УДК 629.021

Канд. техн. наук Мілянич А. Р.

ОПТИМІЗАЦІЯ СКЛАДОВИХ ЗАСОБІВ ТРАНСПОРТУ ПРИ ЇХ ПРОЕКТУВАННІ

Ключові слова: *оптимізація, засоби транспорту, критерій, інтеграл, функція.*

Вступ

При оптимальному проектуванні виробів критерій оптимізації виражає математичний компроміс між їх характеристиками, вартістю, довговічністю та відповідністю обмежень. Корисний метод зведення цих вхідних параметрів у єдиний вираз дають множники Лагранжа. Якщо не враховувати розрахунки сталих величин, то задача максимізації характеристики при заданій вартості у більшості випадків співпадає із задачею мінімізації вартості при заданій характеристиці. Тому тут є придатним критерій у формі лінійної суми. Варіаційний метод Ейлера-Лагранжа [10], який має основні формули варіаційного числення, за допомогою яких визначаються стаціонарні точки та екстремуми функціоналів, і пов’язаний із даним методом ізопериметричний розв’язок є логічним поширенням такого підходу до систем із розподіленими параметрами. Однак і тут критерій оптимізації представляє собою лінійну суму.

Метод Ейлера-Лагранжа не дає безпосередньої можливості оперувати із критеріями у вигляді добутків вхідних параметрів. Можливо, однак, показати, згідно досліджень Брауна [8], що для кожного критерію у формі лінійної суми існує критерій оптимізації у формі добутку, який приводить до тієї ж самої екстремальної функції.

Мета

Створити методологію, яка дозволить при розробці технічної документації на виготовлення, як деталей конструкцій засобів залізничного транспорту, так і товарів народного господарства на вагоноремонтних підприємствах України проводити попередній загальний аналіз конструктивних особливостей замовленого виробу з метою встановлення оптимальності його робочих характеристик, вартості, витрат металу та надійності конструкції [1,4,5,6,7]. У наведених роботах використаний той факт, що для кожного критерію у формі лінійної суми існує еквівалентний критерій у формі добутку, який дає той же самий розв’язок.

Методика

Запропонований метод одержання необхідної форми критерію оптимізації, а саме: виключення змінної сталої величини (константи), яка змінюється при зміні обмеження; поділ незалежних розв’язків (наприклад, при виборі матеріалу та форми).

Викладення основного матеріалу

Розглянемо задачу із багатьма входами і виходом, які описуються розподільними параметрами [2,9]. Якщо застосовувати критерій у вигляді суми

$$N_S = a\int_{x_1}^{x_2} f_1\left(x, y, y'\right) dx + b\int_{x_1}^{x_2} f_2\left(x, y, y'\right) dx + \ldots = \int_{x_1}^{x_2} f\left(x, y, y'\right) dx , \quad (1)$$

де $f = a \cdot f_1 + b \cdot f_2 + \ldots$; a, b – сталі величини.

Тоді екстремізуюча функція $y = y(x)$ задовольняє диференційне рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 . \quad (2)$$

Якщо ж застосовувати критерій у вигляді добутку

$$N_P = \left[\int_{x_1}^{x_2} f_1\left(x, y, y'\right) dx \right]^a \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{x_1}^{x_2} f_2\left(x, y, y'\right) dx \right]^b \cdot \quad , \qquad (3)$$

$$\cdot \left[\int_{x_1}^{x_2} f_3\left(x, y, y'\right) dx \right]^c \dots$$

то екстремізуюча функція повинна задовольняти рівняння [8]:

$$aF_2F_3 \dots \left[\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y'} \right) \right] +$$
$$+ bF_1F_3 \dots \left[\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f_2}{\partial y'} \right) \right] + \quad , \qquad (4)$$
$$+ cF_1F_2 \dots \left[\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y'} \right) \right] + \dots = 0$$

де *a, b, c, …* - сталі величини.

У залежності (3) вирази $F_i = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x, y, y')dx$ розглядаються як сталі, оскільки рівняння (4) фіксує $y = y(x)$.

Практична значимість. Результати роботи можуть використовуватися при розробці технічної документації на виготовлення як окремих деталей конструкцій засобів залізничного транспорту, так і товарів народного господарства на вагоноремонтних підприємствах України, шляхом проведення попереднього загального аналізу замовленого виробу з метою встановлення оптимальності робочих характеристик, вартості, витрат металу та надійності конструкції, що розробляється.

Застосовування та корисність наведених критеріїв можуть бути продемонстровані на кількох прикладах.

Циліндрична посудина. Задача, яка доволі часто зустрічається при розрахунках деталей, що мають форму циліндричної посудини (рис. 1), має два вхідних параметра, а розв'язок цієї задачі виражається зосередженими параметрами.

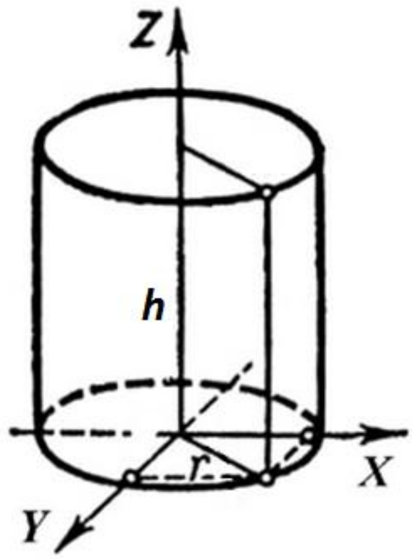

Рис. 1 – Циліндрична посудина

Нехай необхідно спроектувати відкриту зверху циліндричну посудину. Площа поверхні посудини, або витратний на виготовлення матеріал, повинні бути мінімальними при заданому об'ємі. Потрібно встановити розміри *r* (радіус) та *h* (висоту).

Ми маємо стандартну задачу методу множників Лагранжа:

$$A = \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h, \qquad (5)$$

$$V = \pi \cdot r^2 h, \qquad (6)$$

$$N = A + \lambda \cdot V = \pi \cdot r^2 + $$
$$+ 2\pi \cdot r \cdot h + \lambda\pi \cdot r^2 h \quad . \qquad (7)$$

Задаючи значення для *V* (обмеження), із рівняння

$$\frac{\ddot{a}N}{\ddot{a}h} = 0; \qquad \frac{\ddot{a}N}{\ddot{a}r} = 0, \qquad (8)$$

отримуємо $r = h$. Якщо повинен бути максимальний об'єм при заданій площі поверхні, то рівняння та результати будуть такими ж самими (за винятком, що λ буде входити множником при A). Дану задачу можна сформулювати і більш загальним чином: «Оптимізувати розміри циліндричної посудини по відношенню до вхідних параметрів A і V». Рівняння (7) перетворюється в критерій у формі лінійної суми із однією сталою (константою), яка визначається виходячи або із обмежень, або із міркувань відносної важливості вхідних параметрів, або на основі різних умов. У будь-якому випадку $\lambda = -\frac{2}{r}$ вимірюється в залежності від умов (обмежень).

Можливим є також і інший критерій у вигляді суми [3]:

$$N = A + \frac{\lambda}{V} = \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h + \frac{\lambda}{\pi \cdot r^2 \cdot h}, \qquad (9)$$

який дає аналогічні результати для r та h. Той факт, що використовується належна кількість сталих величин, а саме на одиницю менше числа вхідних параметрів, є більш важливішим, ніж то, як ці вхідні параметри об'єднуються в критерій оптимізації.

Розглянемо критерій у вигляді добутку, в якому стала величина входить як показник степені:

$$N = AV^{\lambda} = \left(\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h\right) \cdot \left(\pi \cdot r^2 h\right)^{\lambda}. \qquad (10)$$

Екстремізуючи цей вираз за допомогою рівнянь (8), отримуємо $r = h$ та $\lambda = -2/3$.

Припускаємо, що для поглиблення економічної ефективності та розширення сфери кооперативних взаємозв'язків вагоноремонтне підприємство отримало замовлення на виготовлення напівзакритих циліндричних посудин трьох різних розмірів, застосовуючи при розробці технологічної документації наведені вище методи математичної оптимізмції, при обмеженнях $V = \pi$, 8π та 16π всі три критерії дають $r = h = 1, 2, 2 \cdot \sqrt[3]{2}$ відповідно.

Однак λ = -2, -1, - $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$,

при $N = A + \lambda V$ та

$\lambda = 2\pi^2, 64\pi^2, 128\pi^2 \cdot \sqrt[3]{2^2}$,

при $N = A + \frac{\lambda}{V}$.

Оскільки для перших двох критеріїв λ змінюється із зміною V, то із зміною об'єму змінюються і самі критерії. З іншого боку, критерій у формі добутку завжди буде рівним

$$N = \frac{A}{\sqrt[3]{V^2}}, \qquad (11)$$

незалежно від обмежень. У ряді випадків більш доцільним є застосування критерію, який залишається незмінним при зміні обмежень.

Консольна балка. Розглянемо суцільну консольну балку із зосередженим навантаженням P на її кінці (рис. 2).

Необхідно визначити $r = r(x)$, де r – радіус кругового поперечного перерізу балки, а x – відстань від вільного кінця.

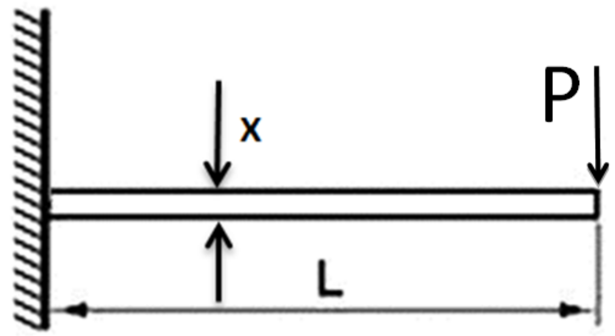

Рис. 2 - Балка консольна

В якості обмеження (або граничних умов) приймаємо, що радіус перерізу біля стінки є рівним R. Форма може бути оптимізована відносно таких вхідних параметрів, як маса W та прогин на кінці балки δ. Нехай довжина балки рівна L. Тоді

$$W = \pi \cdot w \int_0^L r^2 dx\,; \tag{12}$$

$$\delta = \frac{4P}{\pi \cdot E} \int_0^L \frac{x^2 dx}{r^4}\,, \tag{13}$$

де E – модуль пружності; w – густина.

Необхідно встановити форму консольної балки, мінімізуючи її масу та прогин. Приймаємо критерій мінімізації у вигляді добутку [4]:

$$N = \delta \cdot W^{\lambda} = \left(\frac{4P}{\pi \cdot E} \int_0^L \frac{x^2}{r^4} dx \right) \cdot \left(\pi \cdot w \int_0^L r^2 dx \right)^{\lambda}. \tag{14}$$

Множення довільного критерію оптимізації на сталу величину не впливає на екстремізуючу функцію, тому множником $4\pi^{(\lambda-1)}P$ можна знехтувати. Вираз який залишився розкладається на два множника – один, який залежить лише від матеріалу, а інший залежить лише від форми:

$$N_1 = \frac{w^{\lambda}}{E}\,; \tag{15}$$

$$N_2 = \int_0^L \frac{x^2}{r^4} dx \left(\int_0^L r^2 dx \right)^{\lambda}. \tag{16}$$

Таке розділення поставленої задачі на дві частини виявляється доволі зручним. Критерій у вигляді лінійної суми такі можливості не надає.

Оскільки у даній задачі є два вхідні параметри, для встановлення однієї довільної сталої потрібне лише одне обмеження. Якщо ж скористатися рівнянням (4), то у нього, очевидно, входять дві константи, оскільки можна показати, що відношення інтегралів є довільним. Тому можна визначити таке значення λ, при якому екстремізуюча функція є відмінною від нуля або нескінченності (тим самим буде забезпечена відповідність результатам, які отримані внаслідок використовування критерію у вигляді суми).

Якщо r є рівним нулю або нескінченності при всіх значеннях x, то його можна розглядати як постійне, і рівняння (16) матиме наступний вигляд:

$$N_2 = \frac{r^{2\lambda}}{r^4} \int_0^L x^2 dx \cdot \int_0^L dx = Kr^{(2\lambda-1)}. \tag{17}$$

Далі, якщо r є рівним нулю, то N_2 є мінімальним при всіх величинах $\lambda > 2$. Якщо ж r прагне до нескінченності, , то N_2 є мінімальним при всіх величинах $\lambda < 2$. Таким чином, єдине значення показника, при якому можлива відмінність від нуля можлива для розв'язку $r = r(x)$, якщо $\lambda = 2$.

Застосовуючи рівняння (4) до виразу

$$N_2 = \int_0^L \frac{x^2}{r^4} dx \left(\int_0^L r^2 dx \right)^2 \tag{18}$$

та вводячи умову, що $r = R$ при $x = L$, одержуємо:

$$r = R \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{L}}\,. \tag{19}$$

Такий же результат був би одержаний за допомогою критерію у вигляді лінійної суми, але тоді рівняння (15) (оптимізація матеріалу) було б втрачене.

Консольна балка, яка коливається. Результати двох попередніх прикладів дозволяють розглянути набагато складнішу задачу. Нехай маємо порожнинну консольну балку, поперечний переріз якої являє собою концентровані кільця із сталим зовнішнім радіусом R і змінним внутрішнім радіусом $r_i = r_i(x)$. Як і у попередній задачі (рис.2), x – відстань вздовж осі від вільного кінця, L – довжина, P – зосереджене зусилля, прикладене на кінці балки. Але P не проходить через центр ваги перерізу і створює обертовий момент M.

Вхідні параметри задачі – маса W, поперечний переріз на кінці балки δ_t та кут кручення на кінці δ_r - повинні бути мінімізовані, а основні частоти поперечних (w_t) і крутильних (w_r) коливань слід мінімізувати.

Математична модель, або функціональні представлення вхідних параметрів, мають наступний вигляд:

$$W = w \cdot \pi \int_0^L \left(R^2 - r_i^2\right) dx; \qquad (20)$$

$$\delta_t = \frac{4P}{\pi \cdot E} \int_0^L \frac{x^2}{R^4 - r_i^4} dx; \qquad (21)$$

$$\delta_r = \frac{2M}{\pi \cdot G} \int_0^L \frac{dx}{R^4 - r_i^4}; \qquad (22)$$

$$w_t^2 = \frac{gE\int_0^L \left(R^4 - r_i^4\right)\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 dx}{4w\int_0^L \left(R^2 - r_i^2\right) y^2 dx}; \qquad (23)$$

$$w_r^2 = \frac{g \cdot G\int_0^L \left(R^4 - r_i^4\right)\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx}{w\int_0^L \left(R^4 - r_i^4\right)\phi^2 dx}, \qquad (24)$$

де у першому наближенні

$$y = y_0 \left(1 - \frac{3}{2}\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{L^3}\right);$$

$$\phi = \phi_0 \left(1 - \frac{3}{2}\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{L^3}\right),$$

y_0 – поперечний прогин кінцевого перерізу по основній власній формі;

ϕ_0 - кут повороту кінцевого перерізу по основній власній формі.

Якщо для об’єднання наведених вище п’яти вхідних параметрів у математичний вираз скористатися критерієм у вигляді лінійної суми, то цей вираз буде складатися із суми та відношень визначних інтегралів:

$$N_S = W + a\delta_t + b\delta_r + c\ w_t + d\ w_r. \qquad (25)$$

Рівняння (2) у даному випадку є неприйнятливим, оскільки воно є властивим лише для сум і різниць визначних інтегралів. Рівняння (4) є придатним лише для добутків і відношень визначних інтегралів, тому для рішення даної задачі є теж непридатним.

Якщо математична модель має лише добутки та не має сум і різниць визначних інтегралів, то слід скористатись критерієм у вигляді добутку. Дану задачу можна тоді розглядати як потребу

мінімізувати $N_p = \dfrac{\delta_t^a \cdot \delta_r^b \cdot W^e}{w_t^c \cdot w_r^d}$. (26)

Значення одного із показників степені можна прийняти рівним одиниці. Обмеження $e < a + b$ забезпечує отримання розв’язку, який відрізняється від $r_i = 0$ або $r_i = R$. Решта показників степені повинні бути визначеними із додаткових обмежень, із міркувань відносної вагомості вхідних параметрів або із граничних умов.

Буде доволі доречним розглянути наступний метод розрахунку оптимізації. Конструктор вибирає наведені показники виходячи із власної оцінки вагомості вхідних параметрів і вже потім змінює їх, якщо не виконуються необхідні певні обмеження.

Якщо припустити, що $a = b = e = 1$ та $c = d = 2$, то використання рівняння (4) приведе до доволі складного многочлена 10-ої степені від r_i, коефіцієнтами якого слугуватимуть добутки та відношення визначних інтегралів, які залежать від r_i. Це рівняння можна порівняно легко розв'язати за допомогою відомих програм, розроблених для персональних ЕОМ, застосовуючи повторні підстановки.

Для вирішення завдання задану консольну балку умовно поділяємо на 64 дільниці (8 перерізів наведено у табл. 1). Далі, зміни показників степені для забезпечення прийнятих обмежень виконуються доволі не складно.

Наприклад, якщо при прогині поворот виявляється занадто великим, показники a і b можна представити рівним 3. Порівнювальні результати розрахунків наведені у табл. 2

Таблиця 1

$\frac{x}{L,:8}$	$N_P = \frac{\delta_i \delta_r W}{w_t^2 w_r^2}$	$N_P = \frac{\delta_t^3 \delta_r^3 W}{w_t^2 w_r^2}$
	$\frac{r_i}{R}$	$\frac{r_i}{R}$
0	0,978	0,871
1	0,968	0,827
2	0,951	0,739
3	0,912	0,596
4	0,817	0,447
5	0,656	0,334
6	0,543	0,286
7	0,491	0,253
8	0,448	0,228

Таблиця 2

Параметр	$N_P = \frac{\delta_i \delta_r W}{w_t^2 w_r^2}$	$N_P = \frac{\delta_t^3 \delta_r^3 W}{w_t^2 w_r^2}$
$\frac{\delta_t}{\frac{4PL^3}{\pi \cdot ER^4}}$	0,465	0,345
$\frac{\delta_r}{\frac{2TL}{\pi \cdot GR^4}}$	3,33	1,30
$\frac{w_t}{\sqrt{\frac{ER}{4wL^2}}}$	9,80	5,68
$\frac{w_r}{\sqrt{\frac{G}{w \cdot L}}}$	2,94	2,49

Слід зауважити, що ні в одному із наведених прикладів математична модель не має похідної від незалежної змінної. Запропонований авторами метод може бути придатним, наприклад, для балки із мінімальною площиною поверхні, хоча отримані диференційні рівняння є доволі складними.

Висновок

При проектуванні і розробці технічної документації на виготовлення як деталей конструкцій засобів залізничного транспорту, так і товарів народного господарства на вагоноремонтних підприємствах України необхідно проводити попередній загальний аналіз конструкції замовленого виробу з метою встановлення його оптимальних робочих характеристик, вартості, витрат металу та надійності конструкції. У наведеній роботі використаний той факт, що для кожного критерію оптимізації у формі лінійної суми існує еквівалентний критерій у формі добутку, який дає той же самий розв'язок. Автором запропонований метод одержання належної форми цього критерію та вказані деякі переваги його використання. Ці переваги демонструються на трьох прикладах, у яких наведений новий підхід для пошуку функцій, що дають екстремум добутку визначних інтегралів.

Література

1. Методика оптимального проектирования строительных конструкций / Э.В.. Литвинова // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 11 (53) Часть 4. – С. 81–83.

2. Немировський, А. С. Сложность задач и ефективность методов оптимизации / А. С. Немировський, Д. Б. Юдин. – Москва : Наука, 1979. – 383 с.

3. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде. Количественный подход. – М.: Физматлит, 2002. – 144 с.

4. Фомін О. В. Огляд досліджень з проблем проектування несучих систем вантажних вагонів / О. В. Фомін // Вісн. НТУ «ХПІ». – 2012. – № 68(974). – С. 3–7.

5. Чугунов М.В., Осыка В.В.Анализ и проектирование несущих элементов конструкций подвижного состава // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 9. С. 216–226.

6.Шилов Г.Е. Интеграл, мера и производная./ Г.Е. Шилов, Б.Л. Гуревич. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

7. Antipin D. Research of dynamic load capacity of tipper car using mathematical model method / D. Antipin, T. Motyanko, D. Rasin // Intern. Conf. on Mechanical Engineering, Automation and Control Systems (MEACS). 1-4 Dec. 2015.

8. Brown Max L. «Optimized Form Synthesis of Machine Parts With Respect to Such Variables as Performances, Cost, Life and Conformity to Constraints». PhD dissertation, Walter Starkey. The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1988.

9. Siddall, J. N. Probabilistic Engineering Design: Principles and Applications / J. N. Siddall – New York : Marcel Dekker, Inc. – 1993. – 544 p.

10. Weinstock R., Calculus of Variations. McGraw-Hill, New York, 1982.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

Мілянич Андрій Романович,
канд. техн. наук, доцент кафедри «Рухомий склад і колія» Львівської філії Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна.
Вул. І. Блажкевич, 12а, Львів, Україна, 79052.
Тел. + 38 067 747 46 46.
E-mail: milyan_74@ukr.net.
ORCID 0000-0003-3583-792X.