

ОПТИМАЛЬНЫЕ УОЛША И УОЛШЕ-ПОДОБНЫЕ БАЗИСЫ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Анатолий Белецкий

В теории и практике помехоустойчивого кодирования и сжатия аудио и видео данных, криптографической защиты информации, в сотовых каналах связи и в других областях науки и техники широкое применение находят функционально полные системы Уолша, являющиеся частным случаем систем знакопеременных кусочно-постоянных секвентных функций. Применительно к задачам спектрального анализа дискретных сигналов двоично-степенного порядка (объёма выборки) наибольший интерес представляют те системы Уолша, используемые в качестве базисов дискретного преобразования Фурье (ДПФ), которые доставляют линейную связанность частотным шкалам процессоров ДПФ (и потому являются оптимальными), под которыми понимаются шкала нормированных частот входного сигнала и выходная шкала частотных каналов процессора. Частотные шкалы процессора ДПФ считаются линейно связанными, если отклики процессора с максимальными модулями и фиксированными фазами (положительными или отрицательными, но одинаковыми для всех откликов) располагается на биссектрисе ортогональной системы координат, образованной частотными шкалами. Ни один из известных классических базисов Уолша, упорядоченных по Адамару, Качмажу или Пэли, требуемой связанности шкалам процессора ДПФ не обеспечивает. В данном исследовании разработаны уникальные базисы ДПФ, а именно, \mathbf{C} – базис Уолша-Кули и альтернативный ему \mathbf{T} – базис Уолша-Тьюки, которые оказываются единственными из многочисленных систем функций Уолша и систем секвентных функций, которые как раз и доставляют линейную связанность частотным шкалам процессоров ДПФ. Оба базиса обладают одинаковыми амплитудно-частотными, но противоположными фазо-частотными характеристиками в том плане, что если в некотором k – m выходном канале N – точечного процессора БПФ фаза отклика в \mathbf{C} – базисе Уолша-Кули равна $\varphi_c(k)$, то в базисе Уолша-Тьюки $\varphi_t(k) = \varphi_c(N - k)$. Для практического применения \mathbf{C} – базис Уолша-Кули является более предпочтительным по сравнению \mathbf{T} – базисом Уолша-Тьюки, поскольку \mathbf{C} – базис вычисляется намного проще, чем \mathbf{T} – базис.

Ключевые слова: системы функций Уолша, секвентные Уолше-подобные функции, линейная связанность частотных шкал процессора ДПФ, базис функций Уолша-Кули, базис функций Уолша-Тьюки.

1. Введение и обзор литературы

В теории и практике спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах [1], помехоустойчивого кодирования и сжатия аудио и видео данных [2, 3], криптографической защиты информации [4], в сотовых каналах связи [5] и в других областях науки и техники [6, 7] широкое применение находят функционально полные системы функций Уолша (для простоты – системы Уолша), являющиеся частным случаем систем знакопеременных кусочно-постоянных секвентных функций [8]. Системой Уолша называется совокупность функций, образующих ортогональную систему, принимающих только два значения $+1$ и -1 на всей двоично-степенной области определения $N = 2^n$, где n – натуральное число [2].

Число функций, включаемых в систему Уолша, обычно равно числу отсчётов каждой функции, так как при дискретном спектральном анализе сигналов с N отсчётами число спектральных составляющих также должно быть равно N [2]. Удобным способом представления этих сис-

тем является изображение их в виде квадратных матриц (будем называть их также *матрицами Уолша*), в которой каждая строка – это функция Уолша, причём для простоты вместо значений элементов $+1$ и -1 записывают только их знаки $+$ или $-$. Нумерация строк матриц Уолша осуществляется сверху вниз, а столбцов слева-направо, начиная с нулевого номера. Номер строки определяет порядок функции Уолша в системе и обозначается в дальнейшем символом k .

Полнота систем Уолша означает, что на интервале определения N её нельзя дополнить ни одной новой функцией, которая была бы ортогональна одновременно ко всем другим функциям, входящим в систему [2]. Полная система функций Уолша образует базис пространства Уолша, при этом каждая функция называется *базисной функцией* системы соответствующего порядка. Базисы систем функций Уолша формируются из базисных функций, таким образом, чтобы они (функции) составляли симметрическую матрицу N -го порядка. Симметрия матриц достигается соответ-

ствуючим *упорядочиванием* базисных функций Уолша, состав которых при фиксированном N сохраняется неизменным.

До настоящего времени использовались только три упорядочения: по Адамару, Уолшу и Пэли [9]. Первое упорядочение было предложено Адамаром (Hadamard) в 1893 г. в связи с исследованиями по теории определителей [10]. Для примера, *система* (матрица) *Уолша-Адамара* \mathbf{H}_N восьмого порядка имеет вид

$$\mathbf{H}_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} & \rightarrow t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{pmatrix} & \cdot \end{matrix} \quad (1)$$

$\downarrow k$

Особенность матриц Адамара состоит в том, что она принадлежит к так называемым *кронекеровским матрицам* [11], т.е. может быть представлена в виде прямого кронекеровского произведения матриц Адамара второго порядка:

$$\mathbf{H}_{N=2^n} = (\mathbf{H}_2)^{[n]},$$

где $[n]$ – кронекеровское возведение в степень n .

Осями координат системы Адамара $\mathbf{H}_N = \{h(k, t)\}$, $k, t = \overline{0, N-1}$, являются *порядок* k базисной функции $h(k, t)$, совпадающий с *номером* (начинающимся с нуля) строки матрицы, и нормированное *дискретное время* t . Простота образования систем функций Уолша, упорядоченных по Адамару, которые называют также *Кронекер-упорядоченными системами* Уолша [12], сделала их особенно удобными для реализации алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) по схеме Кули-Тьюки [13].

В 1923 г. Уолшем предложена система $\mathbf{W}_N = \{w(k, t)\}$, в которой базисные функции Адамара $h(k, t)$ были упорядочены по числу перемен знаков [14]. Позднее (1948 г.) системы \mathbf{W}_N получили название *систем Уолша-Качмажа* [15]. В частности, (2).

Выбранный Уолшем способ упорядочения базисных функций Адамара придает системе \mathbf{W}_N большое сходство с привычными для инженеров гармоническими функциями с эквидистантно расположенными на оси частот гармониками k , что оказалось весьма удобным при решении задач спектрального анализа дискретных сигналов. Со времени появления *частотно-упорядоченных* систем \mathbf{W}_N все симметричные системы, формируемые любыми перестановки функций Адамара, стали называть *системами Уолша*.

$$\mathbf{W}_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} & \rightarrow t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{pmatrix} & \cdot \end{matrix} \quad (2)$$

$\downarrow k$

И, наконец, в 1932 г. Пэли предложил [16] ещё один способ упорядочения базисных функций Адамара, который сводился к двоично-инверсной перестановке (ДИП) двоичных номеров функций Уолша-Адамара. На основании ДИП базисных функций матрицы (1) приходим к системе функций Уолша-Пэли $\mathbf{P}_N = \{p(k, t)\}$ восьмого порядка

$$\mathbf{P}_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} & \rightarrow t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{pmatrix} & \cdot \end{matrix} \quad (3)$$

$\downarrow k$

Матрицы \mathbf{P}_N произвольного двоично-степенного порядка $N = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$, можно составить непосредственно с помощью простого рекуррентного мнемонического правила [2], суть которого сводится к следующим этапам преобразований.

На начальном этапе формирования P_N каждая строка предыдущей матрицы $P_{N/2}$ записывается дважды, а затем к первой из них (чётной строке) справа приписываются элементы той же самой строки, т.е. элементы правой половины чётной строки *повторяют* элементы её левой половины, а ко второй (нечётной строке) – противоположные (*комплементарные*) элементы. Назовём приведенный способ формирования систем функций Уолша-Пэли *повторно-комплементарным* алгоритмом или кратко *ПК-алгоритмом*. Основной недостаток ПК-алгоритма состоит в том, что вычислению матриц Пэли 2^{n+1} -го порядка, $n = 1, 2, \dots$, должно предшествовать вычисление матриц 2^n -го порядка. Альтернативой рекуррентному ПК-алгоритму служит эмпирически установленный алгоритм *прямого вычисления* базисных функций систем Пэли [17], именуемый далее *ПВ-алгоритмом*. Суть вычислительной схемы ПВ-алгоритма для системы базисных функций Пэли состоит в следующем. Безотносительно к способу упорядочения элементы функций нулевого порядка в любой системе Уолша равны +1, т. е.

$$p(0, t) = +, \quad t = \overline{0, N-1}. \quad (4)$$

Элементы базисных функций первого порядка определяются выражением

$$p(1, t) = \begin{cases} +, & t = \overline{0, N/2-1} \\ -, & t = \overline{N/2, N-1} \end{cases}. \quad (5)$$

Соотношения (4) и (5) являются начальными условиями алгоритма синтеза базисных функций системы Уолша-Пэли, который непосредственно следует из матрицы (3), а если $k \geq 1$, то функции определяются соотношениями:

$$p(2k, t) = p(k, (2t)_N) \quad (6)$$

для чётных и

$$p(2k+1, t) = p(2k, t) \cdot p(1, t) \quad (7)$$

для нечётных базисных функций.

Обратим внимание на то, что в (6) запись $(2t)_N$ означает вычисление остатка по модулю N , а в (7) знак умножения (точка) соответствует арифметической операции поразрядного умножению элементов функций.

Во многих приложениях *двоично-упорядоченные* системы Уолша-Пэли оказались более удобными и предпочтительными по сравнению с ранее по-

лученными системами Адамара и Качмажа и сейчас, говоря о системе функций Уолша, подразумевают именно систему Уолша-Пэли. По указанным причинам системы функций Уолша-Пэли P_N двоично-степенного порядка $N = 2^n$ называют *опорными* (или *главными*, *базовыми*) системами в том плане, что соответствующей перестановкой номеров k базисных функций $p(k, t)$ можно получить матрицы всех оставшихся симметричных систем Уолша [18], общее число которых L_n определяется соотношением [19]

$$L_n = \prod_{i=1}^n (2^i - i \pmod{2}). \quad (8)$$

Нумерация функций Уолша в трёх рассмотренных выше способах упорядочения (p – по Пэли; b – по Адамару; w – по Качмажу) приведена в табл. 1, из которой видно, что различные системы Уолша используют одни и те же базисные функции, но отличаются последовательностями выбора этих функций.

Таблица 1

Перестановки номеров базисных функций в системах Уолша

b	0	1	2	3	4	5	6	7
p	0	4	2	6	1	5	3	7
w	0	1	3	2	7	6	4	5

Наряду с наиболее распространённым способом представления элементов матриц Уолша знаками + и – нередко применяют кодированные формы матриц, в которых знак «плюс» замещается цифрой 0, а «минус» – цифрой 1, переводя тем самым системы Уолша из *пространства оригиналов* в *пространство изображений*. В результате такой подстановки матрица (3), например, примет вид:

$$P_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} & \rightarrow t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \cdot \\ \downarrow k & & & & & & & & (9) \end{matrix}$$

Системи Уолша-Пэли в просторанстве изображений могут быть образованы на основании ПК-алгоритма посредством так называемого *кодирового дефрева* [20], представленного для систем восьмого порядка на рис. 1.

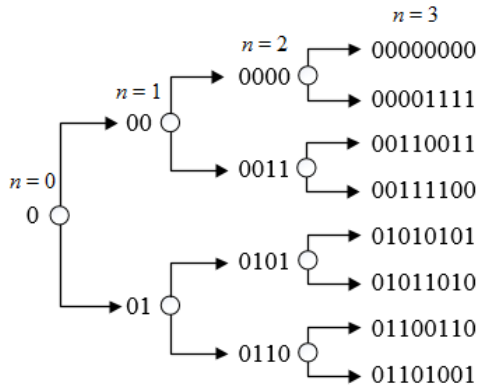


Рис. 1. Повторно-комплементарный способ формирования систем функций Уолша-Пэли

Системы Уолша $\{\varphi(k, t)\}$ находят широкое применение в качестве базисов дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Спектр $\dot{X}_m(k)$ комплексного дискретного сигнала $\dot{x}_m(t)$, образуемого процессором ДПФ, определяется соотношением

$$\dot{X}_m(k) = \sum_{t=0}^{N-1} \dot{x}_m(t) \cdot \varphi(k, t), \quad (10)$$

в котором N – объём выборки; m – нормированная частота входного сигнала; k – номер гармоники сигнала; t – номер отсчёта сигнала (дискретное время).

Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) выходных каналов процессоров ДПФ стандартно вычисляют по формуле (10) относительно дискретного комплексно-экспоненциального сигнала

$$\dot{x}_m(t) = \exp\left(j \frac{2\pi}{N} mt\right), \quad m, t = \overline{0, N-1}. \quad (11)$$

Достаточно просто задача оценки спектра сигнала (11) решается на основании графоаналитического метода расчёта, суть которого для восьмиточечного ДПФ в базисе функций Уолша-Пэли (3) при вычислении, например, гармоники $\dot{X}_1(1)$ показана на рис. 2. Точками на рис. 2 отмечены векторы входного сигнала, участвующие в формировании отклика $\dot{X}_1(1)$ в первом выходном канале процессора, а цифрами в окрестности этих точек – номера временных отсчётов t базисной

функции Уолша-Пэли первого порядка $p(1, t)$. Согласно матрице (3) векторы первых четырёх отсчётов сигнала $\dot{x}_1(t)$, $t = \overline{0, 3}$, берутся со знаком *плюс*, а оставшиеся ($t = \overline{4, 7}$) – со знаком *минус*.

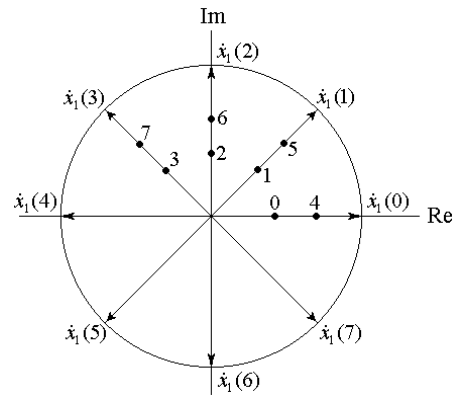


Рис. 2. К определению гармоники $\dot{X}_1(1)$

Процессоры ДПФ, в равной степени, как и их аналоги – процессоры БПФ, реализуемые в различных базисах Уолша по схеме Кули-Тьюки [13], доставляют спектру сигнала (11) на целочисленных частотах такие особенности: во-первых, спектр состоит из совокупности пар гармоник, при чём в каждой паре гармоники обладают одинаковыми амплитудами, но противоположными знаками начальных фаз и, во-вторых, для некоторых базисов, в число которых входит базис Уолша-Пэли и ряд других, если на вход процессора БПФ подведен «чётный» сигнал (т.е. частота m является чётной величиной), то «звонят» только чётные выходные каналы процессора, и наоборот.

Рассчитанные описанным выше способом гармоники дискретных комплексно-экспоненциальных сигналов, объём выборки которых составляет $N = 8$, приведены в табл. 2 для «чётных» и в табл. 3 – для «нечётных» сигналов, причём комплексные величины \dot{z} обозначены следующим образом: $\dot{z} = (a, b)$, где a и b – действительная и мнимая компоненты вектора \dot{z} соответственно.

Таблица 2

Гармоники «чётных» комплексно-экспоненциальных сигналов

m	$\dot{X}_m(0)$	$\dot{X}_m(2)$	$\dot{X}_m(4)$	$\dot{X}_m(6)$
0	8	0	0	0
2	0	4(1, 1)	0	4(1, -1)
4	0	0	8	0
6	0	4(1, -1)	0	4(1, 1)

Аналогичные вычисления спектра дискретных комплексно-экспоненциальных сигналов могут выполнены для произвольного базиса Уолша.

Введём понятия *частотных шкал* процессора ДПФ (как и БПФ). Назовём *входной частотной шкалой* процессора ось абсцисс X декартовой системы координат на плоскости, предназначенную для размещения нормированных частот m входного сигнала $\dot{x}_m(t)$, а *выходной частотной шкалой* – ось ординат Y , предназначенную для размещения номеров k выходных каналов процессора, с которых осуществляется съём k -й комплексной гармоники $\dot{X}_m(k)$ выборочной совокупности сигналов $\dot{x}_m(t)$.

Отбирая из таблиц, содержащих комплексный спектр сигнала (11), гармоники с максимальной амплитудой и положительной фазой, построим графики взаимосвязи частотных шкал m и k восьмиточечных процессоров ДПФ в базисах Уолша, упорядоченных по Адамару, Качмажу и Пэли (рис. 3).

Для построения графиков на рис. 3 выбирались гармоники с положительными фазами по той причине, поскольку ни одна из гармоник (за исключением нулевой) с отрицательной фазой в базисе функций Уолша-Пэли, как это следует из табл. 2 и 3, не попадает на биссектрису осей координат (m, k) , что существенно искажает траекторию расположения точек на плоскости (X, Y) и без того далёкую от линейной.

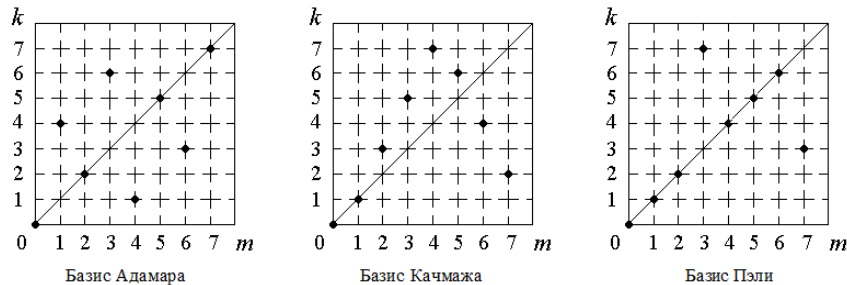


Рис. 3. Соотношение частотных шкал процессоров ДПФ

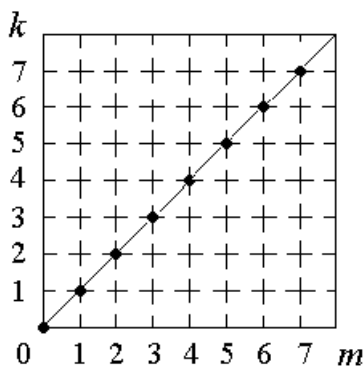


Рис. 4. Иллюстрация линейной связанности частотных шкал процессоров ДПФ в базисе ДЭФ

Гармоники «нечётных» комплексно-экспоненциальных сигналов

m	$\dot{X}_m(1)$	$\dot{X}_m(3)$	$\dot{X}_m(5)$	$\dot{X}_m(7)$
1	$2(1, 1 + \sqrt{2})$	$2(1, \sqrt{2} - 1)$	$2(1, 1 - \sqrt{2})$	$2(1, -1 - \sqrt{2})$
3	$2(1 + \sqrt{2}, -1)$	$2(1 - \sqrt{2}, 1)$	$2(1 - \sqrt{2}, -1)$	$2(1 + \sqrt{2}, 1)$
5	$2(1, 1 - \sqrt{2})$	$2(1, -1 - \sqrt{2})$	$2(1, 1 + \sqrt{2})$	$2(1, \sqrt{2} - 1)$
7	$2(1 - \sqrt{2}, -1)$	$2(1 + \sqrt{2}, 1)$	$2(1 + \sqrt{2}, -1)$	$2(1 - \sqrt{2}, 1)$

Будем говорить, что некоторый базис обеспечивает частотным шкалам процессора ДПФ *линейную связанность*, если гармоники дискретного комплексно-экспоненциального сигнала с максимальной амплитудой и неизменяющейся по знаку фазой (полагая допустимой её нулевое значение) располагаются на биссектрисе прямого угла, образованного координатами m и k . Или, другими словами, частотные шкалы процессора ДПФ являются линейно связанными, если при подаче на вход процессора ДПФ отсчётов комплексно-экспоненциального сигнала максимальным «звоном» будет обладать тот выходной канал, номер которого k совпадает с частотой входного сигнала m . Линейную связанность частотным шкалам процессора ДПФ, показанной на рис. 4, доставляет, например, базис дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ).

2. Постановка задачи исследования

Как следует из графиков, представленных на рис. 3, ни один из трёх известных базисов Уолша, упорядоченных по Адамару, Качмажу или Пэли, не обеспечивают *линейной связанности* частотным шкалам процессоров ДПФ, что затрудняет их применение в спектральном анализе, ориентированном на измерение частоты входных сигналов. Обозначенный недостаток классических систем функций Уолша как раз и послужил той отправной точкой, которая предопределила важнейшую проблему, решаемую в данном исследовании, а именно: разработку алгоритмов синтеза Уолша и

Уолше-подобных базисов, доставляющих линейную связанность частотным шкалам процессоров ДПФ.

3. Синтез и анализ базисных систем функций Уолша-Кули

Обратимся к дереву восьмиточечного процессора БПФ в базисе ДЭФ по схеме Кули-Тьюки [13] с двоично-инверсно переставленными отсчётами входного сигнала (рис. 5).

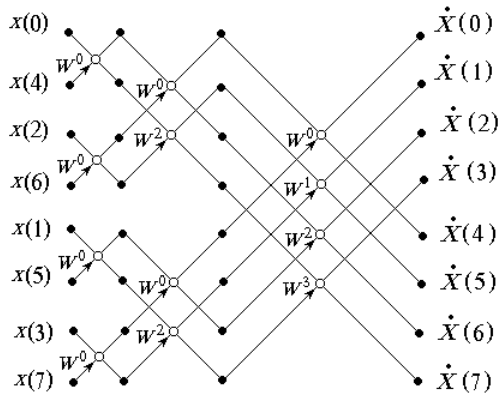


Рис. 5. Направленный граф восьмиточечного БПФ в базисе ДЭФ

Распределение степеней *фазовых множителей* (ФМ), обозначаемых как W , процессора на комплексной плоскости показано на рис 6. Совокупность множителей $W^l = \exp(-j2\pi l / N)$, $l = \overline{0, 7}$, используемых в третьей ступени графа преобразования, охвачена дугой, причём светлый кружочек выделяет ФМ, который входит в совокупность, а стрелка дуги опирается на множитель, который в эту совокупность не входит.

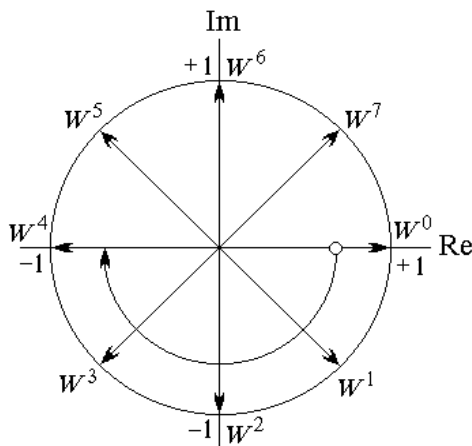


Рис. 6. Фазовые множители базиса ДЭФ для восьмиточечного ДПФ

Сохраняя для наглядности положение векторов W^l неизменным, аппроксимируем их значениями ± 1 так, как показано на рис. 7.

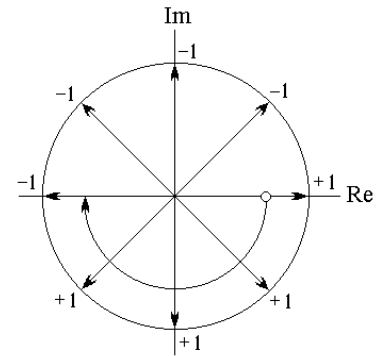


Рис. 7. Аппроксимация фазовых множителей ДЭФ

Выбранный способ замены комплексных ФМ вещественными числами приводит к тому, что процессор БПФ будет осуществлять формирование спектра уже не в базисе комплексных ДЭФ, а в базисе вещественных функций Уолша. Если при этом номера отсчётов входного сигнала составляют естественную последовательность, как на рис. 8, то процессором БПФ будет вычисляться спектр в базисе функций Уолша-Адамара (1).

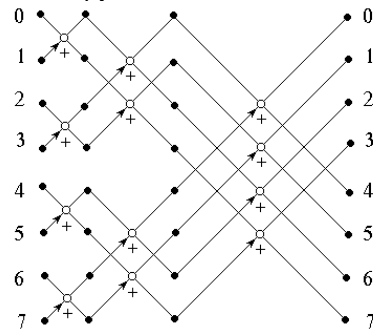


Рис. 8. Направленный граф восьмиточечного БПФ в базисе функций Уолша-Адамара

Если же двоичные номера отсчётов сигнала подвергнуть инверсной перестановке, то процессор образует спектр в базисе функций Уолша-Пэли (3). И, наконец, если в дополнении к ДИП номера отсчётов входного сигнала преобразовать по обратному коду Грея (ОКГ), то получим спектр в базисе функций Уолша-Качмажа (2). Взаимосвязь номеров базисных функций, перечисленных трёх основных систем Уолша приведена в табл. 1, а схема переходов (рис. 9) от одной системы Уолша к другой посредством кодов Грея (КГ) впервые была подмечена в работе [21].

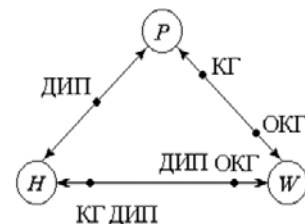


Рис. 9. Взаимосвязь номеров функций в основных системах Уолша

Из анализа рис. 7 приходим к заключению о том, что с инженерной точки зрения предлагаемую аппроксимацию совокупности комплексных ФМ, используемых в последней степени дерева БПФ, вряд ли можно признать рациональной. Более подходящей следует считать аппроксимацию, в которой фазовые множители, располагающиеся в правой (положительной) полуплоскости комплексной плоскости замещаются положительными единицами, а ФМ из левой (отрицательной) полуплоскости – отрицательными единицами. К подобного рода аппроксимации ФМ можно прийти (рис. 10), разворачивая единичный круг на комплексной плоскости против часовой стрелки на угол $\pi/2$, сохраняя при этом положение осей координат и дуги, охватывающей фазовые множители последней степени дерева БПФ.

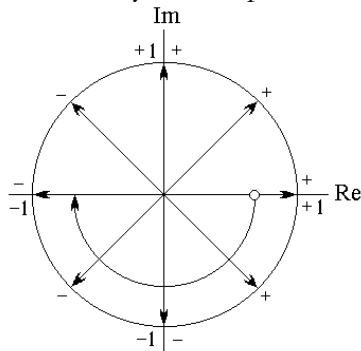


Рис. 10. Модифицированная аппроксимация фазовых множителей ДЭФ

Воспользовавшись рис. 10, составим табл. 4 модифицированных фазовых множителей для всех трёх ступеней дерева БПФ.

Таблица 4

Распределение ФМ в ступенях дерева восьмиточечного БПФ

Номер ступени преобразования	Набор ФМ
3	++--
2	+-
1	+

Сохраняя, как и для преобразования Уолша-Пэли, двоиочно-инверсную перестановку сигналов на входе процессора восьмиточечного БПФ и выбрав веса рёбер дерева такими, как в табл. 4, приходим к структуре дерева преобразования, показанного на рис. 11.

На основании дерева БПФ, представленного на рис. 11, приходим к новой, не рассматривавшейся ранее, симметрической матрице системы Уолша:

$$C_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \rightarrow t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \downarrow k & \begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & + & + & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (12)$$

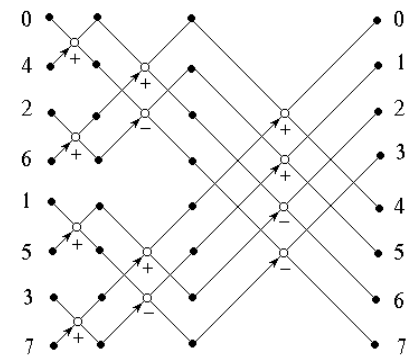


Рис. 11. Направленный граф восьмиточечного БПФ с модифицированным набором ФМ

Система (12) впервые была получена [22] в результате модификации распределения на комплексной плоскости фазовых множителей дерева БПФ по схеме Кули-Тьюки и по этой причине названа *системой функций Уолша-Кули* ($C = \{c(k, t)\}$). Номера (порядки) k_c базисных функций систем Уолша-Кули связаны с базисными функциями k_p систем Уолша-Пэли соотношением

$$k_c = ОКГ^* \{ k_p \}, \quad (13)$$

где $ОКГ^*$ – *правостороннее* обратное преобразование Грея сопряжённое *левостороннему* (классическому) обратному преобразованию $ОКГ$ [23].

Система функций Уолша-Кули фиксированного порядка *уникальна* по крайней мере в том, что среди многочисленных классических систем Уолша (например, по оценке (8) если $n = 8$, то $L_8 = 28'897'705'984$) единственная из них – система Уолша-Кули образует базис, доставляющий линейную связанность частотным шкалам процессора БПФ, подобную той, которая показана на рис. 4. Линейная связанность шкал достигается при условии, что отбору подлежат выходные отклики процессора с максимальными амплитудами

и отрицательными фазами. И как следствие линейной связанности частотных шкал – по номеру канала процессора ДПФ в базисе функций Уолша-Кули с максимальным модулем и отрицательной фазой можно однозначно определить частоту входного комплексно-экспоненциального сигнала. В этом и проявляется *оптимальность* базиса Уолша-Кули.

Базисные функции Уолша-Кули $c(k, t)$ вычисляются по формулам, аналогичным расчётным формулам (4)-(7) для базисных функций $p(k, t)$ систем Уолша-Пэли и отличаются от последних лишь значениями функций первого порядка. В частности,

$$c(1, t) = \begin{cases} +, & t=0, \frac{N}{4}-1 \text{ и } t=\frac{3N}{4}, N-1, \\ -, & t=\frac{N}{4}, \frac{3N}{4}-1. \end{cases} \quad (14)$$

И если $k \geq 1$, то

$$c(2k, t) = c(k, (2t)_N) \quad (15)$$

– для чётных и

$$c(2k+1, t) = c(2k, t) \cdot c(1, t) \quad (16)$$

– для нечётных функций.

Обратим внимание на такой очевидный факт. Если на входы N – точечного процессора БПФ по схеме Кули-Тьюки поданы отсчёты сигнала $\dot{x}(t)$ в их естественной последовательности $t = 0, 1, \dots, N-1$, то с выходных клемм процессора снимаются гармоники $\dot{X}(k)$ сигнала $\dot{x}(t)$ в базисе функций Уолша-Адамара $\{h(k, t)\}$. Если же номера входных отсчётов t подвергнуть двоиочно-инверсной перестановке, то получим спектр в базисе функций Уолша-Пэли $\{p(k, t)\}$. И, наконец, в том случае, когда номера отсчётов t после ДИП дополнительно переставить по обратному коду Грея правостороннему (13), то приходим к спектру в базисе функций Уолша-Кули $\{c(k, t)\}$. Естественно, что никакая перестановка отсчётов входных сигналов не меняет структуру дерева БПФ (см. рис. 12).

Произвольная перестановка номеров отсчётов t входных сигналов $\dot{x}(t)$ приводит, в чём достаточно легко убедиться, к соответствующей перестановке столбцов матрицы преобразования, порождаемой процессором БПФ, в том смысле, что P – перестановка (рис. 12) столбцов матрицы

Адамара (1) преобразует её в матрицу Пэли (3), тогда как C – перестановка – в матрицу Кули (12). Любые перестановки (в том числе стохастические) $\dot{x}(t)$ обратимы, т.е. если спектр $\dot{X}(k)$ подать на вход процессора БПФ, то на его выходе образуется исходная последовательность отсчётов $\dot{x}(t)$.

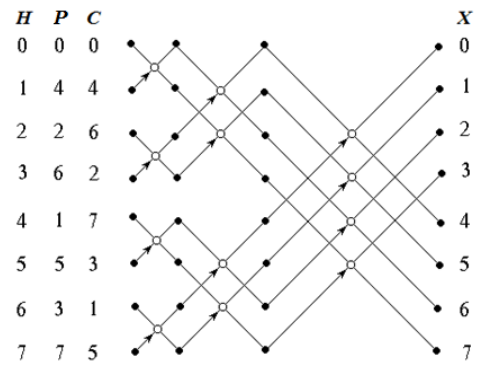


Рис. 12. Варианты перестановок номеров отсчётов сигнала на входе процессора БПФ

Вспользуемся графоаналитическим способом вычисления гармоник комплексно-экспоненциального сигнала (11), полагая объем выборки равным восьми, в базисе функций Уолша-Кули (12). Пример расчёта гармоники $\dot{X}_1(1)$ приведен на рис. 13.

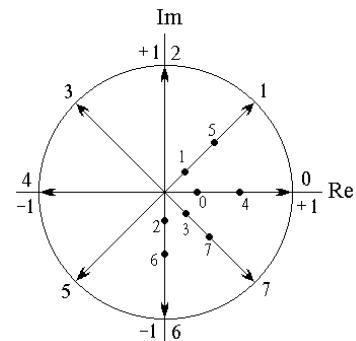


Рис. 13. К определению гармоники $\dot{X}_1(1)$

Суммируя отмеченные векторы и выделяя вещественную и мнимую части, получим:

$$\dot{X}_1(1) = 2(1 + \sqrt{2}, -1).$$

Результаты аналогичных расчётов гармоник «чётных» сигналов сведены в табл. 5, а «нечётных» – в табл. 6.

Таблица 5

Гармоники «чётных» сигналов в базисе Уолша-Кули

m	$\dot{X}_m(0)$	$\dot{X}_m(2)$	$\dot{X}_m(4)$	$\dot{X}_m(6)$
0	8	0	0	0
2	0	4(1, -1)	0	4(1, 1)
4	0	0	8	0
6	0	4(1, 1)	0	4(1, -1)

Таблиця 6

Гармоніки «нечётных» сигналів в базисі Уолша-Кулі

m	$\dot{X}_m(1)$	$\dot{X}_m(3)$	$\dot{X}_m(5)$	$\dot{X}_m(7)$
1	$2(1+\sqrt{2}, -1)$	$2(1-\sqrt{2}, 1)$	$2(1-\sqrt{2}, -1)$	$2(1+\sqrt{2}, 1)$
3	$2(1, 1-\sqrt{2})$	$2(1, -(1+\sqrt{2}))$	$2(1, 1+\sqrt{2})$	$2(1, \sqrt{2}-1)$
5	$2(1-\sqrt{2}, -1)$	$2(1+\sqrt{2}, 1)$	$2(1+\sqrt{2}, -1)$	$2(1-\sqrt{2}, 1)$
7	$2(1, 1+\sqrt{2})$	$2(1, \sqrt{2}-1)$	$2(1, 1-\sqrt{2})$	$2(1, -(1+\sqrt{2}))$

Из анализа табл. 5 и 6 следует, что на главных диагоналях матриц спектра $\dot{X}_m(k)$, $m, k = \overline{0, 7}$, располагаются гармоники с максимальными модулями и отрицательными фазами, причём гармоники $\dot{X}_0(0)$ и $\dot{X}_4(4)$ сигналов $\dot{x}_0(t)$ и $\dot{x}_4(t)$ соответственно являются вещественными, а их фазы равны нулю. Базис функций Уолша-Кули является уникальным в том плане, что во всём множестве *классических* базисов (систем) Уолша оказывается единственным, который доставляет процессору ДПФ линейную связанность его частотным шкалам. Под «классическими» будем понимать такие системы Уолша, базисные функции которых, за исключением функций нулевого порядка и так называемых *особенных* функций, содержат одинаковое число, равное $N/4$, знаков + и - как в левой, так и в правой половинках функций. К «особенным» будем относить базисные функции, левая половина которых состоит только из одних знаков +, а правая - из знаков -.

Порождающие функции систем Уолша-Кули в пространстве оригиналов - базисные функции первого порядка $c(1, t)$, могут быть получены считыванием знаков векторов сигналов V_i на комплексной плоскости при обходе единичного круга против часовой стрелки, начиная с вектора V_0 , полагая при этом, что вектору V_i отвечает знак +, если он отмечен точкой, и знак - в противном случае. Имеем, согласно рис. (13),

$$c(1, t) = \{ + + - - - - + + \},$$

Альтернативная совокупность векторов V_i , отмеченных точками, аппроксимация которых значениями +1 приводит к формированию базиса, обеспечивающего линейную связанность частотным шкалам процессора ДПФ, показана на рис. 14.

Порождающие функции $\tau(1, t)$ альтернативных систем, назовём их системами Уолша-Тьюки,

или иногда, краткости ради, T -системами, составляется по тем же правилам, как и функции $c(1, t)$, т. е. для $N = 8$ имеем

$$\tau(1, t) = \{ + - - - - + + + \}. \quad (17)$$

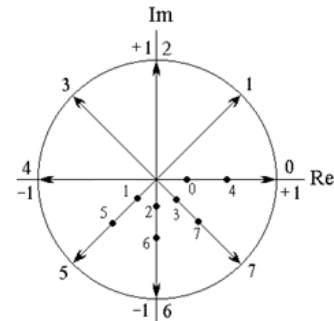


Рис. 14. Альтернативное распределение отмеченных векторов

В отличие от симметричных порождающих функций $c(1, t)$ классических систем Уолша-Кули, которые для краткости будем именовать также C -системами, порождающие функции систем Уолша-Тьюки $\tau(1, t)$ не являются симметричными и поэтому определим их как *Уолше-подобные* (или *секвентные*) функции [8].

4. Синтез и анализ систем функций Уолша-Тьюки

Согласно выражениям (4) и (17) выпишем начальные условия (базисные функции нулевого и первого порядков) для построения симметричных систем Уолша-Тьюки в пространстве изображений

$$\tau(0, t) = 0^{(N)}; \quad (18)$$

$$\tau(1, t) = 01^{(N/2)}0^{(N/2-1)},$$

где обозначено

$$\alpha^{(l)} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_l.$$

Чётные базисные функции в системах Уолша-Тьюки определяются таким же самым способом, как и в системах Уолша-Кули, а именно

$$\tau(2k, t) = \tau(k, (2t)_N), \quad t = \overline{0, N-1}, \quad (19)$$

тогда как установленное эмпирически правило формирования нечётных функций существенно отличается от формирования соответствующих функций C -систем

$$\tau(N - 2k + 1, t) = \tau(1, t) \oplus \tau(2k, t). \quad (20)$$

Обратим внимание на ту особенность, что в правой части выражения (20) применена операция поразрядного сложения, тогда как в практически подобном выражении (7) – операция поразрядного умножения. Такая трансформация объясняется тем, что переход из пространства оригиналов в пространство изображений сопровождается заменой в алгоритмах синтеза базисных функций систем Уолша операции поразрядного умножения на операцию поразрядного сложения по модулю 2.

Как следует из соотношений (18)-(20) правые половинки чётных базисных функций \mathbf{T} -систем повторяют значения левых половинок, т.е.

$$\tau(2k, N/2+t) = \tau(2k, t), \quad t = \overline{0, N/2-1}, \quad (21)$$

а в нечётных функциях образуют с ними комплементарные двоичные пары, при этом *нуль* замещается *единицей* и наоборот, что можно отобразить формулой

$$\tau(2k+1, N/2+t) = \bar{\tau}(2k+1, t), \quad t = \overline{0, N/2-1}, \quad (22)$$

в которой $\bar{\tau}$ есть функция, комплементарная функции τ .

Проиллюстрируем на примерах алгоритм синтеза симметричных систем Уолша-Тьюки, полагая для начала $N = 8$. Начальные условия (18) совместно с выражениями (19) и (20) позволяют заполнить шесть строк (базисных функций) и (в силу симметричности) соответствующих столбцов матрицы Тьюки (\mathbf{T} -матрицы). Номера этих строк и столбцов в \mathbf{T}_8 - матрице (22) выделены жирным шрифтом.

$$\mathbf{T}_8 = \begin{matrix} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & t \\ \mathbf{0} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & (18) \\ \mathbf{1} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & (18) \\ \mathbf{2} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & (19) \\ \mathbf{3} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 & & 1 \end{array} \right) & \\ \mathbf{4} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & (19) \\ \mathbf{5} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & (\mathbf{1} \oplus \mathbf{4}) \\ \mathbf{6} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & & 1 \end{array} \right) & \\ \mathbf{7} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & (\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}) \\ k & & & & & & & & & \end{matrix} \quad (23)$$

В круглых скобках в верхней части правой колонки системы (23) указаны номера формул, на основании которых получены соответствующие строки \mathbf{T}_8 - матрицы, а в нижней – конкретизируется способ вычисления пятой и седьмой строк

матрицы согласно выражению (20). Недостающие элементы \mathbf{T}_8 – матрицы легко восполняются соотношениями (21) и (22), на основании которых окончательная форма матрицы Уолша-Тьюки восьмого порядка приобретает вид

$$\mathbf{T}_8 = \begin{matrix} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & t \\ \mathbf{0} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \\ \mathbf{1} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \\ \mathbf{2} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \\ \mathbf{3} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \\ \mathbf{4} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \\ \mathbf{5} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \\ \mathbf{6} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \\ \mathbf{7} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \\ k & & & & & & & & & \end{matrix} \quad (24)$$

Переходим к синтезу \mathbf{T} -системы 16-го порядка. Составим, опираясь на соотношения (14)-(16) и (18)-(24), схему вычислений (рис. 15) базисных функций систем Кули-Тьюки. В чём состоит сходство и различие алгоритмов синтеза \mathbf{C} – и \mathbf{T} – матриц этих систем? Одинаковым для них является способ рекуррентного определения базисных функций чётного порядка $c(2k, t)$ и $\tau(2k, t)$, поскольку формулы (15) и (19) эквивалентны, что можно отобразить отношением подобия (15) ~ (19). Различие же проявляется в том, что если в системе Уолша-Кули при вычислении нечётных базисных функций $c(2k+1, t)$, $k \geq 1$, поразрядно суммируются функция первого порядка $c(1, t)$ с чётными функциями $c(2k, t)$, причём последние расставлены в схеме слева-направо в порядке возрастания, то в системе Уолша-Тьюки последовательность чётных функций $\tau(2k, t)$, участвующих в операциях поразрядного сложения на этапах определения функций $\tau(2k+1, t)$, инверсна по отношению к последовательности в системе Уолша-Кули, как это проиллюстрировано на рис. 15.

Способ формирования матриц \mathbf{T}_N – систем Уолша-Тьюки, подобный тому, каким была составлена матрица (24), для $N = 16$ и выше становится трудоёмким и сложность его возрастает по мере увеличения порядка матриц N . Ниже предлагается достаточно простой в реализации алгоритм синтеза \mathbf{T}_N – матриц, основанный на так называемом методе *направленного перебора* базисных функций систем Уолша-Тьюки, суть которого состоит в следующем [24]. Примем к сведению такие обстоятельства. Во-первых, если произвести ин-

верснью перестановку ненулевых столбцов системы Уолша-Пэли (9), то получим матрицу \tilde{P}_8 , которая содержит тот же набор базисных функций, что и система Уолша-Тьюки (24). И, во-вто-

рых, базисные функции двоично-степенного порядка $k = 2^l$, $l = 0, 1$ и 2 , включая функцию $p(0, t)$, выделенные жирным шрифтом, расположены в матрице \tilde{P}_8 в тех же самых строчках, как и в матрице (24).

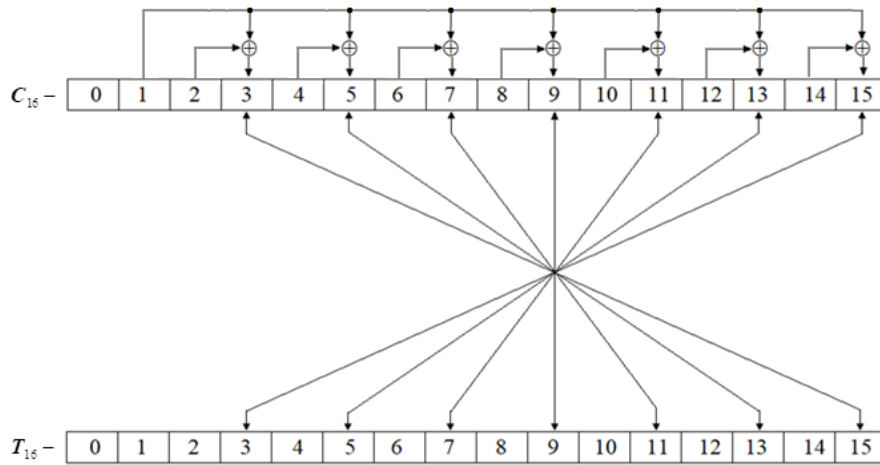


Рис. 15. Схема организации вычислений нечётных базисных функций C – и T – систем

$$\tilde{P}_8 = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \rightarrow t \\ \mathbf{0} & (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0) \\ \mathbf{1} & (0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0) \\ \mathbf{2} & (0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0) \\ 3 & (0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0) \\ \mathbf{4} & (0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1) \\ 5 & (0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1) \\ 6 & (0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1) \\ 7 & (0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1) \end{matrix}$$

$\downarrow k$

Отмеченные особенности матрицы \tilde{P}_8 определяют последовательность шагов в алгоритме формирования систем функций Уолша-Тьюки, которые мы проиллюстрируем на примере синтеза системы T_{16} . С этой целью, воспользовавшись соотношениями (4)-(7), составим матрицу Уолша-Пэли и, подвернув её ненулевые столбцы инверсной перестановке, приходим к матрице в пространстве изображений, которую обозначим \tilde{P}_{16} .

$$\tilde{P}_{16} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & t \\ \mathbf{0} & (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0) \\ \mathbf{1} & (0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0) \\ \mathbf{2} & (0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0) \\ 3 & (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0) \\ \mathbf{4} & (0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0) \\ 5 & (0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0) \\ 6 & (0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0) \\ 7 & (0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0) \\ \mathbf{8} & (0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1) \\ 9 & (0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1) \\ 10 & (0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1) \\ 11 & (0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1) \\ 12 & (0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1) \\ 13 & (0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1) \\ 14 & (0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1) \\ 15 & (0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1) \end{matrix}$$

k

Вычленим в матрице \tilde{P}_{16} базисную функцию нулевого порядка $p(0, t)$ и функции двоично-степенных порядков $p(k, t)$, $k = 2^l$, $l = \overline{0, 2}$, выделив порядки функций (номера строк) в матрице (25) жирным шрифтом. Совокупность таких базисных функций назовём *инвариантными функциями* (ИФ) системы T_{16} . На основании ИФ вычислим по формуле (20) базисные функции, порядки которых k равны 9, 13 и 15, и назовём их *дочерними функциями* (ДФ), порождаемыми ИФ. T – системы Уолша-Тьюки являются симметричными системами. А это означает, что столбцы T – матриц должны повторять соответствующие строки матриц. Дополнив составленную из информационных и дочерних функций строки формируемой T – матрицы 16-го порядка (26) симметрируем их столбцами, приходим к частично заполненной матрице T_{16}^* . В правой колонке матрицы (26) приведены выражения, посредством которых вычисляются соответствующие базисные функции. Обратим внимание на то, что способ определения ДФ в (25) укладывается в схему, показанную на рис. 15.

Доопределение полузаполненных строк и столбцов матрицы (26) осуществляется достаточно просто. Выберем, например, третью строку матрицы T_{16}^* и попробуем подобрать для неё *подходящую* строку в матрице (25), которая, как это пояснялось ранее, содержит все базисные функции T_{16} – системы. «Подходящей» для доопределяемой строки матрицы T_{16}^* является такая строка матрицы \tilde{P}_{16} , значения разрядов которой совпадают со значениями соответствующих непустых разрядов выбранной строки

матрицы T_{16}^* . Единственной подходящей для третьей строки матрицы T_{16}^* оказалась седьмая строка матрицы \tilde{P}_{16} . Более того, и это вполне очевидно, что, во-первых, безальтернативными являются решения для любой неполной строки из T_{16}^* , и, во-вторых, подходящими для чётных (нечётных) неполных функций из T_{16}^* могут быть только функции из подмножеств, содержащих чётные (нечётные) базисные функции системы \tilde{P}_{16} , за исключением инвариантных и дочерних функций.

Придерживаясь сформулированных правил составления симметричных систем Уолша-Тьюки, приходим в матрице T_{16} , в правой колонке которой цифрами без скобок указаны номера подходящих базисных функций из системы \tilde{P}_{16} .

Амплитудно-фазовые характеристики откликов частотных каналов 16-точечного процессора ДПФ (определение которых как раз и составляет содержание анализа) в базисах функций Уолша-Кули (28) и Уолша-Тьюки (27) удобно вычислять графоаналитическим методом. Результаты расчётов АЧХ и ФЧХ комплексно-экспоненциальных дискретных сигналов (ДЭС) приведены на рис. 16 и в табл. 7.

Согласно рис. 16 и табл. 7 амплитудные спектры дискретных комплексно-экспоненциальных сигналов в базисах Уолша-Кули и Уолша-Тьюки совпадают, тогда как фазовые спектры противоположны в том плане, что если в некотором k – м выходном канале N – точечного процессора ДПФ фаза отклика в базисе Уолша-Кули равна $\varphi_c(k)$, то в базисе Уолша-Тьюки $\varphi_\tau(k) = \varphi_c(N - k)$.

$$T_{16}^* = \begin{matrix} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & t \\ \mathbf{0} & (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0) \\ \mathbf{1} & (0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0) \\ \mathbf{2} & (0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0) \\ \mathbf{3} & (0 & 1 & 1 & & 0 & & & & 1 & 0 & & & & 1 & 0 & & 0) \\ \mathbf{4} & (0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0) \\ \mathbf{5} & (0 & 1 & 0 & & 1 & & & & 1 & 0 & & & & 0 & 1 & & 0) \\ \mathbf{6} & (0 & 1 & 0 & & 1 & & & & 0 & 1 & & & & 0 & 1 & & 0) \\ \mathbf{7} & (0 & 1 & 0 & & 0 & & & & 1 & 0 & & & & 1 & 1 & & 0) \\ \mathbf{8} & (0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0) \\ \mathbf{9} & (0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0) & (\mathbf{1} \oplus \mathbf{8}) \\ \mathbf{10} & (0 & 0 & 1 & & 1 & & & & 0 & 0 & & & & 1 & 1 & & 0) \\ \mathbf{11} & (0 & 0 & 1 & & 0 & & & & 1 & 1 & & & & 0 & 1 & & 0) \\ \mathbf{12} & (0 & 0 & 1 & & 0 & & & & 0 & 0 & & & & 0 & 1 & & 0) \\ \mathbf{13} & (0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0) & (\mathbf{1} \oplus \mathbf{4}) \\ \mathbf{14} & (0 & 0 & 0 & & 1 & & & & 0 & 0 & & & & 1 & 0 & & 0) \\ \mathbf{15} & (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0) & (\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}) \end{matrix} \quad (26)$$

$$T_{16} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & (1 \oplus 8) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & (1 \oplus 4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & (1 \oplus 2) \end{matrix} \right) \end{matrix} \quad (27)$$

Матрица Уолша-Кули 16-го порядка имеет вид

$$C_{16} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & (11) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & (15) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & (1 \oplus 2) \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & (15) \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & (1 \oplus 4) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & (15) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & (1 \oplus 6) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & (15) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & (1 \oplus 8) \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & (15) \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & (1 \oplus 10) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & (15) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & (1 \oplus 12) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & (15) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & (1 \oplus 14) \end{matrix} \right) \end{matrix} \quad (28)$$

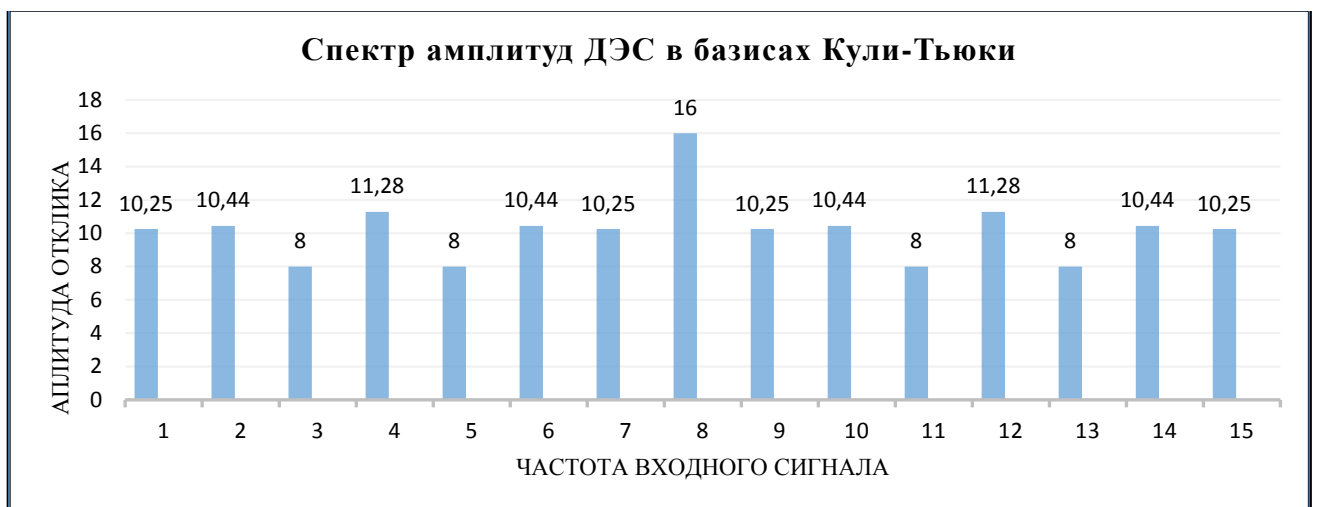


Рис. 16. Амплитудно-частотные характеристики комплексных 16-точечных ДЭС в базисах Кули и Тьюки

Фазо-частотные характеристики комплексных 16-точечных ДЭС в базисах Кули-Тьюки

Базис	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Кули	-0,20	-0,39	-0,65	-0,79	-0,92	-1,18	-1,37	0	-0,20	-0,39	-0,65	-0,79	-0,92	-1,18	-1,37
Тьюки	-1,37	-1,18	-0,92	-0,79	-0,65	-0,39	-0,20	0	-1,37	-1,18	-0,92	-0,79	-0,65	-0,39	-0,20

→ k

5. Обсуждение результатов

Как следует из рис. 13 образующая базисная функция $c_1(k, t)$, $k, t = 0, N - 1$, системы Уолша-Кули в пространстве оригиналов своими положительными значениями (в пространстве изображений знак + замещается цифрой 0) плотно охватывает $N/2$ векторов ДЭС, первый из которых совпадает с отрицательной мнимой единицей комплексного единичного круга, а остальные $N - 1$ векторы отбираются при обходе круга против часовой стрелки. В то же время аналогичная совокупность векторов (рис. 14), связанная с образующей функцией $\tau_1(k, t)$ системы Уолша-Тьюки, начинается с положительной вещественной единицы комплексного круга, а оставшиеся векторы включаются в совокупность при обходе круга по часовой стрелке.

На рис. 17 для приложений к 16-точечным ДПФ в базисах Уолша и Уолша-подобных функций показано, что подмножества *плотно упакованных* векторов, участвующих в формировании откликов на выходах первых частотных каналов процессоров ДПФ, охвачены полудугами, закручиваемыми применительно к системе Уолша-Кули против часовой стрелки, а к системе Уолша-Тьюки – по часовой стрелке, причём вектор, помеченный точкой и расположенной в её окрестности буквой, идентифицирующей систему, включается в подмножество плотно упакованных векторов, а вектор, на который упирается стрелка – не включается в это подмножество. Рис. 13, 14 и 17 наглядно иллюстрируют, что геометрическая сумма плотно упакованных векторов доставляет первому частотному каналу процессора ДПФ максимум отклика и отрицательную фазу.

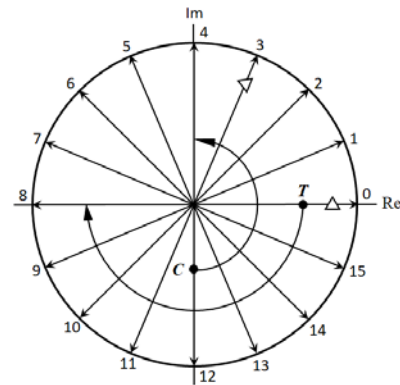


Рис. 17. К пояснению способа формирования подмножества плотно упакованных векторов

Существуют и другие варианты построения подмножеств, состоящих из плотно упакованных комплексных векторов единичного круга. Такими являются подмножества, стартовыми для которых служат векторы 1 и 2, расположенные между векторами, отмеченными на рис. 17 треугольниками, а оставшиеся $N - 1$ векторов подмножеств охватываются полудугами при их закрутке по часовой стрелке. Однако, как показали результаты компьютерных расчётов, ни один из базисов БПФ, составленный на основе таких подмножеств, не обеспечивает линейной связанности частотным шкалам процессоров ДПФ, что является дополнительным подтверждением уникальности базисов Уолша-Кули **C** и Уолша-Тьюки **T**. Оба этих базиса доставляют процессорам ДПФ одинаковые амплитудно-частные и противоположные фазо-частотные характеристики. Последние (ФЧХ) не являются столь уж принципиально важными при решении задач спектрального анализа дискретных сигналов и во многих других областях применения процессор ДПФ. Поэтому при выборе базиса БПФ из двух альтернативных (**C** или **T**) предпочтение следует отдать базису Уолша-Кули, как более просто синтезируемому.

ВЫВОДЫ

Ни один из классических базисов ДПФ Уолша, упорядоченных по Адамару, Качмажу или Пэли, не обеспечивает линейной связанности частотным шкалам процессора БПФ, что затрудняет их применение в системах, предназначенных для спектрального анализа дискретных сигналов. Разработанный на основе алгоритма БПФ по схеме Кули-Тьюки базис, названный базисом Уолша-Кули \mathbf{C} , является уникальным в том плане, что оказался единственным базисом Уолша, который доставляет линейную связанность частотным шкалам процессоров, ориентированных на спектральную обработку двоично-степенных выборочных совокупностей дискретных сигналов.

Во множестве кусочно-постоянных Уолшеподобных секвентных функций предложен новый базис, названный базисом Уолша-Тьюки \mathbf{T} , альтернативный базису Уолша-Кули \mathbf{C} , который, как и \mathbf{C} – базис, обеспечивает процессорам БПФ линейную связанность его частотным шкалам. Оба \mathbf{C} – и \mathbf{T} – базисы обладают одинаковыми амплитудно-частотными и противоположными фазо-частотными характеристиками, причём последнее означает, что если в некотором k – м выходном канале N – точечного процессора БПФ фаза отклика в базисе Уолша-Кули равна $\varphi_c(k)$, то в базисе Уолша-Тьюки $\varphi_t(k) = \varphi_c(N - k)$. Для практического применения \mathbf{C} – базис Уолша-Кули является более предпочтительным по сравнению \mathbf{T} – базисом Уолша-Тьюки, поскольку \mathbf{C} – базис вычисляется намного проще, чем \mathbf{T} – базис.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. М. Карповский, Э. Москалев, *Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств*, Ленинград: Энергия, 1973, 142 с.
- [2]. А. Трахтман, В. Трахтман, *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах*, М.: Сов. Радио, 1975, 208 с.
- [3]. Р. Блейхут, *Теория и практика кодов, контролирующей ошибки: Пер. с англ.*, М.: Мир, 1986, 576 с.
- [4]. А. Белецкий, "Криптографические приложения индикаторных матриц систем функций Уолша", *Захист інформації*, Том 18, № 1, С. 5-20, 2016.
- [5]. Г. Никитин, *Применение функций Уолша в сетевых системах связи с кодовым разделением каналов*, Санкт-Петербург: СПбГУАП, 2003, 86 с.
- [6]. Л. Залманзон, *Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях*, М.: Наука, 1989, 496 с.
- [7]. В. Логинов, "Функции Фурье и области их применения", *Зарубежная Радиозлектроника*, № 4, С. 73-101, 1973.

- [8]. Х. Хармут, *Теория секвентного анализа: основы и применения: Пер. с англ.* М. Мир, 1986, 576 с.
- [9]. М. Артемьев, Г. Гаев, Т. Кренкель, А. Скотников, "Алгоритм формирования симметричных систем функций Уолша", *Радиотехника и электроника*, № 7, С. 1432-1440, 1978.
- [10]. M. Hadamard, *Bull. Sci. Math*, P. 240-246, 1983.
- [11]. H. Andrews, J. Kane, "Kroneker matrices. Computer implementation and generalized spectra", *J. of the ACM*, v. 17, no. 2, pp. 260, 1970.
- [12]. И. Исмаилов, "Один подход к упорядочению систем дискретных функций Уолша", *Радиозлектроника*, № 1, С. 65-72, 2006.
- [13]. J. Cooley., J. Tukey, "An algorithm for the machine calculation of the complex Fourier series", *Mathematics Computation*, April 1965, v. 19, pp. 297-301.
- [14]. J. Walsh, "A closed set of normal orthogonal functions", *Amer. J. Math.*, v. 45, pp. 5-24, 1923.
- [15]. А. Шнейдер, "О рядах по функциям Вальша с монотонными коэффициентами", *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, Т. 12, С. 179-192, 1948.
- [16]. Paley, "R. E. A. C. A Remarkable Series of Orthogonal Functionsю. I, II", *Proc. Lond. Math. Soc.*, v. 34, pp. 241-279, 1932.
- [17]. А. Белецкий, *Комбинаторика кодов Грея*, Изд-во «КВЦ», 2003, 504 с.
- [18]. А. Белецкий, "Дискретные ортогональные базисы Виленкина-Крестенсона функций", *Palmarium Academic Publishing*, Germany, 2015, 232 с.
- [19]. М. Артемьев, П. Гаев, Т. Кренкель, А. Скотников, "Алгоритм формирования симметричных функций Уолша", *Радиотехника и электроника*, № 7, С. 1432-1440, 1978.
- [20]. А. Белецкий, Д. Навроцкий, "Синтез дискретных систем Уолше-подобных секвентных функций восьмого порядка", *Безпека інформації*, Т. 22, № 2, С. 163-174, 2016.
- [21]. C. Yen, "Walsh function and Gray code", *IEEE Trans*, EMC-13, no. 1, P. 68-73, 1971.
- [22]. A. Beletskiy, "Syntesis and analysis of system of Walsh-Cooly basis functions", *NIKON-2000: XIII International Conference*, Wroclaw, 2000.
- [23]. А. Белецкий, *Обобщённые коды Грея. Научная монография*, Palmarium Academic Publishing, Germany, 2014, 208 с.
- [24]. А. Білецький, О. Білецький, О. Кучер, "Синтез симметричных матриц Уолша за методом спрямованої перестановки базисних функцій", *Вісник НАУ*. № 3, С. 68-75, 2001.

ОПТИМАЛЬНІ УОЛША І УОЛШЕ-ПОДІБНІ БАЗИСИ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

У теорії і практиці завадостійкого кодування і стиснення аудіо і відео даних, криптографічного захисту інформації, в стільникових каналах зв'язку і в інших областях науки і техніки широкое застосування знаходять функціонально повні системи Уолша, що є окремими випадками

систем знакозмінних кусково-постійних секвентних функцій. Що стосується задач спектрального аналізу дискретних сигналів двійково-степеневого порядку (обсягу вибірки) найбільшу зацікавленість становлять ті системи Уолша, що використовуються в якості базисів дискретного перетворення Фур'є (ДПФ), які доставляють лінійну зв'язаність частотними шкалами процесорів ДПФ (і тому є оптимальними), під якими розуміються шкала нормованих частот вхідного сигналу і вихідна шкала частотних каналів процесора. Частотні шкали процесора ДПФ вважаються лінійно пов'язаними, якщо відгуки процесора з максимальними модулями і фіксованими фазами (позитивними чи негативними, але однаковими для всіх відгуків) розташовуються на бісектрисі ортогональної системи координат, утвореної частотними шкалами. Жоден з відомих класичних базисів Уолша, упорядкованих по Адамару, Качмаржу або Пелі, необхідної зв'язаності шкалам процесора ДПФ не забезпечують. В даному дослідженні розроблені унікальні базиси ДПФ, а саме, \mathbf{C} – базис Уолша-Кулі і альтернативний йому \mathbf{T} – базис Уолша-Тьюки, які виявляються єдиними з численних систем функцій Уолша і систем секвентних функцій, які як раз і доставляють лінійну зв'язаність частотними шкалами процесорів ДПФ. Обидва базиси мають однакові амплітудно-частотні, але протилежні фазо-частотні характеристики в тому плані, що якщо в деякому k – му вихідному каналі N – крапкового процесора ППФ фаза відгуку в \mathbf{C} – базисі Уолша-Кулі дорівнює $\varphi_c(k)$, то в базисі Уолша-Тьюки $\varphi_t(k) = \varphi_c(N - k)$. Для практичного застосування \mathbf{C} – базис Уолша-Кулі є кращим у порівнянні з \mathbf{T} – базисом Уолша-Тьюки, оскільки \mathbf{C} – базис обчислюється набагато простіше, ніж \mathbf{T} – базис.

Ключові слова: системи функцій Уолша, секвентні Уолше-подібні функції, лінійна зв'язаність частотних шкал процесора ДПФ, базис функцій Уолша-Кулі, базис функцій Уолша-Тьюки.

OPTIMAL WALES AND SUSPENSE-BASED BASES DISURITY TRANSFORMATION OF FOURIER

In the theory and practice of noise-immune encoding and compression of audio and video data, cryptographic information protection, in cellular communication channels and in other fields of science and technology, functionally complete Walsh systems that are a particular case of systems of alternating piecewise constant sequential functions are widely used. As for the problems of spectral analysis of discrete signals of binary-power order (sample size), those

Walsh systems used as the bases of the discrete Fourier transform (DFT), which deliver linear coupling to the frequency scales of the DFT processors (and therefore are optimal) are of greatest interest, under which mean the scale of the normalized frequencies of the input signal and the output scale of the frequency channels of the processor. The frequency scales of the DFT processor are considered to be linearly related if the processor responses with the maximum modules and fixed phases (positive or negative but identical for all responses) are located on the bisector of the orthogonal coordinate system formed by the frequency scales. None of the known classical Walsh bases ordered by Hadamard, Kaczmarz or Paley, the required connectivity to the DFT processor scales does not provide. In this study, unique DFT bases have been developed, namely, the Walsh-Coolie basis (\mathbf{C} – basis) and the alternative Walsh-Tukey basis (\mathbf{T} – basis), which are the only one of the many Walsh function systems and sequential function systems, which just cause linear coupling to the frequency scales of the DFT processors. Both bases have the same amplitude-frequency but opposite phase-frequency characteristics in the sense that if the response phase in the Walsh-Cooley base is equal $\varphi_c(k)$ in some k – output channel of the N – point-wise FFT processor, then in the Walsh-Tukey basis $\varphi_t(k) = \varphi_c(N - k)$. For practical applications, the Walsh-Cooley basis is more preferable compared to the Walsh-Tukey \mathbf{C} – basis, since - the basis is calculated much simpler than \mathbf{T} – the basis.

Keywords: Walsh function systems, sequential Walsh-like functions, linear coupling of the frequency scales of the DFT processor, a basis for Walsh-Cooley functions, a basis for Walsh-Tukey functions.

Белецкий Анатолий Яковлевич, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины, лауреат Гос. премии Украины в области науки и техники, профессор кафедры электроники Национального авиационного университета.

E-mail: abelnau@ukr.net.

Білецький Анатолій Якович, доктор технічних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, професор кафедри електроніки Національного авіаційного університету.

Beletsky Anatoly, Doctor of Science, Professor, Honored Scientist of Ukraine, Laureate of the State Prize of Ukraine in Science and Technology, Professor of Department Electronics of National Aviation University.