

УДК 62-752+62-755

Г.Б. Філімоніхін, проф., д-р. техн. наук, В.В. Гончаров, доц., канд. фіз.-мат. наук  
Кіровоградський національний технічний університет

## Диференціальні рівняння руху системи, складеної з незрівноваженого ротора з нерухомою точкою, корпусу і автобалансира

Отримані диференціальні рівняння руху системи, що складається із статично незрівноваженого ротора з нерухомою точкою, важкого в'язко-пружно закріпленого корпусу, в який встановлений ротор, і кульового чи роликового автобалансира для зрівноваження ротора. При цьому застосована методика складання спрощених диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами, заснована на припущенні про малість лінійних і кутових відхилень подовжньої осі ротора, і про малість маси дисбалансу і корегувальних вантажів в порівнянні з масою ротора.

**ротор, автобалансування, дисбаланс, автобалансири, диференціальні рівняння руху**

**Вступ.** В роботі [1] розроблена методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з пасивними автобалансирами (АБ), призначеними для зрівноваження роторів на ходу. Методика використовує загальні теореми динаміки і є застосовною для будь-яких систем вказаного типу. Але диференціальні рівняння руху системи, що одержуються за цією методикою, важко оглядові і майже не піддаються математичному аналізу через відсутність будь-яких спрощень при складанні цих рівнянь. Тому у роботі [2] була розроблена методика складання спрощених диференціальних рівнянь руху, які одержуються із застосуванням рівнянь Лагранжа II роду у припущенні мализни кутових і лінійних відхилень ротора та мализни маси дисбалансу і АБ відносно маси ротора. Також у цій роботі вищевказана методика була застосована для складання диференціальних рівнянь руху незрівноваженого ротора, встановленого у важкому в'язко-пружно закріпленому корпусі, який зрівноважують один чи два кульових АБ. У роботі [3] ця методика була застосована для складання і аналізу диференціальних рівнянь руху вентиляторної машини, складеної із статично незрівноваженої крильчатки, насадженої на ротор, що встановлений у важкому в'язко-пружно закріпленому корпусі, і яку статично зрівноважує кульовий чи роликовий АБ.

Метою цієї роботи є виведення за запропонованою у роботі [2] методикою диференціальних рівнянь руху системи, складеної із статично незрівноваженого ротора, що має нерухому точку і встановлений у важкому в'язко-пружному закріпленому корпусі та статично зрівноважується кульовим чи роликовим АБ.

**Опис моделі.** Осесиметричний ротор масою  $m_p$  встановлений у корпусі, масою  $m_k$  із можливістю повороту навколо власної подовжньої осі, яка є його головною центральною віссю інерції (рис. 1). Корпус утримують опори: шарнірна – у точці  $O$ , завдяки якій ротор має нерухому точку  $O$  на подовжній осі та в'язко-пружні.

Нерухома прямокутна система координат  $Oxyz$  введена для положення статичної рівноваги системи: вісь  $z$  спрямована по подовжній осі ротора, осі  $x$ ,  $y$  спрямовані паралельно головним напрямкам еквівалентних в'язко-пружних недеформованих опор так, що система координат  $Oxyz$  права. Рухомою системою координат  $Ouvw$  жорстко

зв'язана з корпусом, а  $O\xi\eta\zeta$  – з ротором. У вихідному положенні роторної системи осі всіх трьох систем координат співпадають (рис. 1, а).

Припускається, що центр ваги ротора знаходиться на його подовжній осі, а корпуса може знаходитись і поза віссю.

Відносно осей системи  $Ouvw$  ротор і корпус мають такі тензори інерції

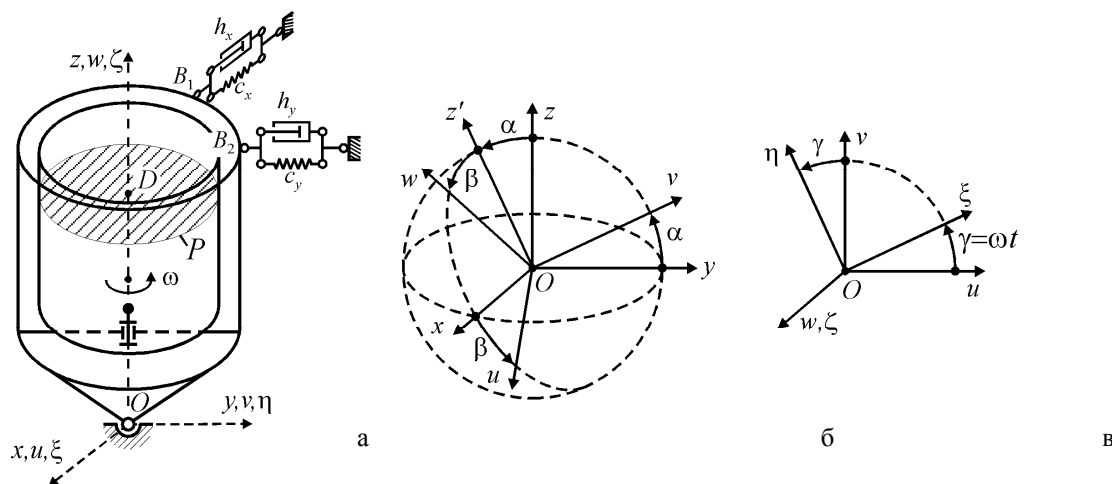
$$\mathbf{J}_p = \text{Diag}(A_p, A_p, C_p), \quad \mathbf{J}_k = \begin{pmatrix} J_u^{(k)} & -J_{uv}^{(k)} & -J_{uw}^{(k)} \\ -J_{uv}^{(k)} & J_v^{(k)} & -J_{vw}^{(k)} \\ -J_{uw}^{(k)} & -J_{vw}^{(k)} & J_w^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

В загальному випадку корпус утримують  $n$  в'язко-пружних, початково деформованих опор. Радіус-вектори їх точок прикладання  $\mathbf{r}_l = (x_l, y_l, z_l)^T$ ,  $l = \overline{1, n}$ ; вектори напрямку дії  $\mathbf{e}_l = (u_l, v_l, w_l)^T$ ,  $|\mathbf{e}_l| = 1$ ,  $l = \overline{1, n}$ ; початкові деформації  $\Delta s_{l0}$ ,  $l = \overline{1, n}$ . В'язко-пружні властивості опор характеризують коефіцієнти в'язкості  $h_l$  і жорсткості  $c_l$ ,  $l = \overline{1, n}$ . Всі ці опори можна замінити двома еквівалентними в'язко-пружними недеформованими опорами, радіус-вектори точок прикладання яких  $\mathbf{r}_{B_1} = (-x_B, 0, z_B)^T$ ,  $\mathbf{r}_{B_2} = (0, y_B, z_B)^T$ ; вектори напрямку дії  $\mathbf{e}_{B_1} = (1, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{e}_{B_2} = (0, -1, 0)^T$ , що характеризуються коефіцієнтами в'язкості  $h_x, h_y$  та жорсткості  $c_x, c_y$  (рис. 1, а).

Як це прийнято у теорії роторних систем з АБ, при складанні диференціальних рівнянь руху системи дією сил ваги на систему нехтуємо.

У площині  $P$  ( $\zeta = d$ ) ротора на відстані  $r_0$  від його подовжньої осі знаходиться точкова маса  $m_0$ , яка утворює статичний дисбаланс. У цій площині ротор зрівноважує АБ, складений з  $n$  куль чи циліндричних роликів. Маса  $i$ -го КВ  $m_i$  і він котиться без ковзання по кільцевій доріжці радіуса  $r_i$ .

Будемо вважати, що КВ мають радіуси, що набагато менші за радіуси їх бігових доріжок. Також вважаємо, що КВ при знаходженні на одній доріжці не заважають рухатися один одному. Модель руху ротора і корпуса наведена на рис. 1.



а – вихідне положення системи; б – поворот ротора разом з корпусом на кути  $\alpha, \beta$ ;  
в – поворот ротора відносно корпуса на кут  $\gamma$

Рисунок 1 – Кінематика руху ротора і корпуса

Спочатку відбуваються повороти корпуса з ротором навколо точки  $O$  на кути Резаля  $\alpha, \beta$  (рис. 1, б) при цьому осі системи  $Oxyz$  переходять у осі системи  $Ouvw$ .

Потім – відбувається поворот ротора навколо подовжньої осі  $w = \zeta$  на кут  $\gamma = \omega t$  (рис. 1, в), внаслідок чого осі системи  $Ouvw$  переходять у осі системи  $O\xi\eta\zeta$ . Припускається, що ротор обертається відносно корпусу із сталою кутовою швидкістю  $\omega$ .

Положення маси дисбалансу чи КВ у площині  $P$  визначатимемо абсолютними кутами  $\varphi_i, /i = \overline{0, n}/$ , які відраховуються між віссю  $u$  і відносними радіус-векторами  $\vec{r}_i$  маси дисбалансу чи центрів мас КВ (рис. 2, а), або відносними кутами  $\psi_i$ , які відраховуються між віссю  $\xi$  і відносними радіус-векторами  $\vec{r}_i$  (рис. 2, б). Абсолютні і відносні кути зв'язані наступним чином

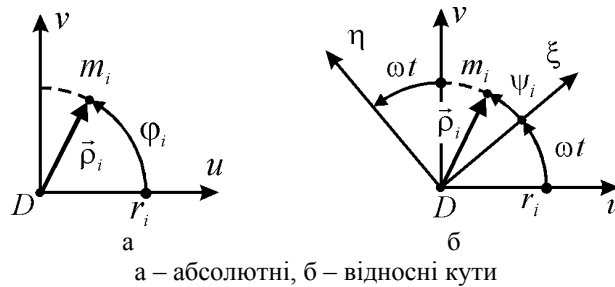


Рисунок 2 – Кінематика руху КВ, маси дисбалансу

$$\varphi_i = \omega t + \psi_i, \quad /i = \overline{0, n}/. \quad (1.2)$$

Відносному рухові КВ перешкоджають сили в'язкого опору

$$F_i^{(on)} = h_i u_i, \quad /i = \overline{1, n}/, \quad (1.3)$$

де  $h_i$  – коефіцієнт сил в'язкого опору;

$u_i$  – модуль відносної швидкості КВ (швидкість центра мас КВ відносно ротора)

Диференціальні рівнянь руху системи складаються із застосуванням рівнянь Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}, \quad q = (\alpha, \beta, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^T, \quad (1.4)$$

де  $T$  – кінетична;

$\Pi$  – потенціальна енергії системи;

$\Phi$  – дисипативна функція Релея;

$q$  – вектор узагальнених координат, що визначають рух системи, з використанням методики, запропонованої в роботі [2].

Відразу складаються спрощені диференціальні рівняння руху системи у припущеннях роботи [1]:

$$|\alpha|, |\beta|, |x|, |y|, |z| \ll 1; \quad |\dot{\alpha}|, |\dot{\beta}|, |\dot{x}|, |\dot{y}|, |\dot{z}| \ll 1; \quad \sum_{i=0}^n m_i \ll m_p, m_k. \quad (1.5)$$

**Кінетична енергія системи.** Вона є сумою кінетичних енергій окремих тіл і точок, що складають систему:

$$T = T_p + T_k + \sum_{i=0}^n T_i, \quad (2.1)$$

де  $T_p$  – кінетична енергія ротора;

$T_k$  – кінетична енергія масивного корпусу;

$T_i$  – кінетична енергія  $i$ -го КВ чи маси дисбалансу.

**Кінетична енергія ротора** є кінетичною енергією обертального руху ротора

навколо нерухомої точки  $O$ :

$$T_p = T_p^{(o\dot{o})} = \boldsymbol{\omega}_p^T \mathbf{J}_p \boldsymbol{\omega}_p / 2. \quad (2.2)$$

Кутова швидкість обертання ротора в проекціях на рухомі осі  $Ouvw$

$$\boldsymbol{\omega}_p \approx (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \omega + \dot{\alpha}\beta)^T. \quad (2.3)$$

Із точністю до величин другого порядку малості включно, маємо

$$T_p \approx [A_p(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + C_p(\omega^2 + 2\omega\dot{\alpha}\beta)]/2. \quad (2.4)$$

**Кінетична енергія корпусу** є кінетичною енергією обертального руху навколо нерухомої точки  $O$ :

$$T_k = T_k^{(o\dot{o})} = \boldsymbol{\omega}_k^T \mathbf{J}_k \boldsymbol{\omega}_k / 2. \quad (2.5)$$

Кутова швидкість обертання корпусу в проекціях на осі системи  $Ouv\zeta$

$$\boldsymbol{\omega}_k \approx (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, 0)^T. \quad (2.6)$$

Тоді, враховуючи (1.2), маємо

$$T_k \approx (J_u^{(k)}\dot{\alpha}^2 - 2J_{uv}^{(k)}\dot{\alpha}\dot{\beta} + J_v^{(k)}\dot{\beta}^2)/2. \quad (2.7)$$

**Кінетична енергія  $i$ -го КВ, чи дисбалансу.** Для КВ визначаємо кінетичну енергію як суму кінетичних енергій поступального руху КВ разом з центром мас і обертального руху навколо центра

$$T_i = T_i^{(noc)} + T_i^{(o\dot{o})}.$$

Кінетична енергія поступального руху КВ, чи кінетична енергія маси дисбалансу визначаються за формулами

$$T_i^{(noc)} = m_i v_i^2 / 2, \quad /i = \overline{0, n}/. \quad (2.8)$$

В проекціях на осі системи  $Ouvw$  маса  $m_i$  має координати і кутову швидкість обертання навколо точки  $O$ :

$$\boldsymbol{\rho}_i = (r_i \cos \varphi_i, r_i \sin \varphi_i, d)^T, \quad \boldsymbol{\omega}_i \approx (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}_i)^T, \quad /i = \overline{0, n}/. \quad (2.9)$$

За формулою Ейлера швидкість  $i$ -ї точки

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\rho}_i, \quad /i = \overline{0, n}/, \quad (2.10)$$

звідки із точністю до величин першого порядку малості включно

$$\mathbf{v}_i \approx (z_D \dot{\beta} - \dot{\varphi}_i r_i \sin \varphi_i, -z_D \dot{\alpha} + \dot{\varphi}_i r_i \cos \varphi_i, \dot{\alpha} r_i \sin \varphi_i - \dot{\beta} r_i \cos \varphi_i)^T.$$

Тоді з урахуванням малості переміщень ротора і маси КВ та дисбалансу, із точністю до величин другого порядку малості включно

$$T_i^{(noc)} \approx m_i r_i \dot{\varphi}_i [\dot{\varphi}_i r_i - 2d(\dot{\beta} \sin \varphi_i + \dot{\alpha} \cos \varphi_i)]/2, \quad /i = \overline{0, n}/. \quad (2.11)$$

Кінетична енергія обертального руху  $i$ -го КВ, чи дисбалансу з точністю до величин другого порядку малості включно рівна

$$T_i^{(o\dot{o})} \approx k_i m_i r_i^2 \dot{\varphi}_i^2 / 2,$$

$$\text{де } k_i = \begin{cases} 2/5, & \text{для куль,} \\ 1/2, & \text{для циліндричних роликів,} \\ 0, & \text{для дисбалансу.} \end{cases}$$

Таким чином, кінетична енергія  $i$ -го КВ

$$T_i \approx m_i r_i \dot{\varphi}_i [(1 + k_i) \dot{\varphi}_i r_i - 2d(\dot{\beta} \sin \varphi_i + \dot{\alpha} \cos \varphi_i)]/2.$$

Сумарна кінетична енергія маси дисбалансу і КВ

$$T_{\Sigma_i} \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (1 + k_i) m_i r_i^2 \dot{\varphi}_i^2 - d \left( \dot{\alpha} \sum_{i=0}^n m_i r_i \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i + \dot{\beta} \sum_{i=0}^n m_i r_i \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i \right).$$

Введемо у розглядання узагальнені координати  $s_u, s_v$ , що визначають проекції

сумарного дисбалансу точкової маси і куль на осі змінних  $u, v$  відповідно

$$s_u = \sum_{i=0}^n m_i r_i \cos \varphi_i, \quad s_v = \sum_{i=0}^n m_i r_i \sin \varphi_i, \quad (2.12)$$

тоді

$$T_{\Sigma_i} \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (1 + k_i) m_i r_i^2 \dot{\varphi}_i^2 + d(-\dot{\alpha} \dot{s}_v + \dot{\beta} \dot{s}_u).$$

**Кінетична енергія системи** з точністю до величин другого порядку малості включно має вигляд

$$T \approx [A\dot{\alpha}^2 + B\dot{\beta}^2 - 2J_{uv}^{(k)}\dot{\alpha}\dot{\beta} + C_p(\omega^2 + 2\omega\dot{\alpha}\dot{\beta})]/2 + d(-\dot{\alpha}\dot{s}_v + \dot{\beta}\dot{s}_u) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (1 + k_i) m_i r_i^2 \dot{\varphi}_i^2, \quad (2.13)$$

де  $A = J_u^{(k)} + A_p$ ,  $B = J_v^{(k)} + A_p$ .

**Потенціальна енергія системи, дисипативна функція Релея, узагальнені сили.**

**Потенціальна енергія, накопичена опорами.**

В загальному випадку для  $n$  в'язко-пружних деформованих опор

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n c_l [(\Delta s_l)^2 - (\Delta s_{l0})^2], \quad (3.1)$$

де  $\Delta s_l - \Delta s_{l0} = \mathbf{e}_l^T \cdot \Delta \mathbf{r}_l$  – переміщення точки прикладання  $l$ -ї опори в напрямку її дії.

Визначимо  $\Delta \mathbf{r}_l$ :

$$\Delta \mathbf{r}_l = (\mathbf{A}_{\alpha\beta} - \mathbf{E}) \mathbf{r}_l, \quad (3.2)$$

де  $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$  – матриця перетворення координат при переході від осей  $Ouvw$  до осей  $Oxyz$

$$\mathbf{A}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Отже, маємо

$$\Delta \mathbf{r}_l = (\beta z_l, -\alpha z_l, -\beta x_l + \alpha y_l)^T. \quad (3.4)$$

Таким чином

$$\Delta s_l = \Delta s_{l0} + (u_l, v_l, w_l) \cdot (\beta z_l, -\alpha z_l, -\beta x_l + \alpha y_l)^T = \Delta s_{l0} + \alpha x_l^* - \beta y_l^*, \quad (3.5)$$

де  $x_l^* = y_l w_l - z_l v_l$ ,  $y_l^* = x_l w_l - z_l u_l$ .

Введемо вектори  $\mathbf{v} = (\alpha, \beta)^T$ ,  $\mathbf{a}_l = (x_l^*, y_l^*)^T$ . Тоді  $\Delta s_l = \Delta s_{l0} + \mathbf{a}_l^T \cdot \mathbf{v}$  і потенціальну енергію можна записати у вигляді

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n c_l [2\Delta s_{l0} (\mathbf{a}_l^T \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{a}_l^T \cdot \mathbf{v})^2],$$

або

$$\Pi = (c_{11}\alpha^2 + 2c_{12}\alpha\beta + c_{22}\beta^2 + 2C_1\alpha + 2C_2\beta)/2, \quad (3.6)$$

$$\text{де } c_{ij} = \sum_{l=1}^n c_l a_{li} a_{lj}, \quad C_i = \sum_{l=1}^n \Delta s_{l0} c_l a_{li}, \quad i, j = \overline{1, 2}. \quad (3.7)$$

Для еквівалентних опор маємо:

$$n = 2, \quad c_1 = c_x, \quad c_2 = c_y, \quad \mathbf{a}_1 = (0, z_B)^T, \quad \mathbf{a}_2 = (z_B, 0)^T, \quad \Delta s_{10} = \Delta s_{20} = 0; \quad (3.8)$$

$$\Pi = (c_x \beta^2 + c_y \alpha^2) z_B^2 / 2. \quad (3.9)$$

**Дисипативна функція Релея.** В загальному випадку маємо для  $n$  в'язко-пружних деформованих опор

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n h_l (\Delta \dot{s}_{B_l})^2, \quad (3.10)$$

де  $\Delta \dot{s}_{B_l} = \mathbf{a}^T \cdot \dot{\mathbf{v}}$ .

Тому

$$\Phi = (h_1 \dot{\alpha}^2 + 2h_{12} \dot{\alpha} \dot{\beta} + h_{22} \dot{\beta}^2) / 2, \quad (3.11)$$

$$\text{де } h_{ij} = \sum_{l=1}^n h_l a_{l_i} a_{l_j}, \quad i, j = \overline{1, 2}. \quad (3.12)$$

Для еквівалентних опор, враховуючи (3.8), маємо

$$\Phi = (h_x \dot{\beta}^2 + h_y \dot{\alpha}^2) z_B^2 / 2. \quad (3.13)$$

### Диференціальні рівняння руху системи

Підставивши (2.13) і (3.6), (3.11) або (3.9), (3.13) в (1.4) отримаємо відповідні диференціальні рівняння руху системи

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} - J_{uv}^{(k)} \ddot{\beta} + \omega C_p \dot{\beta} - d\dot{s}_v + h_{11} \dot{\alpha} + h_{12} \dot{\beta} + c_{11} \alpha + c_{12} \beta + C_1 &= 0; \\ B\ddot{\beta} - J_{uv}^{(k)} \ddot{\alpha} - \omega C_p \dot{\alpha} + d\dot{s}_u + h_{12} \dot{\alpha} + h_{22} \dot{\beta} + c_{12} \alpha + c_{22} \beta + C_2 &= 0, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} - J_{uv}^{(k)} \ddot{\beta} + \omega C_p \dot{\beta} - d\dot{s}_v + h_y z_B^2 \dot{\alpha} + c_y z_B^2 \alpha &= 0; \\ B\ddot{\beta} - J_{uv}^{(k)} \ddot{\alpha} - \omega C_p \dot{\alpha} + d\dot{s}_u + h_x z_B^2 \dot{\beta} + c_x z_B^2 \beta &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$m_i r_i [(1 + k_i) r_i \ddot{\phi}_i - z_D (\ddot{\alpha} \cos \phi_i + \ddot{\beta} \sin \phi_i)] = -h_i r_i^2 (\dot{\phi}_i - \omega), \quad / i = \overline{1, n} / . \quad (4.2)$$

Система рівнянь (4.1), (4.2) є системою  $(2+n)$  звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку відносно узагальнених координат  $\alpha, \beta, \phi_i, / i = \overline{1, n} /$ .

Введемо проекції прискорення точки  $D$  на осі змінних  $u, v$

$$\ddot{u}_D \approx d\ddot{\beta}, \quad \ddot{v}_D \approx -d\ddot{\alpha}, \quad (4.3)$$

тоді диференціальні рівняння руху куль (4.2) приймуть вигляд:

$$m_i r_i [(1 + k_i) r_i \ddot{\phi}_i - \ddot{u}_D \sin \phi_i + \ddot{v}_D \cos \phi_i] + h_i r_i^2 (\dot{\phi}_i - \omega) = 0, \quad / i = \overline{1, n} / . \quad (4.4)$$

**При використанні відносних кутів**  $\psi_i = \phi_i - \omega t$  диференціальні рівняння руху куль (4.4) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} m_i (1 + k_i) r_i^2 \ddot{\psi}_i + h_i r_i^2 \dot{\psi}_i &= \\ = m_i r_i [(\ddot{v}_D \sin \omega t + \ddot{u}_D \cos \omega t) \sin \psi_i + (\ddot{u}_D \sin \omega t - \ddot{v}_D \cos \omega t) \cos \psi_i], \quad / i = \overline{1, n} / . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Введемо проекції дисбалансу на осі змінних  $\xi, \eta$ :

$$s_\xi = \sum_{i=1}^n m_i r_i \cos \psi_i + m_0 r_0, \quad s_\eta = \sum_{i=1}^n m_i r_i \sin \psi_i. \quad (4.6)$$

Тоді

$$s_u = s_\xi \cos \omega t - s_\eta \sin \omega t, \quad s_v = s_\xi \sin \omega t + s_\eta \cos \omega t. \quad (4.7)$$

Зробимо заміну координат, що визначають положення точки  $D$ :

$$u_D = \xi_D \cos \omega t - \eta_D \sin \omega t, \quad v_D = \xi_D \sin \omega t + \eta_D \cos \omega t, \quad (4.8)$$

тоді диференціальні рівняння руху куль (4.5) приймуть вигляд:

$$m_i (1 + k_i) r_i^2 \ddot{\psi}_i + h_i r_i^2 \dot{\psi}_i = m_i r_i (a_{D\xi} \sin \psi_i - a_{D\eta} \cos \psi_i), \quad / i = \overline{1, n} / , \quad (4.9)$$

$$\text{де } a_{D\xi} = \ddot{\xi}_D - 2\omega \dot{\eta}_D - \omega^2 \xi_D, \quad a_{D\eta} = \ddot{\eta}_D + 2\omega \dot{\xi}_D - \omega^2 \eta_D \quad - \quad (4.10)$$

– проекції прискорення точки  $D$  на осі змінних  $\xi, \eta$ .

Зробимо перетворення системи (4.1). Додамо обидва рівняння, помноживши їх почергово спочатку відповідно на  $\cos \omega t$  і  $\sin \omega t$ , а потім – на  $\sin \omega t$  і  $-\cos \omega t$ :

$$\begin{aligned} & A\ddot{\alpha} \cos \omega t + B\ddot{\beta} \sin \omega t - J_{uv}^{(k)}(\ddot{\alpha} \sin \omega t + \ddot{\beta} \cos \omega t) + z_B^2(h_y \dot{\alpha} \cos \omega t + h_x \dot{\beta} \sin \omega t) + \\ & + z_B^2(c_y \alpha \cos \omega t + c_x \beta \sin \omega t) - \omega C_p(\dot{\alpha} \sin \omega t - \dot{\beta} \cos \omega t) + d(\ddot{s}_u \sin \omega t - \ddot{s}_v \cos \omega t) = 0; \\ & A\ddot{\alpha} \sin \omega t - B\ddot{\beta} \cos \omega t - J_{uv}^{(k)}(\ddot{\alpha} \cos \omega t - \ddot{\beta} \sin \omega t) + z_B^2(h_y \dot{\alpha} \sin \omega t - h_x \dot{\beta} \cos \omega t) + \\ & + z_B^2(c_y \alpha \sin \omega t - c_x \beta \cos \omega t) + \omega C_p(\dot{\alpha} \cos \omega t + \dot{\beta} \sin \omega t) - d(\ddot{s}_u \cos \omega t + \ddot{s}_v \sin \omega t) = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Надалі розглянемо випадок ізотропних в'язко-пружних опор ( $c_y = c_x, h_y = h_x$ ) і осесиметричного корпуса ( $B = A, J_{uv}^{(k)} = 0$ ).

Зробивши в (4.11) заміну

$$\alpha = \delta \cos \omega t - \theta \sin \omega t, \quad \beta = \delta \sin \omega t + \theta \cos \omega t, \quad (4.12)$$

отримаємо

$$\begin{aligned} & A(\ddot{\delta} - 2\omega\dot{\theta} - \omega^2\delta) + z_B^2 h_x(\dot{\delta} - \omega\theta) + z_B^2 c_x \delta + \omega C_p(\dot{\theta} + \omega\delta) - (\ddot{s}_\eta + 2\omega\dot{s}_\xi - \omega^2 s_\eta)d = 0; \\ & A(\ddot{\theta} + 2\omega\dot{\delta} - \omega^2\theta) + z_B^2 h_x(\dot{\theta} + \omega\delta) + z_B^2 c_x \theta - \omega C_p(\dot{\delta} - \omega\theta) + (\ddot{s}_\xi - 2\omega\dot{s}_\eta - \omega^2 s_\xi)d = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Перейдемо в (4.9) до змінних  $\delta, \theta$ . З (4.10), враховуючи рівності (4.3), (4.8), (4.12) та вибір систем координат  $Oxyz, Ouvw, O\xi\eta\zeta$ , отримуємо

$$a_{D\xi} = (\dot{\theta} + 2\omega\dot{\delta} - \omega^2\theta)d, \quad a_{D\eta} = -(\dot{\delta} - 2\omega\dot{\theta} - \omega^2\delta)d, \quad (4.14)$$

і рівняння (4.9) приймає вигляд

$$m_i(1+k_i)r_i^2\ddot{\psi}_i + h_i r_i^2\dot{\psi}_i = dm_i r_i [( \ddot{\theta} + 2\omega\dot{\delta} - \omega^2\theta) \sin \psi_i + (\dot{\delta} - 2\omega\dot{\theta} - \omega^2\delta) \cos \psi_i], \quad /i = \overline{1, n}/. \quad (4.15)$$

Система рівнянь (4.13), (4.15) є системою  $(2+n)$  звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку відносно узагальнених координат  $\delta, \theta, \psi_i, /i = \overline{1, n}/$ .

**Про дослідження стійкості основних рухів.** На основних рухах ротор зрівноважений і обертається навколо власної подовжньої осі і тому узагальнені координати ротора і дисбалансу дорівнюють 0:

$$\delta = \theta = 0, \quad s_\xi = s_\eta = 0 \quad (\alpha = \beta = 0, \quad s_u = s_v = 0). \quad (5.1)$$

Стійкість основних рухів можна досліджувати за цими узагальненими координатами. Але система рівнянь (4.13) чи (4.1) – незамкнена. До неї ще треба додати мінімальну кількість рівнянь, що є комбінаціями диференціальних рівнянь руху куль.

У випадку однакових куль, що рухаються по одній доріжці, рівняння (4.15) приймають вигляд

$$m(1+k)r^2\ddot{\psi}_i + hr^2\dot{\psi}_i = mr(a_{D\xi} \sin \psi_i - a_{D\eta} \cos \psi_i), \quad /i = \overline{1, n}/. \quad (5.2)$$

Помножимо кожне рівняння в (5.2) по черзі на  $\sin \psi_i$  і  $\cos \psi_i$  та додамо відповідні рівняння. Після перетворень одержимо такі рівняння

$$\begin{aligned} (1+k)\ddot{s}_\xi + \frac{h}{m}\dot{s}_\xi &= m \left( -a_{D\xi} \sum_{i=1}^n \sin^2 \psi_i + a_{D\eta} \sum_{i=1}^n \cos \psi_i \sin \psi_i - (1+k)r \sum_{i=1}^n \dot{\psi}_i^2 \cos \psi_i \right); \\ (1+k)\ddot{s}_\eta + \frac{h}{m}\dot{s}_\eta &= m \left( a_{D\xi} \sum_{i=1}^n \sin \psi_i \cos \psi_i - a_{D\eta} \sum_{i=1}^n \cos^2 \psi_i - (1+k)r \sum_{i=1}^n \dot{\psi}_i^2 \sin \psi_i \right), \quad /i = \overline{1, n}/. \end{aligned}$$

В околі певного усталеного руху вони лінеаризуються і приймають вигляд

$$\begin{aligned} (1+k)\ddot{s}_\xi + \frac{h}{m}\dot{s}_\xi &= m \left( -a_{D\xi} \sum_{i=1}^n \sin^2 \tilde{\psi}_i + a_{D\eta} \sum_{i=1}^n \cos \tilde{\psi}_i \sin \tilde{\psi}_i \right); \\ (1+k)\ddot{s}_\eta + \frac{h}{m}\dot{s}_\eta &= m \left( a_{D\xi} \sum_{i=1}^n \sin \tilde{\psi}_i \cos \tilde{\psi}_i - a_{D\eta} \sum_{i=1}^n \cos^2 \tilde{\psi}_i \right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

де  $\tilde{\psi}_i, /i = \overline{1, n}/$  – сталі значення кутів, що визначають певний основний усталений рух із сім’ї основних рухів. Ці рівняння замикають систему рівнянь (4.13).

**Висновки.** Проведені дослідження дозволяють зробити такі висновки.

1. Рух механічної системи, складеної із статично неврівноваженого ротора з нерухомою точкою, важкого в'язко-пружно закріпленого корпуса, в який встановлений ротор, і  $n$  кульового чи роликового АБ для зрівноваження ротора описується системою  $(n+2)$  спрощених звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку.

2. Ці рівняння застосовні у випадку, коли подовжня вісь ротора має невеликі відхилення і маса КВ і маси дисбалансу набагато менші за масу ротора і корпуса.

3. У випадку осесиметричного корпуса і однакових КВ стійкість основних рухів системи можна досліджувати за чотирма узагальненими координатами, що визначають кутове положення подовжньої осі ротора і його статичну незрівноваженість у двох взаємно перпендикулярних напрямках. Вигляд і кількість цих рівнянь не залежать від кількості КВ в АБ.

## Список літератури

1. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами: Монографія (за спеціальністю 05.02.09 - динаміка та міцність машин). – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
2. Філімоніхін Г.Б. Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус - автобалансир / Філімоніхін Г.Б., Гончаров В.В. // Збірник наукових праць КНТУ.- 2009.- Вип. 22.– С. 357–363.
3. Яцун В.В. Математична модель зрівноваження кульовими автобалансирами крильчатки осьового вентилятора / Яцун В.В. // Вісник гірничого університету.- 2009. - №10.– С. 45–51.

*Г. Филimoniхин, В. Гончаров*

**Дифференциальные уравнения движения системы, состоящей из неуравновешенного ротора с неподвижной точкой, корпуса и автобалансира**

Составлены дифференциальные уравнения движения системы, состоящей из статически неуравновешенного ротора с неподвижной точкой, тяжелого вязко-упруго закрепленного корпуса, в который установлен ротор, и шарового автобалансира для уравновешивания ротора. При этом применена методика составления упрощенных дифференциальных уравнений движения роторных систем с автобалансирами, основанная на предположении о малости линейных и угловых отклонений продольной оси ротора и о малости массы дисбаланса и корректирующих грузов по сравнению с массой ротора.

*G. Filimonikhin, V. Goncharov*

**The differential equations of motion of the system consisting of unbalancing rotor with a fixed point, of corps and autobalancer**

Are obtained the differential equations of motion of the system consisting of statically unstable rotor with a fixed point, heavy viscid-elastic resilient corps which a rotor is set in, and ball autobalancer for balancing of rotor. Were applied the method of drafting of the simplified differential equations of motion of the rotor systems with autobalancer, which based on supposition about the trifle of linear and angular rejections of longitudinal axis of rotor, and about the trifle of mass of unbalance and correcting masses on comparison with mass of rotor.

Одержано 23.11.09