

УДК 625.527 : 539.375

Дійсна робота гнучких пружно-пластичних ниток

Шимановський О. В., чл.-кор. НАНУ, д-р техн. наук

Український інститут сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського, Україна

Анотація. Викладається загальна теорія розрахунку і дійсна робота гнучких пружно-пластичних ниток, які є несучими елементами висячих систем. Відзначено, що ця теорія базується практично на тих самих припущеннях, що і теорія розрахунку ниток при роботі матеріалу в межах пружності, за винятком додаткової передумови в частині ідеалізації реальної залежності між напруженнями і деформаціями внаслідок важкості застосування останньої при безпосередньому розрахунку конструкцій. Тому ця залежність замінюється певною моделлю у вигляді аналітичної кривої або, як прийнято говорити в даному випадку, діаграмою, що будується за будь-яким простим математичним законом, що відображає умови роботи елемента і характеристики його матеріалу. Зазначено, що частіше за інших на практиці використовуються чотири основні моделі роботи матеріалу: пружно-пластична, пружно-пластична з лінійним зміцненням, жорстко-пластична і жорстко-пластична з лінійним зміцненням. Послідовно розглянуто поведінку гнучких ниток з використанням двох ідеалізованих діаграм «напруження-деформація» матеріалу нитки: пружно-пластичної і пружно-пластичної з лінійним зміцненням. Встановлено умови появи пластичних деформацій у всіх стадіях роботи поперечного перерізу гнучкої нитки. Представлені співвідношення для геометрично і фізично нелінійної задачі гнучкої нитки при активному навантаженні. Викладена методика і визначені граничні величини діючих на гнучку нитку навантажень. Наведено рівняння, що визначають параметри напружено-деформованого стану нитки у всіх фазах деформування, а також умови зміни фаз роботи нитки.

Ключові слова: гнучкі нитки, пружність, пластичність, зміцнення, розрахунок, активне навантаження.

1. Вихідні допущення

Відомо, що теорія деформування пластичних гнучких ниток базується практично на тих самих припущеннях, що і теорія розрахунку ниток при роботі матеріалу в межах пружності. Єдина додаткова передумова пов'язана з ідеалізацією діаграми «напруження-деформація» реальних матеріалів, яка насправді виявляється досить складною для безпосереднього застосування при розрахунку конструкцій. Тому в теорії пластичності така ідеалізація зводиться не тільки до відмови від врахування притаманних пластичному деформуванню специфічних ефектів (повзучості, післядії і гістерезису), але і до її максимальної схематизації. Саме тому реальна залежність між напруженнями і деформаціями замінюється певною аналітичною кривою, що будується за будь-яким простим математичним законом, який відображає умови роботи елемента і характеристики його матеріалу. Зрідка застосовуються полігональна, параболічна та інші ступеневі апроксимації [1–8]. У більшості ж випадків цю діаграму приймають у вигляді ламаної лінії з

двома ділянками, один з яких відповідає пружній, а інший – пластичній стадіям роботи матеріалу. Розвиваючи викладене, необхідно вказати ще й на те, що частіше за інші на практиці використовуються чотири основні моделі роботи матеріалу: пружно-пластична, пружно-пластична з лінійним зміцненням, жорстко-пластична і жорстко-пластична з лінійним зміцненням (рис. 1).

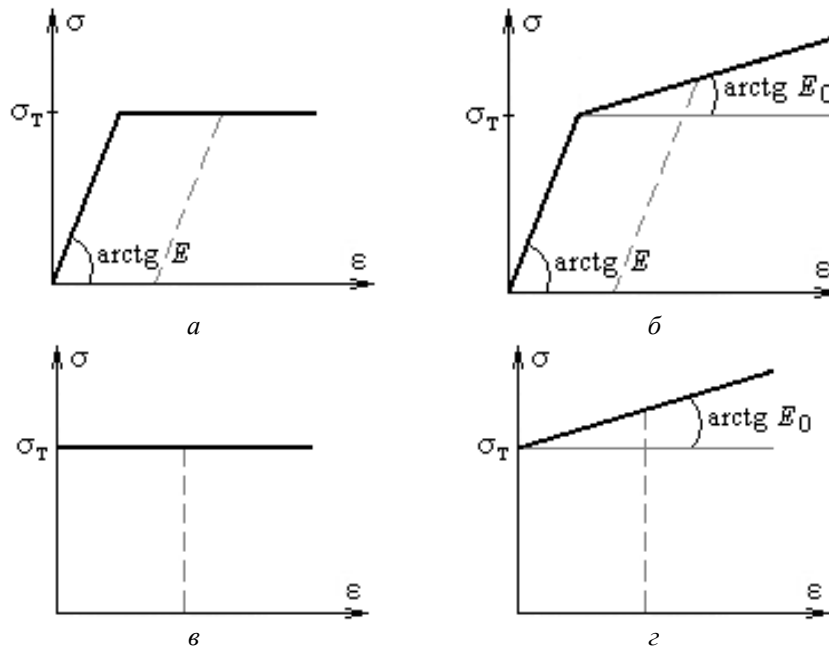


Рис. 1. Іdealізовані діаграми «напруження-деформація» матеріалу:
а – пружно-пластичного; б – те саме, з лінійним зміцненням;
в – жорстко-пластичного; з – те саме, з лінійним зміцненням

Зі згаданих моделей найбільш широкого застосування набула модель іdealного пружно-пластичного матеріалу (матеріалу Прандтля), діаграма роботи якого зображена на рис. 1, а. Подібна апроксимація в цілому цілком задовільно відображає роботу багатьох реальних матеріалів і дозволяє більш повно порівняно з пружною стадією роботи проаналізувати поведінку і виявити додаткові резерви міцності конструкції.

Наступний етап з уточнення теорії природним чином пов'язаний з урахуванням зміцнення матеріалу. Цілком зрозуміло, що хоча нехтування зміцненням обумовлює безпечну помилку і йде в резерв міцності, то для деяких матеріалів ця помилка виявляється дуже істотною і призводить до створення в конструкції значного неврахованого (а нерідко і небажаного) запасу міцності. А розрахункове обґрунтування зміцнення проводиться шляхом відповідного підбору діаграми роботи матеріалу. Можна, наприклад,

сформувати діаграму, що складається з двох похилих прямих, перша з яких відповідає пружній ділянці роботи матеріалу, а інша, зазвичай має менший нахил, – пластичній (рис. 1, б). В даному контексті звернемо увагу на такий вельми показовий аспект, що незначне, на перший погляд, змінення діаграми викликає радикальну перебудову теорії в частині ускладнення її розрахункових залежностей.

Тепер варто підкреслити, що всі попередні міркування мали відношення до апроксимації кривих «напруження-деформація» з урахуванням умов активного навантаження або, перефразовуючи іншими словами, коли діюче на конструкцію навантаження безперервно зростає. Проте, при зменшенні навантаження поведінка матеріалу, який зазнав пластичних деформацій, описується законом, що кардинально відрізняється від закону навантаження, а саме: при розвантаженні матеріал поводить себе подібно до пружного тіла. В цьому випадку криву його (матеріалу) деформування прийнято екстраполювати похилій прямій, паралельній до ділянки діаграми розтягування. Таке лінійне розвантаження триває до того моменту, поки напруження не досягне границі текучості протилежного знаку, після чого знову починається пластична текучість. Більш того, внаслідок відмінності законів навантаження і розвантаження після припинення дії сили конструкція не повертається в початковий стан, оскільки в ній з'являються деякі залишкові деформації. Відзначимо, що поведінка матеріалу при розвантаженні показана пунктирними лініями на рис. 1.

2. Робота поперечного перерізу нитки з ідеального пружно-пластичного матеріалу

Розглянемо напружено-деформований стан довільного поперечного перерізу пружно-пластичної нитки (рис. 2, а). І перш за все встановимо вид залежності між поточним значенням розпору в нитці та його граничною величиною, що свідчить про настання в поперечному перерізі граничного стану. З цією метою запроєктуємо елементарні сили, що діють у площині перерізу нитки (епюра розподілу яких зображена на рис. 2, б) на горизонтальну вісь $z-z$:

$$\int_F \sigma dF = H, \quad (1)$$

де σ – нормальне напруження; F – площа перерізу нитки; H – розпір.

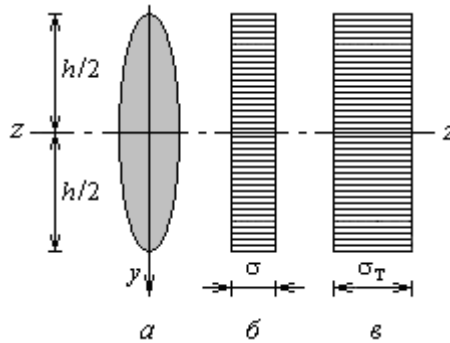


Рис. 2. Робота поперечного перерізу гнучкої пружно-пластичної нитки:
a – поперечний переріз нитки; *б* – еюра напружень у пружній стадії роботи;
в – еюра напружень в граничному стані

Нормальне напруження σ , яке входить до виразу (1), є функцією відносного подовження ε , вид якого встановлюється відповідно до прийнятої діаграми розтягу матеріалу. В даному випадку ідеального пружно-пластичного матеріалу (рис. 1, *a*) для першої – пружної ділянки діаграми, цю функцію можна представити у вигляді:

$$\sigma = E\varepsilon_0 \text{ при } \sigma < \sigma_T, \quad (2)$$

де прийнято, що E – модуль пружності; ε_0 – відносне подовження осі нитки; σ_T – напруження текучості.

Якщо діючий в гнучкій нитці розпір не викликає напружень текучості, то поперечний переріз працює в пружній стадії (рис. 2, *б*). Тоді, підставляючи умову (2) в рівняння рівноваги (1), дійдемо виразу, що визначає відносне подовження осі нитки в цій стадії роботи:

$$\frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{H}{H_{\text{пр}}}, \quad (3)$$

в якому параметр $H_{\text{пр}} = \sigma_T F$ є граничним розпором нитки.

Повертаючись до постановки задачі, відзначимо, що пружна стадія роботи перерізу закінчиться, коли розпір в нитці H досягне свого граничного значення $H_{\text{пр}}$, а напруження досягнуть границі текучості σ_T . Після чого відповідно до прийнятої діаграми розтягу матеріалу їх величина зростати вже не буде (рис. 2, *в*).

Умову появи пластичних деформацій можна встановити за допомогою рівняння рівноваги (1), якщо прирівняти в ньому величину нормального напруження до значення напруження текучості $\sigma = \sigma_T$. Маємо:

$$\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0. \quad (4)$$

Звернемо увагу, що отримане рішення (4) в прикладному відношенні має два принципові аспекти, фізичний зміст яких розкриває сутність роботи гнучкої пружно-пластичної нитки. По-перше, поява в поперечному перерізі гнучкої нитки пластичних деформацій означає виникнення в ньому граничного стану. І друге, найголовніше, – реалізація граничного стану в будь-якому довільному поперечному перерізі гнучкої пружно-пластичної нитки призводить до поширення пластичних деформацій по всій її довжині. Звідси, в свою чергу, випливає, що процес деформування нитки здійснюється в наступній послідовності: при $\sigma < \sigma_T$ всі поперечні перерізи нитки працюють в пружній стадії, а при $\sigma = \sigma_T$ всі вони переходять у граничний стан.

3. Основні залежності розрахунку ниток з ідеального пружно-пластичного матеріалу

Скористаємося отриманими в попередньому параграфі результатами для побудови рівнянь теорії деформування гнучких пружно-пластичних ниток (рис. 3, а). Зрозуміло, що перша фаза деформування гнучкої пружно-пластичної нитки є пружною. Відповідна цій фазі епюра напружень представлена на рис. 3, б. Нагадаємо, що при роботі нитки в цій фазі значення параметрів її напружено-деформованого стану аналогічні до відповідних параметрів гнучкої пружної нитки.

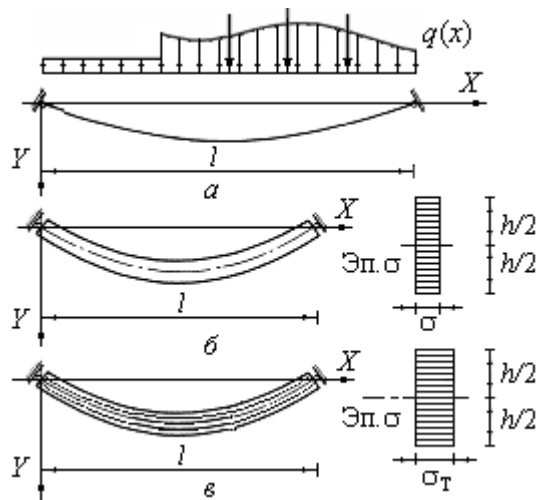
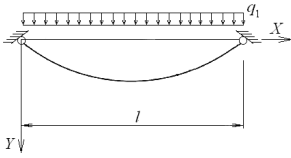
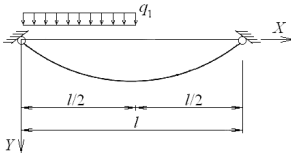
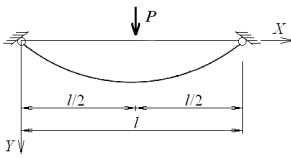


Рис. 3. Схема роботи пружно-пластичної гнучкої нитки:
 а – розрахункова схема нитки; б – пружна фаза роботи;
 в – пластична фаза роботи

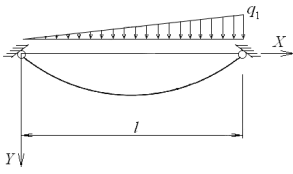
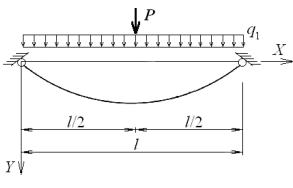
Легко переконатися в тому, що пружна фаза роботи закінчується, коли з ростом навантаження, яке діє у нитці, розпір H досягає свого граничного значення $H_{\text{пр}}$. Тоді в поперечних перерізах нитки, по-перше, задовольняється умова (4) і, по-друге, пластичні деформації поширюються по всій довжині нитки (рис. 3, в), реалізуючи таким чином у ній граничний стан. Говорячи іншими словами, умова закінчення першої (пружної) фази роботи нитки одночасно є умовою початку і закінчення другої – пластичної фази її роботи, оскільки пластичні деформації охоплюють всю нитку. Таким чином, розрахунок гнучкої нитки, яка має ідеальну пружно-пластичну діаграму розтягу матеріалу, дозволяє знайти тільки величину її граничного навантаження. Причому для цього можна скористатися відомим рішенням для гнучких ниток [9], прийнявши в ньому $H = H_{\text{пр}}$.

Відповідні розрахункові залежності, що характеризують умову закінчення першої і початку другої фази роботи, а також визначають величину граничного навантаження гнучкої пружно-пластичної нитки, для деяких найбільш поширених типів навантажень наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Схема навантаження	Вид залежності для умови закінчення першої і початку другої фази роботи гнучкої пружно-пластичної нитки	Величина граничного навантаження гнучкої пружно-пластичної нитки
	$\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0$	$q_{1, \text{пр}} = \left[\frac{24m^3}{\omega l^2} \times \left(H_{\text{пр}}^3 + \frac{8\omega}{3n^2 m^3} H_{\text{пр}}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$
	$\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0$	$q_{1, \text{пр}} = \left[\frac{384m^3}{5\omega l^2} \times \left(H_{\text{пр}}^3 + \frac{8\omega}{3n^2 m^3} H_{\text{пр}}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$
	$\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0$	$P_{\text{пр}} = \left[\frac{8m^3}{\omega} \times \left(H_{\text{пр}}^3 + \frac{8\omega}{3n^2 m^3} H_{\text{пр}}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$

Кінець таблиці 1

Схема навантаження	Вид залежності для умови закінчення першої і початку другої фази роботи гнучкої пружно-пластичної нитки	Величина граничного навантаження гнучкої пружно-пластичної нитки
	$\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0$	$q_{1,\text{пр}} = \left[\frac{90m^3}{\omega l^2} \times \left(H_{\text{пр}}^3 + \frac{8\omega}{3n^2 m^3} H_{\text{пр}}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$
	$\frac{H}{H_{\text{пр}}} - 1 = 0$	$P_{\text{пр}} = \left[\frac{8m^3}{\omega} \times \left(H_{\text{пр}}^3 + \frac{8\omega}{3n^2 m^3} H_{\text{пр}}^2 \right) - \frac{q_1^2 l^2}{12} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{q_1 l}{2}$
<p><i>Примітка.</i> У таблиці прийнято, що в разі дії початкового та додаткового навантажень різного типу величина граничного навантаження наведена для додаткового навантаження.</p>		

4. Гнучкі нитки з ідеального пружно-пластичного матеріалу зі зміцненням

Урахування зміцнення в задачах пластичного деформування дозволяє не тільки прийняти до уваги особливості дійсного характеру роботи матеріалу, а й одночасно дає можливість виявити не враховані раніше запаси міцності конструкції. У цілій низці практичних випадків розрахунку ці запаси можуть бути досить великі, тому таке уточнення діаграми σ – ε приводить до більш достовірних рішень у порівнянні з тими, які виходять при використанні ідеальної пружно-пластичної діаграми розтягу.

Доповнимо сказане ще двома важливими зауваженнями, перше з яких стосується загальної постановки задачі. І суть його така: робота гнучких ниток зі зміцнюваного матеріалу може бути розглянута з використанням припущень і передумов, прийнятих при вивченні роботи ідеально пластичних

ниток. А ось друге зауваження має відношення до загальної послідовності побудови шуканого рішення. Виявляється, що ця послідовність для ниток зі зміцнюваного матеріалу практично не відрізняється від аналогічних завдань для пружно-пластичних ниток. Однак рішення, як правило, виходить більш складним. Тому розглянемо тут найпростішу, після ідеально-пластичної, апроксимацію діаграми роботи матеріалу, а саме: прийmemo матеріал таким, що зміцнюється лінійно (рис. 1, б).

5. Робота поперечного перерізу нитки з ідеального пружно-пластичного матеріалу зі зміцненням

Розглянемо роботу поперечного перерізу гнучкої нитки, вважаючи матеріал пружно-пластичним з лінійним зміцненням. З цією метою звернемося до складеної раніше умови рівноваги (1) і на її основі проаналізуємо роботу довільного поперечного перерізу гнучкої нитки (рис. 4, а). Беручи до уваги обрану модель матеріалу, згадаємо, що напруження σ і деформація ε , які входять у рівняння (1), у пружній і пружно-пластичній зі зміцненням стадіях роботи взаємопов'язані умовою, наведеною в книзі [2]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon && \text{при } \sigma \leq \sigma_T, \\ \sigma &= \sigma_T \left(1 - \frac{E_0}{E}\right) + E_0\varepsilon && \text{при } \sigma \geq \sigma_T, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

де E_0 – модуль зміцнення матеріалу.

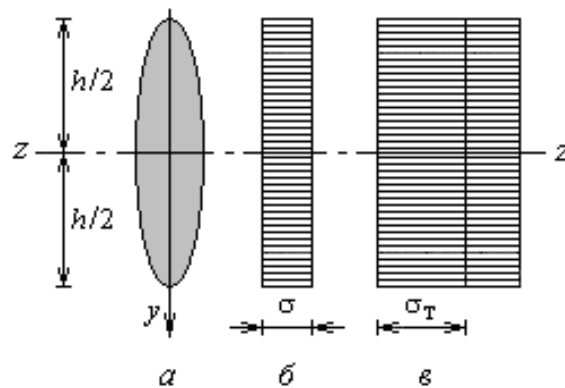


Рис. 4. Робота поперечного перерізу гнучкої нитки з пружно-пластичного матеріалу з лінійним зміцненням:

a – поперечний переріз нитки; *б* – епюра напружень в пружній стадії роботи;
в – епюра напружень у пластичній стадії роботи

Звісно, що в такому випадку необхідно розглянути дві стадії роботи перерізу: першу – пружну і другу – пластичну. Зауважимо, що робота поперечного перерізу нитки в першій стадії буде однаковою незалежно від властивостей матеріалу в пластичній зоні, і була розглянута раніше в монографії [9]. І тому тут тільки нагадаємо, що вираз, що характеризує умову закінчення пружної стадії роботи поперечного перерізу, має вигляд (4).

Перейдемо тепер до розгляду другої стадії роботи поперечного перерізу нитки, коли весь переріз охоплений пластичними деформаціями (рис. 4, в). Підставляючи умову (5) у рівняння рівноваги (1), визначимо представлення для відносного подовження осі нитки ε_0 в другій стадії роботи в наступному вигляді:

$$\frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{E}{E_0} \left(\frac{H}{H_{пр}} - 1 \right) + 1 . \quad (6)$$

Отже, рішення (6) завершує розгляд всіх можливих стадій роботи поперечного перерізу гнучкої нитки з пружно-пластичного матеріалу з лінійним зміцненням внаслідок отримання залежностей, що пов'язують діючий в нитці розпір із відносним подовженням її осі.

6. Виведення розрахункових залежностей нитки з ідеального пружно-пластичного матеріалу зі зміцненням

Спираючись на отримані в попередньому розділі результати, встановимо вид розрахункових залежностей уточненої теорії деформування пружно-пластичних гнучких ниток з лінійним зміцненням матеріалу. Припустимо, що гнучка нитка з поперечним перерізом F , а також модулями пружності E і лінійного зміцнення E_0 навантажена довільним вертикальним навантаженням $q(x)$ і перебуває в стані рівноваги (рис. 5, а). Прийmemo як незалежну змінну жорсткість нитки на розтяг в пружній $\omega = EF$ і в пластичній $\omega_0 = E_0F$ фазах роботи, а як шукану функцію прийmemo величину розпору H .

Поведінка гнучкої нитки в першій фазі деформування (рис. 5, б), коли всі її поперечні перерізи працюють в пружній стадії, детально розглянуто в монографії [9]. Тому тут на цьому зупинятися не будемо, а тільки нагадаємо, що пружна фаза роботи нитки закінчується, коли задовольняється умова (4) і величина розпору досягає своєї граничної величини.

Після досягнення зовнішнім навантаженням значення, що визначається рівністю (4), починається друга – пластична фаза деформування, коли вся нитка охоплюється пластичними деформаціями (рис. 5, в). Визначимо розрахункові залежності під час роботи гнучкої нитки в цій фазі деформування. І з цією метою звернемося до принципу можливих переміщень.

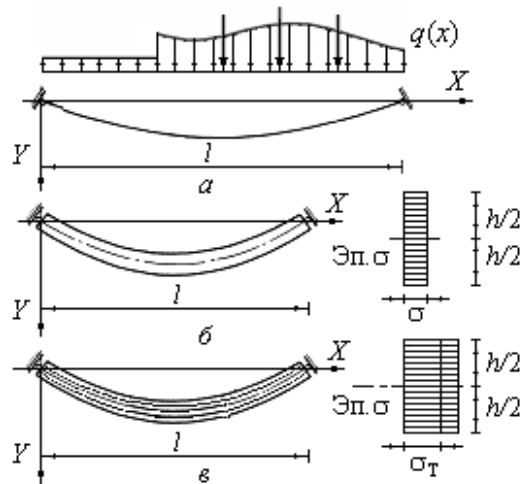


Рис. 5. Деформування гнучкої нитки з пружно-пластичного матеріалу з лінійним зміцненням:

a – розрахункова схема нитки; *б* – пружна фаза роботи;
в – пластична фаза роботи з лінійним зміцненням матеріалу

Відповідно до цього принципу мислимо, що жорсткість ω_0 отримала дуже мале, але скінченне прирощення своєї величини, що дорівнює $\delta\omega_0$. Тоді розпір H отримає деяке збільшення δH , а нитка переміститься зі свого положення рівноваги на величину $\delta y(x)$. При цьому співвідношення, що визначають вигнуту вісь нитки $y(x)$, переміщення нитки $\delta y(x)$ і роботу зовнішніх сил U_1 , а, точніше кажучи, навантаження $q(x)$ на переміщеннях $\delta y(x)$, як і раніше будуть мати вигляд :

$$y = \frac{M^6}{H}; \quad (7)$$

$$\delta y = \frac{M^6}{H + \delta H} - \frac{M^6}{H} = -\frac{M^6 \delta H}{H(H + \delta H)}; \quad (8)$$

$$U_1 = -\int_0^l \frac{q(x) M^6 \delta H}{H(H + \delta H)} dx = -\frac{D \delta H}{H(H + \delta H)}. \quad (9)$$

Зауважимо, що оскільки ці вирази отримані з використанням тільки умов рівноваги, то вони, зрозуміло, є справедливими при будь-якій діаграмі σ - ϵ .

Визначимо тепер роботу внутрішніх сил. У другій фазі роботи нитки подовження її нескінченно малого елемента ds можна сформулювати так:

$$\delta ds = \left(\frac{T + \delta T - T_{\text{np}}}{\omega_0 + \delta\omega_0} - \frac{T - T_{\text{np}}}{\omega_0} \right) ds = \frac{\omega_0 \delta T - T \delta\omega_0 + T_{\text{np}} \delta\omega_0}{\omega_0 (\omega_0 + \delta\omega_0)} ds. \quad (10)$$

Тут прийнято, що T – поздовжнє зусилля в нитці, T – прирощення величини цього зусилля, а T_{np} – граничне поздовжнє зусилля в нитці.

Елементарна робота внутрішніх сил визначиться як добуток зі зворотним знаком подовження δds на величину діючого в елементі зусилля, що дорівнює $T + \delta T$, а повна робота – як інтеграл цього добутку, поширений на всю довжину нитки L :

$$U_2 = - \int_0^L \frac{(\omega_0 \delta T - T \delta\omega_0 + T_{\text{np}} \delta\omega_0)(T + \delta T - T_{\text{np}})}{\omega_0 (\omega_0 + \delta\omega_0)} ds. \quad (11)$$

З геометричних міркувань легко зрозуміти, що T , T_{np} , δT та ds виражаються через їхні проєкції на горизонтальну вісь X наступним чином:

$$T = \frac{H}{\cos \alpha}, \quad T_{\text{np}} = \frac{H_{\text{np}}}{\cos \alpha}, \quad \delta T = \frac{\delta H}{\cos \alpha} \quad \text{и} \quad ds = \frac{dx}{\cos \alpha}, \quad (12)$$

де α – кут нахилу дотичної до нитки по відношенню до горизонту.

Тепер маємо можливість виписати повний вираз для роботи внутрішніх сил:

$$U_2 = - \frac{(\omega_0 \delta T - T \delta\omega_0 + T_{\text{np}} \delta\omega_0)(T + \delta T - T_{\text{np}})}{\omega_0 (\omega_0 + \delta\omega_0)} \int_0^l \frac{dx}{\cos^3 \alpha}. \quad (13)$$

Значення інтеграла в останній рівності для пологих ниток з достатнім ступенем точності можна прийняти таким, що дорівнює lm^3 , де $1/m$ – середнє значення $\cos \alpha$, що дорівнює l/L . Тоді вираз для роботи внутрішніх сил остаточно можна представити так:

$$U_2 = - \frac{(\omega_0 \delta H - H \delta\omega_0 + H_{\text{np}} \delta\omega_0)(H + \delta H - H_{\text{np}}) lm^3}{\omega_0 (\omega_0 + \delta\omega_0)}. \quad (14)$$

Звернемося тепер до принципу можливих переміщень, згідно з яким сума значень роботи всіх зовнішніх і внутрішніх сил на нескінченно малих можливих переміщеннях системи з положення рівноваги дорівнює нулю. Тоді послідовно підставляючи (9) і (14) в умову $U_1 + U_2 = 0$, переходячи потім до межі при $\delta\omega_0 \rightarrow 0$ и $\delta H \rightarrow 0$, після деяких перетворень прийдемо до наступної диференціальної залежності між величинами розпору і жорсткості нитки:

$$\frac{d\omega_0}{dH} - \frac{\omega_0}{H - H_{\text{np}}} - \frac{D\omega_0^2}{lm^3 H^2 (H - H_{\text{np}})^2} = 0. \quad (15)$$

Отримана залежність є одним з окремих випадків диференціального рівняння Бернуллі, загальний інтеграл якого має вигляд:

$$\frac{1}{\omega_0} = \frac{C}{H - H_{\text{пр}}} + \frac{D \left[H \ln H - H \ln (H - H_{\text{пр}}) - H_{\text{пр}} \right]}{l m^3 H H_{\text{пр}}^2 (H - H_{\text{пр}})}. \quad (16)$$

Значення довільної сталої інтегрування C можна знайти, якщо врахувати, що у випадку, коли модуль лінійного зміцнення E_0 дорівнює модулю пружності E (що призводить також до рівності жорсткостей ω_0 і ω), тобто коли гнучка нитка є пружною, величина розпору H_1 може бути визначена з відомого рівняння [9]:

$$H^3 + \frac{8\omega}{3 n^2 m^3} H^2 = \frac{D\omega}{2 l m^3}. \quad (17)$$

Підставляючи потім значення константи C у вираз (16), дійдемо шуканого рішення, що описує роботу пружно-пластичних гнучких ниток з лінійним зміцненням матеріалу:

$$\frac{H - H_{\text{пр}}}{\omega_0} - \frac{H_1 - H_{\text{пр}}}{\omega} = \frac{D}{l m^3 H_{\text{пр}}^2} \left[\frac{H \ln H - H \ln (H - H_{\text{пр}}) - H_{\text{пр}}}{H} - \frac{H_1 \ln H_1 - H_1 \ln (H_1 - H_{\text{пр}}) - H_{\text{пр}}}{H_1} \right], \quad (18)$$

причому величина m обчислюється тут без урахування пружних і пластичних деформацій нитки, тобто за її вихідною геометрією.

Таким чином, повністю визначено поведінку пружно-пластичної гнучкої нитки з лінійним зміцненням матеріалу і встановлено залежності для знаходження параметрів напружено-деформованого стану нитки у всіх фазах її роботи.

7. Дослідження роботи нитки з ідеального пружно-пластичного матеріалу зі зміцненням

Продемонструємо тепер застосування пропонованої методики розрахунку на прикладі гнучкої нитки з ідеального пружно-пластичного матеріалу з лінійним зміцненням прогоном $l = 60$ м з початковою стрілою провисання $f_0 = 4$ м, що відповідає 1/15 прогону, завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням на всьому прогоні. Нитка прийнята круглого поперечного перерізу, площа якого становить $F = 1,2 \cdot 10^{-3}$ м². Модуль пружності при роботі матеріалу в пружній стадії дорівнює $E = 1,67 \cdot 10^5$ МПа, а величина модуля лінійного зміцнення E_0 при роботі матеріалу за границею пружності

варіювалася в межах від 1/10 до 1/40 модуля пружності. Границя текучості матеріалу прийнята такою, що дорівнює $\sigma_T = 335$ МПа.

Визначимо поведінку зміцнюваної пружно-пластичної гнучкої нитки під навантаженням. Для цього за допомогою наведених вище визначальних виразів і розрахункових залежностей обчислені наведені значення переміщень в середині прогону нитки і розпору в ній при різних відношеннях модулів зміцнення і пружності E_0/E для ряду значень безрозмірного параметра інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження $ql^2/M_{пр}$ ($M_{пр} = \sigma_T Fd/2$, де d – діаметр поперечного перерізу нитки), які зазначені в таблицях 2 і 3, а їх графіки відображені на рис. 6.

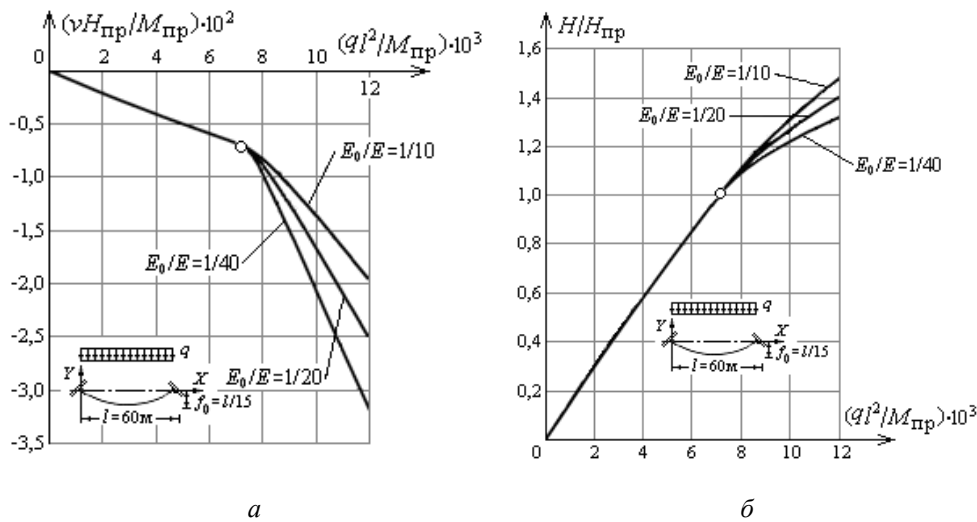


Рис. 6. Залежність між переміщеннями (а) і розпором (б) пружно-пластичної гнучкої нитки в середині прогону від інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження:
○ – зміна фаз роботи нитки

Таблиця 2

$\frac{ql^2}{M_{пр}} \cdot 10^3$	0			2			4			6			7,09*	8			10			12				
$\frac{E_0}{E}$	1/10	1/20	1/40	1/10	1/20	1/40	1/10	1/20	1/40	1/10	1/20	1/40	1/10	1/20	1/40	1/10	1/20	1/40	1/10	1/20	1/40	1/10	1/20	1/40
$\frac{v_{yn} H_{пр}}{M_{пр}}$	0			-21,0			-40,6			-59,0			-68,4	-82,9	-88,7	-97,0	-136,2	-167,0	-206,3	-196,7	-252,2	-318,5		

Примітка. Величина граничного навантаження позначена зірочкою.

Таблиця 3

$\frac{q l^2}{M_{np}} \cdot 10^3$	0			2			4			6			7,09*			8			10			12		
$\frac{E_0}{E}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
$\frac{H_{zn}}{H_{np}}$	0			0,298			0,582			0,855			1,0			1,110	1,103	1,092	1,310	1,269	1,221	1,478	1,401	1,320

Примітка. Величина граничного навантаження позначена зірочкою.

Як впливає з аналізу отриманих результатів і зіставлення кривих на рис. 6, а після переходу нитки в пластичну зі зміцненням фазу роботи її переміщення починають різко зростати по кривій, обрис якої близький до гіперболічного виду. При цьому що менше модуль лінійного зміцнення матеріалу E_0 , то швидше збільшуються переміщення. Необхідно також відзначити, що зі збільшенням величини навантаження криві переміщень, що відповідні пластичній зі зміцненням фазі роботи нитки, дедалі більше зближуються. Причому при подальшому збільшенні навантаження прирощення переміщень зменшується.

З рис. 6, б видно, що до моменту виникнення пластичних деформацій в гнучкій нитці залежність розпору від інтенсивності діючого навантаження близька до лінійної. Коли ж розпір H досягає свого граничного значення H_{np} і нитка стає повністю пластичною, відбувається злам кривих і розпір в нитці зі збільшенням величини навантаження починає зростати за параболічною залежністю. При цьому, що менше значення модуля зміцнення матеріалу E_0 , то повільніше збільшується розпір в нитці і більш пологою є відповідна крива.

Література

- [1] Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М. : Высш. шк., 1968. – 512 с.
- [2] Беленький Л. М. Расчет судовых конструкций в пластической стадии / Л. М. Беленький. – Л. : Судостроение, 1983. – 448 с.
- [3] Гудьер Дж. Н. Упругость и пластичность / Дж. Н. Гудьер, Ф.Г. Ходж. – М. : ИЛ, 1960. – 190 с.
- [4] Ильюшин А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин. – М.-Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
- [5] Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Гостехиздат, 1956. – 324 с.
- [6] Койтер В. Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред / В. Т. Койтер. – М. : ИЛ, 1961. – 79 с.

- [7] Прагер В. Проблемы теории пластичности / В. Прагер – М. : Физматгиз, 1958. – 136 с.
- [8] Соколовский В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.
- [9] Механика висячих систем / Шимановский А.В, Шалинский В.В., Чабан Н.А. ; под общ. ред. Шимановского А.В. – [3-е изд. перераб. и доп.] – К.: Сталь, 2013. – 541 с.

Действительная работа гибких упруго-пластических нитей

Шимановский А. В., чл.-кор. НАНУ, д-р техн. наук

Украинский институт стальных конструкций имени В.Н. Шимановского, Украина

Аннотация. Излагается общая теория расчета и действительная работа гибких упруго-пластических нитей, являющихся несущими элементами висячих систем. Отмечено, что эта теория базируется практически на тех же допущениях, что и теория расчета нитей при работе материала в пределах упругости, за исключением дополнительной предпосылки в части идеализации реальной зависимости между напряжениями и деформациями в силу затруднительности применения последней при непосредственном расчете конструкций. Поэтому эта зависимость заменяется некоей моделью в виде аналитической кривой или, как принято говорить в данном случае, диаграммой, строящейся по какому-либо простому математическому закону, отражающему условия работы элемента и характеристики его материала. Указано, что чаще других на практике используются четыре основные модели работы материала: упруго-пластическая, упруго-пластическая с линейным упрочнением, жестко-пластическая и жестко-пластическая с линейным упрочнением. Последовательно рассмотрено поведение гибких нитей с использованием двух идеализированных диаграмм «напряжение–деформация» материала нити: упругопластической и упругопластической с линейным упрочнением. Установлены условия появления пластических деформаций во всех стадиях работы поперечного сечения гибкой нити. Представлены соотношения для геометрически и физически нелинейной задачи гибкой нити при активном нагружении. Изложена методика и определены предельные величины действующих на гибкую нить нагрузок. Приведены уравнения, определяющие параметры напряженно-деформированного состояния нити во всех фазах деформирования, а также условия смены фаз работы нити.

Ключевые слова: гибкие нити, упругость, пластичность, укрепления, расчет, активная нагрузка

Actual elastic-plastic behavior of cables

O. Shimanovsky, A.M. of NASU, Dr. Sc. (Eng.),

V. Shimanovsky Ukrainian Institute of Steel Construction, Ukraine

Abstract. General calculation theory and actual elastic-plastic behavior of cables – bearing elements of suspender structural systems are outlined. It is mentioned that this theory is based almost on the same assumptions as the theory of cable calculation at behavior of material within elastic range, excluding additional supposition in the part of idealization of real dependence between stresses and deformations on account of difficulties with using

the latter in actual structures design. For that reason, this dependence is replaced with a model in the form of analytic curve or, as it is accepted to say in this case, a diagram, which is built according to some simple mathematic rule, reflecting element behaving conditions and characteristics of its material. It is stated that four main models of behavior of material are used in practice: elastic-plastic, elastic-plastic with linear hardening, rigid-plastic and rigid-plastic with linear hardening. The behavior of cables is sequentially examined using two idealized stress-strain diagrams of cable material: elastic-plastic and elastic-plastic with linear hardening. Conditions of occurrence of plastic deformations in all behavior stages of cable cross section are determined. Interrelations for geometrically and physically non-linear task of the cable at active loading are provided. Methods are given and limit values of loads acting on the cable are determined. Equations defining parameters of cable deflected mode in all deformation phases and conditions of changing phases of behavior of the cable are given.

Keywords: cables, elasticity, plasticity, strengthening, calculation, active load.

Надійшла до редакції 28.12.2017 р.