2+2^2)\Big]=$$

$=45324{,}879$ кНсм.

Тоді:

$$W_{pl}=\frac{M_{pl}}{\sigma_T}=\frac{45324{,}879}{24,5}=1849{,}995\ \text{см}^3;\quad f_{pl}=\frac{W_{pl}}{W_{\min}}=\frac{1849{,}995}{1483{,}027}=1,247\,.$$

За виразом (53) обчислюємо максимальні напруження у верхній полиці:

$$\sigma_{\max,c}=\sigma_T\cdot(h-y_0)/c_1=24,5\cdot(44-36,675)/7,325=24{,}5\text{кН/см}^2=\sigma_T\,.$$

Оскільки вони досягли границі текучості, то при подальшому зростанні згинального моменту $M_{pl}>45324{,}879$ кНсм **випадок 3** переходить у **випадок 4**.

<u>Випадок 4:</u> пластичні деформації у нижній полиці та нижній частині стінки, а також частково у верхній полиці.

Межі можливих значень розміру *c* для **випадку 4** (рис. 4) зазначені у (74) [10]:

$$c_{\max}=h-y_{0,\min}\geq c\geq c_{\min}=h-y_{0,\max}-t_{f,в}\,.$$

Для знаходження граничного розміру $c_{\max}$ із рішення квадратного рівняння (67) визначимо відповідний граничний розмір $y_{0,\min}$. Обчислюємо коефіцієнти рівняння (67) за виразами (75):

$$A_1=4\cdot 0,75=3\,;$$

$$A_2=-2\cdot(3\cdot 44\cdot 0,75-2\cdot 0,75+0,75\cdot 2+30\cdot 2-15\cdot 2)=-258,0\,;$$

$$A_3=-2\cdot 44(15\cdot 2-30\cdot 2)-2\cdot 44\cdot 0,75(2-2)+$$
$$+(2\cdot 44^2+2^2)0,75-30\cdot 2^2=5427{,}0.$$

Тоді за (69) маємо корені рівняння (67): $y_{0,1}=49{,}325$ см; $y_{0,2}=36{,}675$ см.

Корінь $y_{0,1}$ є стороннім, оскільки $y_{0,1}>h$. Остаточно приймаємо: $y_0=y_{0,\min}=y_{0,2}=36{,}675$ см.

За (74) обчислюємо відповідне граничне значення $c_{\max}$:

$$c_{\max} = h - y_{0,\min} = 44 - 36,675 = 7,325 .$$

Як бачимо, граничні значення $y_{0,\min}$, $c_{\max}$ співпали з відповідними граничними значеннями $y_{0,\max}$, $c_{1,\min}$, отриманими для **випадку 3 на межі випадків 4** та **3**.

Для знаходження граничного розміру $c_{\min}$ із рішення квадратного рівняння (67) визначимо відповідний граничний розмір $y_{0,\max}$. Обчислюємо коефіцієнти рівняння (67) за виразами (76):

$A_1 = 4 \cdot 0,75 = 3$;

$A_2 = -2 \cdot (3 \cdot 44 \cdot 0,75 - 3 \cdot 0,75 \cdot 2 + 0,75 \cdot 2 - 15 \cdot 2 + 30 \cdot 2) = -252,0$;

$A_3 = -2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 44 + 2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,75 \cdot 2 \cdot 44 - 2 \cdot 0,75 \cdot 2 \cdot 2 +$

$+2 \cdot 44^2 \cdot 0,75 - 2 \cdot 30 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 \cdot 0,75 - 4 \cdot 44 \cdot 2 \cdot 0,75 + 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 = 5292,0$.

За (69) маємо корені рівняння (67): $y_{0,1} = 42,0$ см; $y_{0,2} = 42,0$ см.

Корені рівні між собою: $y_{0,1} = y_{0,2} = y_{0,\max} = 42$ см.

За (74) обчислюємо відповідне граничне значення $c_{\min}$:

$$c_{\min} = h - y_{0,\max} - t_{f,в} = 44 - 42 - 2 = 0 .$$

Як видно із рис. 4, 5: $t_{f,н} + h_w = 2 + 40 = 42см = y_{0,\max}$, тобто нейтральна вісь у даному випадку знаходиться на межі між верхньою полицею та стінкою, а відповідне значення $c_{\min} = 0$ свідчить про те, що пружне ядро є відсутнім і у перерізі настає повне вичерпання несучої здатності з утворенням **пластичного шарніру**.

У підсумку маємо наступні **межі** для зміни взаємопов'язаних величин:

$$y_{0,\min} = 36,675 \le y_0 \le y_{0,\max} = 42,0 \text{ см та } c_{\max} = 7,325 \ge c \ge c_{\min} = 0 \text{ см.}$$

Задаючи можливі значення розміру *c*, із розв'язку квадратного рівняння (67) знаходимо відповідний розмір y_0, а за виразом (71) обчислюємо величину M_{pl} і далі W_{pl}, f_{pl}.

Так, при $c = c_{\max} = 7,325$ см (межа **випадків 4** і **3**) послідовно обчислюємо:

за (68) − коефіцієнти квадратного рівняння (67):

$A_1 = 30 - 0,75 = 29,25$;

$A_2 = 2 \cdot (0,75 \cdot 7,325 + 44 \cdot 0,75 - 2 \cdot 0,75 - 44 \cdot 30 + 30 \cdot 2 + 30 \cdot 7,325) = -2006,54$

$A_3 = 2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 7,325 - 2 \cdot 0,75 \cdot 2 \cdot 7,325 - 0,75 \cdot 7,325^2 - 44^2 \cdot 0,75 - 2^2 \cdot 0,75 +$

$+2 \cdot 44 \cdot 2 \cdot 0,75 + 30 \cdot 44^2 + 30 \cdot 2^2 - 2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 - 2 \cdot 30 \cdot 44 \cdot 7,325 +$

$+30 \cdot 7,325^2 = 34246,922$;

за (69) – його корені: $y_{0,1} = 36,675$ см; $y_{0,2} = 31,924$ см.

Корінь $y_{0,2}$ є стороннім, оскільки $y_{0,2} < y_{0,\min} = 36,675$ см. Остаточно приймаємо: $y_0 = y_{0,1} = y_{0,\min} = 36,675$ см.

Значення $c = c_{\max} = 7,325$ см, $y_0 = y_{0,1} = y_{0,\min} = 36,675$ см підставляємо у (71):

$$M_{pl} = 24,5 \cdot 15 \cdot 2 \cdot (36,675 - \frac{2}{2}) + 24,5 \cdot 0,75 \cdot (36,675 - 2 - 7,325) \cdot \frac{1}{2} \times$$

$$\times (36,675 - 2 + 7,325) + \frac{1}{2} \cdot 24,5 \cdot 0,75 \cdot 7,325 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7,325 +$$

$$+\frac{1}{2} \cdot 24,5 \cdot \frac{(44 - 36,675 - 2^2}{7,325} \cdot 0,75 \cdot \frac{2}{3} \cdot (44 - 36,675 - 2) +$$

$$+\frac{1}{2 \cdot 7,325} \cdot 24,5 \cdot 30 \cdot (7,325^2 - 44^2 - 36,675^2 - 2^2 + 2 \cdot 44 \cdot 36,675 + 2 \cdot 44 \cdot 2 -$$

$$-2 \cdot 2 \cdot 36,675) \cdot (2 \cdot 44^2 + 2 \cdot 36,675^2 + 2 \cdot 7,325^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 44 \cdot 7,325 -$$
$$-2 \cdot 36,675 \cdot 7,325 - 2 \cdot 2 \cdot 7,325 - 4 \cdot 44 \cdot 36,675 - 4 \cdot 44 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 36,675) \times$$

$$\times \frac{1}{3 \cdot (7,325 + 44 - 36,675 - 2)} + 24,5 \cdot 30 \cdot (44 - 36,675 - 7,325) \times$$

$$\times \frac{1}{2} \cdot (44 - 36,675 + 7,325) = 45324,879 \text{ кНсм.}$$

Тоді: $W_{pl} = \dfrac{M_{pl}}{\sigma_T} = \dfrac{45324,879}{24,5} = 1849,995$ см^3; $f_{pl} = \dfrac{W_{pl}}{W_{\min}} = \dfrac{1849,995}{1483,027} = 1,247$.

За виразом (53) обчислюємо напруження на межі верхньої полиці зі стінкою:

$$\sigma_{cm,c} = \sigma_T (h - y_0 - t_{f,в}) / c = 24,5(44 - 36,675 - 2) / 7,325 =$$

$$= 17,81 \text{ кН/см}^2 < \sigma_T .$$

Нехай $c = c_{\min} = 0$ (друга межа **випадку 4**). Тоді, аналогічно до попереднього, послідовно обчислюємо: за (68) − коефіцієнти квадратного рівняння (67):

$$A_1 = 30 - 0,75 = 29,25 ;$$

$$A_2 = 2 \cdot (0,75 \cdot 0 + 44 \cdot 0,75 - 2 \cdot 0,75 - 44 \cdot 30 + 30 \cdot 2 + 30 \cdot 0) = -2457,0 ;$$

$$A_3 = 2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0,75 \cdot 2 \cdot 0 - 0,75 \cdot 0^2 - 44^2 \cdot 0,75 - 2^2 \cdot 0,75 +$$

$$+2 \cdot 44 \cdot 2 \cdot 0,75 + 30 \cdot 44^2 + 30 \cdot 2^2 -$$

$$-2 \cdot 44 \cdot 30 \cdot 2 - 2 \cdot 30 \cdot 44 \cdot 0 + 30 \cdot 0^2 = 51597,0;$$

за (69) – його корені:

$y_{0,1} = 42,0$ см; $y_{0,2} = 42,0$ см. $y_{0,1} = y_{0,2} = y_{0,\max} = 42$ см.

Для контролю за (73) обчислюємо відповідне граничне значення $c_{\min}$:

$$c_{\min} = h - y_{0,\max} - t_{f,в} = 44 - 42 - 2 = 0 .$$

Також за (81) [10]: маємо: $y_0 = h - t_{f,в} = 44 - 2 = 42 см = y_{0,\max}$.

Оскільки за умови (77) маємо $M_{pl} = M_{\lim}$, де $M_{\lim} = 46305,0$ кНсм – уже обчислено за виразом (82), то на цьому розрахунок даного прикладу закінчується.

Як бачимо, у даному прикладі **випадок 5** не реалізується.

Більш повно результати обчислень прикладу 3 наведені в табл. 3.

Таблиця 3

Результати обчислень прикладу 3

c_1 / c, см	M_T, кНсм	M_{pl}, кНсм	$M_{\lim}$, кНсм	$W_{z,\min}$, см^3	W_{pl}, см^3	$W_{\lim}$, см3	f_{pl}
Випадок 1							
- / -	36334,17	36334,17	46305,0	1483,03	1483,03	1890,0	**1,0**
Випадок 2							
27,25/-	36334,17	**36334,17**	46305,0	1483,03	1483,03	1890,0	**1,0**
26,375/ -	36334,17	**37337,59**	46305,0	1483,03	1525,62	1890,0	**1,029**
25,5/-	36334,17	**38061,47**	46305,0	1483,03	1553,53	1890,0	**1,048**
Випадок 3							
-/**25,5**	36334,17	**38061,47**	46305,0	1483,03	1553,53	1890,0	**1,048**
-/20,96	36334,17	**40193,13**	46305,0	1483,03	1640,54	1890,0	**1,106**
-/16,413	36334,17	**42165,18**	46305,0	1483,03	1721,03	1890,0	**1,16**
-/11,869	36334,17	**43907,08**	46305,0	1483,03	1792,13	1890,0	**1,208**
-/7,325	36334,17	**45324,88**	46305,0	1483,03	1850,0	1890,0	**1,247**
Випадок 4							
-/7,325	36334,17	**45324,88**	46305,0	1483,03	1850,0	1890,0	**1,247**
-/3,663	36334,17	**46059,86**	46305,0	1483,03	1880,0	1890,0	**1,268**
- /**0,0**	36334,17	**46305,00**	46305,0	1483,03	1890,0	1890,0	**1,274**

Висновки

1. У роботі [10] було встановлено, що в процесі розвитку пружно-пластичних деформацій у балках із **несиметричних двотаврів** при роботі останніх до повного вичерпання несучої здатності можливі **6 випадків**, які у залежності від співвідношення розмірів перерізів несиметричних двотаврів можуть реалізовуватися у наступних послідовностях: 1-ий, 2-ий, 3-ій, 4-ий та 5-ий випадки; 1-ий, 2-ий, 3 а, 4-ий та 5-ий випадки; 1-ий, 2-ий, 3-ій, 4-ий випадки.

2. В даній роботі на числових прикладах − 1-му, 2-му та 3-му − ці послідовності реалізовані. В кожному із прикладів вибудовано алгоритм його рішення, а також вказано на особливості його застосування.

3. Аналітичні залежності, що пов’язують між собою висоту пружного ядра зі значенням згинального моменту, необхідні для обчислення прогинів пружно-пластичних балок із несиметричних двотаврів, а також для визначення областей поширення пластичних деформацій по висоті поперечних перерізів.

Література

[1] Сталеві конструкції. Норми проектування, виготовлення і монтажу : ДБН В.2.6-198:2014. – Вид. офіц. – К. : Мінрегіонбуд України, 2014. – 199 с. – (Державні будівельні норми України).

[2] Клименко Ф. Є. Металеві конструкції : підр. для вузів / Ф. Є. Клименко, В. М. Барабаш. − Львів : Видавництво «Світ», 1994. − 278 с.

[3] Металлические конструкции. Общий курс : учеб. для вузов / [Г. С. Веденников, Е. И. Беленя, В. С. Игнатьева и др. ; под ред. Г. С. Веденникова; 7 изд., перераб. и доп.] – М. : Стройиздат, 1998. – 760 с.

[4] Металлические конструкции. В 3т. Т.1. Элементы конструкций : учеб. для строит. вузов / [В. В. Горев, Б. Ю. Уваров, В. В. Филиппов и др. ; под ред. В. В. Горева ; 2-е изд., перераб. и доп.] – М. : Высш. шк., 2001. – 551 с.

[5] Нілов О. О. Металеві конструкції. Загальний курс : підручник для вищих навчальних закладів / [Нілов О. О., Пермяков В. О., Шимановський О. В. та ін. ; видання 2-е, перероблене і доповнене ; під заг. ред.. О. О. Нілова та О.В. Шимановського]. − К. : Видавництво «Сталь», 2010. − 869 с.

[6] Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов / А. Р. Ржаницын. − М. : Стройвоенмориздат, 1049. − 235 с.

[7] Мразик А. Расчет и проектирование стальных конструкций с учетом пластических деформаций / А. Мразик, М. Шкалоуд, М. Тохачек ; пер. с чеш. В. П. Поддубного ; под ред. Г. Е. Бельского. − М. : Стройиздат, 1986. − 456 с.

[8] Перетятько Ю. Г. Пружно-пластична робота двотаврових балок / Ю. Г. Перетятько, І. Ю. Перетятько // Науковий вісник будівництва. – Харків : ХДТУБА, 2011. − Вип. 62. − С. 107−112.

[9] Перетятько Ю. Г. Деформації пружно-пластичних двотаврових балок Перетятько Ю. Г., Рюмін В. В., Перетятько І. Ю. // Современные строительные конструкции из металла и древесины / Сборник научных трудов. – Одесса : ОГАСА, 2011. − № 15, Ч. 3. − С. 178−183.

[10] Перетятько Ю. Г. Залежність висоти пружного ядра від значення згинального моменту для несиметричного двотавру / Ю. Г. Перетятько, І. Ю. Ляшенко // Збірник наукових праць Українського інституту сталевих конструкцій ім. В.М. Шимановського. − 2015. − Вип. 15. − С. 71−102.

[11] Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М. : Высшая школа, 1968. − 512 с.

[12] Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 544 с.

[13] Теребушко О. И. Основы теории упругости и пластичности / О. И. Теребушко. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 320 с.

Надійшла до редколегії 29.11.2016 р.