

УДК 631.356.2

**І.В. Головач, д-р техн. наук, О.М. Черниш, канд. техн. наук, М.Г. Березовий, канд. техн. наук**

*Національний університет біоресурсів і природокористування України*

**В.І. Солтисюк, канд. техн. наук**

*Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України “Бережанський агротехнічний інститут”*

## Застосування рівнянь Ейлера при дослідженні вібраційного викопування коренеплодів

Побудована нова математична модель вібраційного викопування коренеплоду. На підставі застосувань рівнянь Ейлера отримана система диференціальних рівнянь, яка дозволяє аналітично досліджувати вказаний технологічний процес.

**вібраційне викопування, коренеплод, рівняння Ейлера, пружне середовище**

**Вступ.** Дослідження нових технологічних процесів та розробка вдосконалених робочих органів для викопування коренеплодів з ґрунту є актуальною задачею галузі буряківництва, оскільки саме збирання коренеплодів є однією з найбільш трудомістких та енергомістких його операцій. Застосування при викопуванні коренеплодів з ґрунту вібраційних зусиль обумовлює найменші затрати енергії на руйнування ґрунту, що оточує коренеплоди, і сприяє меншим їх втратам та пошкодженню при збиранні. Тому саме цей технологічний процес потребує докладного аналітичного дослідження та подальшої розробки і впровадження вдосконалених вібраційних викопуючих робочих органів.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Фундаментальним аналітичним дослідженням процесу вібраційного викопування коренеплодів цукрових буряків слід вважати роботу [1], проте моделі вібраційного вилучення коренеплоду з ґрунту тут нажалі не було наведено.

Подальші аналітичні дослідження коливань тіла коренеплоду, закріпленого у ґрунті, було опубліковано у праці [2]. Однак, безпосередньо процес вилучення цукрових буряків з ґрунту, як вказано в цій роботі, досліджується за додатково складеними рівняннями кінестатики, які дозволили знайти умови повного його вилучення з ґрунту.

В роботі [3] побудовано функціонал Остроградського – Гамільтона, що описує вільні поперечні коливання тіла коренеплоду, закріпленого нижнім кінцем у ґрунті, в разі, коли збурювальні сили прикладені до нього у поперечно-горизонтальній площині.

У ґрунтовній аналітичній праці [4] прийняті основні положення і допущення, що наведені у попередніх роботах [2, 3]. Однак, моделі вібраційного викопування коренеплоду цукрового буряку з ґрунту тут також не наведено.

Подальші розробки теорії вібраційного викопування коренеплодів при наданні їм збурювальних зусиль саме у повздовжньо-вертикальній площині були представлені у праці [5]. Однак, у подальшому виникає необхідність окремо розглянути динамічну систему коренеплід – викопуючий робочий орган з метою дослідження як процесу коливань коренеплоду у ґрунті так і його безпосереднього вилучення з ґрунту як твердого тіла, що відбувається під дією вібраційного викопуючого робочого органу, що здійснює коливання у повздовжньо-вертикальній площині та внаслідок його поступального руху.

**Мета дослідження.** Побудувати математичну модель безпосереднього вилучення коренеплодів з ґрунту при вібраційному викопуванні.

**Предмет дослідження.** Перейдемо до докладного теоретичного дослідження першого етапу вилучення коренеплоду, коли коренеплід ще міцно зв'язаний з ґрунтом.

У цьому випадку коренеплід при захваті його вібраційним викопуючим робочим органом, почне здійснювати коливальний рух у ґрунті як тверде тіло у пружному середовищі, оскільки на цьому етапі ґрунт, що оточує коренеплід, можна вважати пружним середовищем.

Зв'яжемо з вібраційним викопуючим робочим органом прямокутну декартову систему координат  $O_1x_1y_1z_1$ , центр  $O_1$  якої знаходиться посередині звуженого русла копача, вісь  $O_1x_1$  співпадає з напрямком поступального руху копача, вісь  $O_1z_1$  має напрямок вгору, а вісь  $O_1y_1$  спрямована у правий бік копача (рис. 1). Дані коливання необхідно розглядати відносно даної нерухомої системи координат  $O_1x_1y_1z_1$ . Введемо рухому систему координат  $Oxyz$ , жорстко зв'язану з коренеплодом, початок якої знаходиться в точці закріплення  $O$ , вісь  $Oz$  напрямлена вздовж осі симетрії коренеплоду, осі  $Ox$  і  $Oy$  розташовані у площині, перпендикулярній осі  $Oz$  (див. рис. 1).

Крім того, для опису поворотів коренеплоду відносно точки закріплення  $O$  необхідно ввести ще одну прямокутну декартову систему координат  $O_2x_2y_2z_2$ , як це показано на рис. 1.

Оскільки під час захвату коренеплоду вібраційним викопуючим робочим органом останній рухається поступально у напрямку осі  $O_1x_1$  ( $O_1x_2$ ), то коренеплід відхилиться від вертикального положення (від осі  $Oz_2$ ) на деякий кут  $\psi$  по ходу руху копача. Крім того, в загальному випадку, захват коренеплоду робочим органом може бути несиметричним. Якщо один з лемешів здійснить безпосередній контакт з коренеплодом, а другий – через деякий шар розпушеного ґрунту, то, внаслідок деформації даного шару ґрунту, коренеплід відхилиться від вертикального положення в поперечному напрямку на деякий кут  $\theta$ .

До того ж, внаслідок різниці крутних моментів з боку безпосереднього контакту коренеплоду з одним лемешем та з боку контакту з другим лемешем через деякий шар ґрунту, може здійснюватись поворот коренеплоду на деякий кут  $\phi$  навколо осі  $Oz$ .

Отже, коренеплід здійснює поворот навколо деякої лінії  $OH$  (лінії вузлів) на кут  $\theta$ , поворот навколо осі  $Oz_2$  на кут  $\psi$  та поворот навколо осі  $Oz$  на кут  $\phi$ .

Таким чином, введені кути повороту коренеплоду під час вилучення є кутами Ейлера, причому кут  $\theta$  має назву кута нутації, кут  $\psi$  – кута прецесії, кут  $\phi$  – кута власного обертання (повороту).

Оскільки тіло коренеплоду має конусоподібну форму, то при опусканні робочого органу вниз на коренеплід перестає діяти збуруюча сила, а тому коренеплід, внаслідок пружності оточуючого його попереду ґрунту і пружності власного тіла, намагатиметься повернутися у вертикальне положення рівноваги. При наступному захваті вказаний процес повторюється.

Отже коренеплід буде здійснювати коливання навколо лінії вузлів  $OH$ , навколо осі  $Oz_2$  та навколо осі  $Oz$ . Таким чином, коливання коренеплоду на першому етапі вилучення складаються з повздовжніх лінійних коливань точки  $O$  закріплення коренеплоду у ґрунті та кутових коливань коренеплоду відносно точки  $O$ , що описуються зміною кутів Ейлера  $\theta$ ,  $\psi$  і  $\phi$ .

Складемо розрахункову схему взаємодії коренеплоду цукрового буряку з робочими поверхнями вібраційного викопуючого робочого органу на першому етапі

вилучення. Для чого представимо вібраційний викопуючий робочий орган у вигляді двох клинів  $A_1B_1C_1$  і  $A_2B_2C_2$ , кожний з яких у просторі має нахил під кутами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  і які встановлено таким чином один до одного, що утворюється робоче русло, задня частина якого звужується (рис. 1). Вказані клини здійснюють коливальні рухи в повздовжньо-вертикальній площині. Проекції точок  $B_1$  і  $B_2$  на вісь  $O_1y_1$  позначимо точками  $D_1$  і  $D_2$  відповідно.

Вважаємо, що з поверхнями клинів  $A_1B_1C_1$  і  $A_2B_2C_2$  у відповідних точках взаємодіє коренеплід цукрового буряку, який апроксимується тілом конусоподібної форми, причому в загальному випадку захват коренеплоду робочим органом може бути несиметричним. Це зумовлено тим, що вісь симетрії коренеплоду (вісь  $Oz$ ) може бути дещо зміщеною у бік відносно осі рядка. Вважаємо, що перед початком безпосереднього контакту коренеплоду цукрового буряку з вібраційним викопуючим робочим органом вісь  $Oz$  паралельна осі  $O_1z_1$ .

Припускаємо далі, що робоча поверхня клина  $A_1B_1C_1$  здійснює безпосередній контакт з коренеплодом у точці  $K_1$ , а поверхня  $A_2B_2C_2$  – через деякий шар ґрунту у точці  $K_2$  (рис. 1). Звичайно, в точці  $K_2$  контакт відбувається по деякій площадці ґрунту, що оточує точку  $K_2$ , проте  $K_2$  будемо вважати точкою прикладання сил, що діють з боку лемешів через шар ґрунту на коренеплід. Прямі, проведені через точки  $B_1$  і  $B_2$  перпендикулярно до сторін клинів  $A_1C_1$  і  $A_2C_2$  відповідно, утворюють на перетині з зазначеними сторонами клинів відповідні точки  $M_1$  і  $M_2$ . Таким чином,  $\delta$  – це двогранний кут ( $\angle B_1M_1D_1$ ) між нижньою основою  $A_1D_1C_1$  та робочою поверхнею клина  $A_1B_1C_1$  а також двогранний кут ( $\angle B_2M_2D_2$ ) між нижньою основою  $A_2D_2C_2$  та робочою поверхнею клина  $A_2B_2C_2$ .

Покажемо сили, які виникають внаслідок взаємодії коренеплоду з вібраційним робочим органом.

Нехай від вібраційного робочого органу діє вертикальна збуруюча сила  $\bar{Q}_{зб.}$ , яка змінюється за гармонійним законом такого вигляду:

$$Q_{зб.} = H \sin \omega t, \quad (1)$$

де  $H$  – амплітуда збуруючої сили;

$\omega$  – частота збуруючої сили.

Дана сила відіграє основну роль у процесі розпушування ґрунту в зоні робочого русла копача та вилучення коренеплоду. Зазначена збуруюча сила  $\bar{Q}_{зб.}$  прикладається до коренеплоду з двох його боків, а тому на схемі вона представлена двома складовими  $\bar{Q}_{зб.1}$  та  $\bar{Q}_{зб.2}$ , які очевидно будуть дорівнювати:

$$Q_{зб.1} = Q_{зб.2} = \frac{1}{2} H \sin \omega t. \quad (2)$$

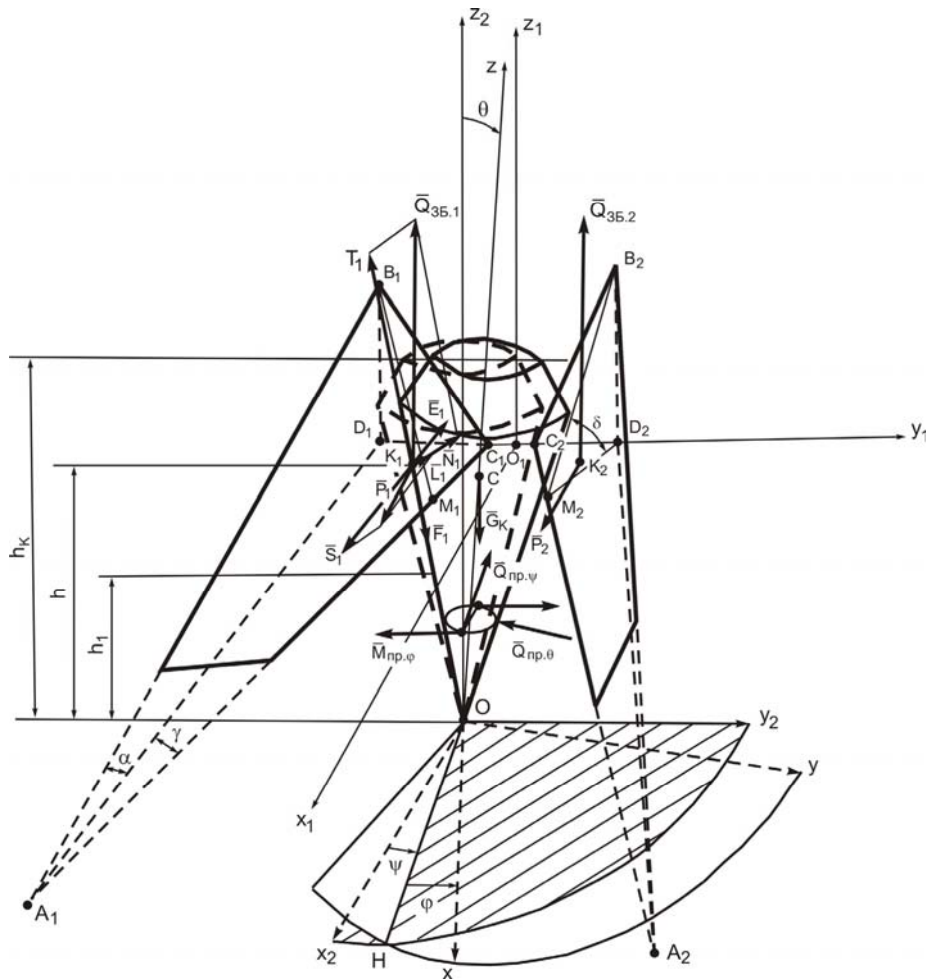


Рисунок 1 – Розрахункова схема взаємодії коренеплуду цукрового буряку з вібраційними лемешами

Для подальших досліджень необхідно проаналізувати зв'язок між коливальним рухом вібраційного робочого органу та дією при цьому збурюючої сили  $\bar{Q}_{зб.}$  на коренеплід. Цей аналіз достатньо провести для одного періоду коливань, від  $\omega t = 0$  до  $\omega t = 2\pi$ . Для всіх інших періодів процес буде повторюватись. Як зазначалось вище, збурююча сила  $\bar{Q}_{зб.}$  діє на коренеплід лише тоді, коли робочий орган рухається вгору від свого найнижчого положення до свого найвищого положення.

Отже, при русі робочого органу вгору на відрізку  $[0, \pi]$  збурююча сила  $\bar{Q}_{зб.}$  діє на коренеплід згідно синусоїдального закону (1). При цьому на відрізку  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  вона зростає від нульового значення  $Q_{зб.} = 0$  у точці  $\omega t = 0$ , до максимального значення  $Q_{зб.} = H$  у точці  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ .

На відрізку  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  вона спадає від максимального значення  $Q_{зб.} = H$  до мінімального  $Q_{зб.} = 0$ . На відрізку  $[\pi, 2\pi]$  робочий орган рухається вниз, а тому на цьому відрізку збурююча сила  $\bar{Q}_{зб.}$  на коренеплід не діє, а отже, дорівнює нулю. На відрізку  $[2\pi, 4\pi]$  все повторюється спочатку. Таким чином у загальному випадку, на відрізках  $[2k\pi, (2k+1)\pi], k = 0, 1, 2, \dots$ , збурююча сила  $\bar{Q}_{зб.}$  діє на коренеплід за синусоїдальним законом (1), а на відрізках  $[(2k-1)\pi, 2k\pi], k = 1, 2, \dots$ , вона на коренеплід

не діє, тобто дорівнює нулю.

Оскільки ріжучі кромки  $A_1C_1$  і  $A_2C_2$  лемешів знаходяться нижче точок контакту  $K_1$  і  $K_2$ , то в зоні захвату коренеплоду робочим органом ґрунт буде уже досить розпушеним, адже розпушування ґрунту в першу чергу відбувається в передній частині робочого русла копача, а безпосередній контакт коренеплоду з робочим органом – у середній і задній частинах робочого русла копача. Таким чином, при несиметричному захваті коренеплоду в точці контакту  $K_1$  на коренеплід безпосередньо діє збуруюча сила  $\bar{Q}_{36.1}$ , а в точці контакту  $K_2$  збуруюча сила  $\bar{Q}_{36.2}$  діє тільки на шар розпушеного ґрунту і тому вважаємо, що ця сила на коренеплід майже не передається, оскільки зусилля може передаватись лише через досить пружне середовище. Отже, при першому захваті в даному випадку дією сили  $\bar{Q}_{36.2}$  на коренеплід можна знехтувати і вважати, що на коренеплід діє лише збуруюча сила  $\bar{Q}_{36.1}$  з боку поверхні  $A_1B_1C_1$ .

Звичайно, при другому, чи третьому захватах коренеплоду робочим органом, внаслідок звуженості робочого русла і поступального руху копача, безпосередній контакт коренеплоду з робочим органом буде здійснюватись на обох лемешах, в крайньому випадку через тонкий шар ґрунту. Проте несиметричний захват коренеплоду цікавий тим, що при ньому можливий поворот коренеплоду навколо своєї осі, що сприяє інтенсивному руйнуванню зв'язків коренеплоду з ґрунтом (ефект вертіння коренеплоду у ґрунті при його вилученні). Отже, при несиметричному захваті коренеплоду робочим органом у диференціальних рівняннях руху коренеплоду буде враховуватись лише силова дія з боку робочої поверхні  $A_1B_1C_1$  клина. З цією метою розкладемо силу  $\bar{Q}_{36.1}$  на дві складові: нормальну  $\bar{N}_1$  до поверхні  $A_1B_1C_1$  та дотичну  $\bar{T}_1$  до цієї поверхні, як це показано на рис. 1. Отже ця сила буде дорівнювати:

$$\bar{Q}_{36.1} = \bar{N}_1 + \bar{T}_1. \quad (3)$$

Очевидно, що вектор сили  $\bar{T}_1$  напрямлений паралельно прямій  $B_1M_1$ .

Оскільки копач рухається поступально у напрямку осі  $O_1x_1$  відносно коренеплоду, який закріплений у ґрунті, то в напрямку поступального руху (осі  $O_1x_1$ ) діє рушійна сила  $\bar{P}_1$ , яка у момент захвату коренеплоду робочим органом також діє на коренеплід у напрямку заданої осі. Розкладемо також силу  $\bar{P}_1$  на дві складові: нормальну  $\bar{L}_1$  до поверхні клина  $A_1B_1C_1$  і дотичну  $\bar{S}_1$  до цієї поверхні, тобто:

$$\bar{P}_1 = \bar{L}_1 + \bar{S}_1. \quad (4)$$

Таким чином, у точці контакту  $K_1$  на коренеплід з боку клина  $A_1B_1C_1$  діє сила, що дорівнює

$$\bar{N}_{K_1} = \bar{N}_1 + \bar{L}_1, \quad (5)$$

яка напрямлена по нормалі до поверхні клина  $A_1B_1C_1$ .

Очевидно, що величина цієї сили дорівнює:

$$N_{K_1} = N_1 + L_1. \quad (6)$$

Крім того, у точці контакту  $K_1$  діє сила тертя  $\bar{F}_{K_1}$ , яка протидіє проковзуванню коренеплоду по робочій поверхні клина  $A_1B_1C_1$  під час його захвату вібраційним робочим органом. Вектор цієї сили напрямлений протилежно вектору відносної швидкості проковзування клина по поверхні коренеплоду. У центрі ваги коренеплоду діє сила ваги коренеплоду  $\bar{G}_k$ . Визначимо величини всіх зазначених вище сил, що діють на коренеплід під час його контакту з вібраційним викопуючим робочим органом. Дотична складова  $\bar{T}_1$  збуруючої сили  $\bar{Q}_{36.1}$  і дотична складова  $\bar{S}_1$  рушійної

сили  $\bar{P}_1$  безпосередньо на коренеплід не діють, вони лише викликають розпушування ґрунту навколо коренеплоду, а отже в диференціальні рівняння руху коренеплоду як твердого тіла вводити не будуть. Зі схеми рис. 1 отримаємо вирази для визначення нормальної  $\bar{N}_1$  та дотичної  $\bar{T}_1$  складової збуруючої сили  $\bar{Q}_{зб.1}$  такого вигляду:

$$N_1 = Q_{зб.1} \cdot \cos \delta, \quad (7)$$

$$T_1 = Q_{зб.1} \cdot \sin \delta. \quad (8)$$

З цієї ж схеми також отримуємо вирази для визначення нормальної  $\bar{L}_1$  та дотичної  $\bar{S}_1$  складових рушійної сили  $\bar{P}_1$ , а саме:

$$L_1 = P_1 \cdot \sin \gamma, \quad (9)$$

$$S_1 = P_1 \cdot \cos \gamma. \quad (10)$$

Величина сили  $\bar{N}_{K_1}$ , враховуючи вирази (6), (7) та (9), буде дорівнювати:

$$N_{K_1} = Q_{зб.1} \cdot \cos \delta + P_1 \cdot \sin \gamma, \quad (11)$$

або, враховуючи вираз (2), матимемо:

$$N_{K_1} = \frac{1}{2} H \cdot \cos \delta \sin \omega t + P_1 \cdot \sin \gamma. \quad (12)$$

Тоді величина сили тертя  $\bar{F}_{K_1}$  буде дорівнювати:

$$F_{K_1} = f N_{K_1} = f(Q_{зб.1} \cdot \cos \delta + P_1 \cdot \sin \gamma), \quad (13)$$

або, враховуючи вираз (2), матимемо:

$$F_{K_1} = \frac{1}{2} f H \cdot \cos \delta \sin \omega t + f P_1 \cdot \sin \gamma. \quad (14)$$

Оскільки на початку захвату коренеплід ще міцно зв'язаний з ґрунтом, то можливе проковзування клина по коренеплоду у напрямку дії сили  $\bar{T}_1$  (паралельно лінії  $B_1M_1$ ) та у напрямку дії сили  $\bar{S}_1$ .

Отже, силу тертя  $\bar{F}_{K_1}$  також можна розкласти на дві складові  $\bar{F}_1$  та  $\bar{E}_1$  у напрямках, протилежних векторам  $\bar{T}_1$  та  $\bar{S}_1$  відповідно, тобто:

$$\bar{F}_{K_1} = \bar{F}_1 + \bar{E}_1. \quad (15)$$

Визначимо величини складових  $\bar{F}_1$  і  $\bar{E}_1$ . З наведених вище міркувань та виразу (12) можна зробити висновок, що на відрізках  $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , зокрема на відрізку  $[0, \pi]$ , величина сили тертя  $\bar{F}_{K_1}$  визначається згідно виразу (12), причому на відрізку  $[0, \frac{\pi}{2}]$  вона зростає від мінімальної величини

$$F_{K_1 \min} = f P_1 \cdot \sin \gamma, \quad (16)$$

до максимальної величини

$$F_{K_1 \max} = \frac{1}{2} f H \cdot \cos \delta + f P_1 \cdot \sin \gamma, \quad (17)$$

а на відрізку  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  вона спадає від  $F_{K_1 \max}$  до  $F_{K_1 \min}$ . Причому, напрям вектора  $\bar{F}_{K_1}$  на відрізку  $[0, \frac{\pi}{2}]$  також змінюється. Вектор  $\bar{F}_{K_1 \min}$  напрямлений протилежно вектору  $\bar{S}_1$ , а вектор  $\bar{F}_{K_1 \max}$  відхиляється від вектора  $\bar{F}_{K_1 \min}$  на деякий кут  $\alpha_{K_1 \max}$ .

Отже, на відрізку  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  вектор  $\bar{F}_{K_1}$  рухається від вектора  $\bar{F}_{K_1 \min}$  до вектора  $\bar{F}_{K_1 \max}$ , а на відрізку  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  – від вектора  $\bar{F}_{K_1 \max}$  до вектора  $\bar{F}_{K_1 \min}$ . Таким чином, кут відхилення  $\alpha_{K_1}$  вектора  $\bar{F}_{K_1}$  від вектора  $\bar{F}_{K_1 \min}$  на відрізку  $[0, \pi]$  змінюється за наступним законом:

$$\alpha_{K_1} = \alpha_{K_1 \max} \cdot \sin \omega t. \quad (18)$$

Таким чином, на відрізку  $[0, \pi]$  маємо такі значення складових  $\bar{F}_1$  і  $\bar{E}_1$ :

$$F_1 = F_{K_1} \cdot \sin \alpha_{K_1}, \quad (19)$$

$$E_1 = F_{K_1} \cdot \cos \alpha_{K_1}, \quad (20)$$

або, враховуючи вирази (12) і (18), матимемо:

$$F_1 = \left( \frac{1}{2} f H \cdot \cos \delta \sin \omega t + f P \cdot \sin \gamma \right) \sin(\alpha_{K_1 \max} \cdot \sin \omega t), \quad (21)$$

$$E_1 = \left( \frac{1}{2} f H \cdot \cos \delta \sin \omega t + f P \cdot \sin \gamma \right) \cos(\alpha_{K_1 \max} \cdot \sin \omega t). \quad (22)$$

Вирази (21) і (22) мають місце на будь-якому відрізку  $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Очевидно, що на відрізках  $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сила тертя  $\bar{F}_{k1}$  дорівнює:

$$F_{K_1} = F_{K_1 \min} = f P_1 \cdot \sin \gamma. \quad (23)$$

Отже, на зазначених відрізках матимемо:

$$E_1 = f P_1 \cdot \sin \gamma, \quad (24)$$

$$F_1 = 0. \quad (25)$$

Обчислимо далі сили, які виникають внаслідок деформації ґрунту, як пружного середовища, при переміщенні в ньому коренеплоду. Можна показати, що момент пружної деформації ґрунту від повороту коренеплоду на кут  $\varphi$  буде дорівнювати:

$$M_{np,\varphi} = -\frac{C h_1^3 \cdot \varphi \cdot \sin^2 \varepsilon}{3 \cos^3 \varepsilon}, \quad (26)$$

де  $C$  – коефіцієнт пружної деформації ґрунту, віднесений до площі контакту.

Також можна довести, що сили пружності ґрунту, які виникають при поворотах закріпленого у ґрунті коренеплоду навколо осі  $Oz_2$  на кут  $\psi$  –  $\bar{Q}_{np,\psi}$  та навколо лінії вузлів  $OH$  на кут  $\theta$  –  $\bar{Q}_{np,\theta}$ , відповідно дорівнюють:

$$Q_{np,\psi} = \frac{C_1 \pi \cdot h_1^3 \sin \varepsilon \cdot \psi}{3 \cos^3 \varepsilon}, \quad (27)$$

$$Q_{np,\theta} = \frac{C_1 \pi \cdot h_1^3 \sin \varepsilon \cdot \theta}{3 \cos^3 \varepsilon}, \quad (28)$$

де  $C_1$  – коефіцієнт пружної деформації стискання ґрунту.

Очевидно, що вектори  $\bar{Q}_{np,\psi}$  і  $\bar{Q}_{np,\theta}$  напрямлені по нормалі до поверхні коренеплоду.

Перейдемо далі до складання диференціальних рівнянь руху коренеплоду як твердого тіла при несиметричному захваті коренеплоду вібраційним викопуючим робочим органом. В даному випадку коренеплід буде рухатись як тверде тіло з однією нерухомою точкою. Зазначений рух визначається зміною вище згаданих кутів Ейлера  $\varphi$ ,  $\psi$  і  $\theta$  під дією розглянутих сил, що діють на коренеплід, і описується за допомогою динамічних і

кінематичних рівнянь Ейлера. Якщо рухома система координат  $Oxyz$  вибрана таким чином, щоб координатні осі були головними осями інерції для точки  $O$ , що в даному випадку має місце, то динамічні рівняння Ейлера мають більш простий вигляд [6].

Із силової схеми (рис. 1) визначаємо моменти усіх зовнішніх сил, що діють на коренеплід під час його захвату вібраційним викопуючим робочим органом, відносно осей  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ . Після підстановки необхідних осьових моментів інерції та отриманих значень головних моментів усіх зовнішніх сил у систему диференціальних рівнянь [6] отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь просторових коливань коренеплоду, закріпленого у ґрунті, у формі динамічних і кінематичних рівнянь Ейлера:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{347}{720} + \frac{3}{20} \operatorname{tg}^2 \varepsilon \right) m_k h_k^2 \frac{d\omega_x}{dt} + \left( \frac{3}{20} \operatorname{tg}^2 \varepsilon + \frac{347}{720} \right) m_k h_k^2 \omega_y \omega_z = \\
 & = \left[ -P_1 (h \operatorname{tg} \varepsilon - h \theta) + f \left( \frac{H}{2} \cos \delta \sin \omega t + P_1 \sin \gamma \right) \cos (\alpha_{k_1 \max} \cdot \sin \omega t) (h \operatorname{tg} \varepsilon - h \theta) - \right. \\
 & \left. - \frac{C_1 \pi h_1^4 \sin \varepsilon \cdot \theta \cdot \psi (\cos (\varepsilon - \theta) + \cos (\varepsilon + \psi))}{4 \cos^3 \varepsilon} \right] \sin \theta \sin \varphi + \\
 & + \left[ -\frac{1}{2} H h \operatorname{tg} \varepsilon \sin \omega t + h P_1 \sin \psi - f \left( \frac{H}{2} \cos \delta \sin \omega t + P_1 \sin \gamma \right) \times \right. \\
 & \left. \times \cos (\alpha_{k_1 \max} \cdot \sin \omega t) \cdot \sin \psi \cdot h - \frac{1}{3} G_k h_k \theta + \frac{C_1 \cdot \pi h_1^4 \sin \varepsilon \cdot \theta \cdot \cos \psi}{4 \cos^3 \varepsilon} \right] \cos \varphi, \\
 & \left( \frac{347}{720} + \frac{3}{20} \operatorname{tg}^2 \varepsilon \right) m_k h_k^2 \frac{d\omega_y}{dt} + \left( \frac{347}{720} - \frac{3}{20} \operatorname{tg}^2 \varepsilon \right) m_k h_k^2 \omega_z \omega_x = \\
 & = \left[ -P_1 (h \operatorname{tg} \varepsilon - h \theta) + f \left( \frac{H}{2} \cos \delta \sin \omega t + P_1 \sin \gamma \right) \cos (\alpha_{k_1 \max} \cdot \sin \omega t) (h \operatorname{tg} \varepsilon - h \theta) - \right. \\
 & \left. - \frac{C_1 \pi h_1^4 \sin \varepsilon \cdot \theta \cdot \psi (\cos (\varepsilon - \theta) + \cos (\varepsilon + \psi))}{4 \cos^3 \varepsilon} \right] \sin \theta \cos \varphi - \\
 & - \left[ -\frac{H}{2} h \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \sin \omega t + h P_1 \sin \psi - f \left( \frac{H}{2} \cos \delta \sin \omega t + P_1 \sin \gamma \right) \times \right. \\
 & \left. \times \cos (\alpha_{k_1 \max} \cdot \sin \omega t) \sin \psi \cdot h - \frac{1}{3} G_k h_k \theta + \frac{C_1 \pi h_1^4 \sin \varepsilon \cdot \theta \cdot \cos \psi}{4 \cos^3 \varepsilon} \right] \sin \varphi, \\
 & \frac{3}{10} m_k h_k^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon \frac{d\omega_z}{dt} = h P_1 \cos \theta \cdot \operatorname{tg} \varepsilon - f \left( \frac{H}{2} \cos \delta \sin \omega t + P_1 \sin \gamma \right) \times \\
 & \times \cos (\alpha_{k_1 \max} \cdot \sin \omega t) \cos \theta \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \cdot h - \frac{C h_1^3 \varphi \sin^2 \varepsilon}{3 \cos^3 \varepsilon} + \\
 & + \left[ P_1 (h \operatorname{tg} \varepsilon - h \theta) - f \left( \frac{H}{2} \cos \delta \sin \omega t + P_1 \sin \gamma \right) \times \right. \\
 & \left. \times \cos (\alpha_{k_1 \max} \cdot \sin \omega t) (h \operatorname{tg} \varepsilon - h \theta) + \frac{C_1 \pi h_1^4 \theta \psi \sin \varepsilon (\cos (\varepsilon - \theta) - \cos (\varepsilon + \psi))}{4 \cos^3 \varepsilon} \right] \cos \theta, \\
 & \omega t \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \quad k = 0, 1, 2, \dots \\
 & \omega_x = -\dot{\psi} \sin \theta \cdot \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi, \\
 & \omega_y = -\dot{\psi} \sin \theta \cdot \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi, \\
 & \omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

### Висновки.

1. Побудована нова математична модель вилучення коренеплоду цукрового буряку з ґрунту.

2. Застосовуючи вихідні кінематичні і динамічні рівняння Ейлера, складена нова система диференціальних рівнянь коливань коренеплоду при вібраційному його



викопуванні для випадку, коли коренеплід взаємодіє з одним клином вібраційного викопуючого робочого органу.

## Список літератури

1. Дубровский А.А. Вибрационная техника в сельском хозяйстве / А.А. Дубровский. – М.: Машиностроение, 1968. – 204 с.
2. Василенко П.М. Вибрационный способ уборки корнеплодов / П.М. Василенко, Л.В.Погорельй, В.В. Брей // Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства. – 1970. – №2. – С. 9-13.
3. Брей В.В. Исследование и разработка механизированного процесса извлечения из почвы корней сахарной свеклы / В.В. Брей. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – К.: УСХА, 1972. – 196 с.
4. Свеклоуборочные машины (конструирование и расчёт) // Л.В. Погорельй, Н.В. Татьяна, В.В. Брей и др.; Под общ. ред. Л.В. Погорелого. – К.: Техніка, 1983. – 168 с.
5. Булгаков В.М. Теорія вібраційного викопування коренеплодів / Булгаков В.М. та ін. – Механізація сільськогосподарського виробництва: Збірник наукових праць національного аграрного університету. – Том XV. – К.: НАУ. – 2003. – С. 45-85.
6. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики. Том II Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1971. – 464 с.

*И. Головач, О. Черныш, Н.Березовой, В.Солтусюк*

### **Использование уравнений Эйлера при исследовании вибрационного выкапывания корнеплодов**

Построена новая расчетная математическая модель вибрационного выкапывания корнеплода. На основе использования уравнений Эйлера получена система дифференциальных уравнений, которая позволяет аналитически исследовать данный технологический процесс.

*I.Golovach, O.Chernysh, M.Berezovyy, V.Soltusuk*

### **Mathematical model of a root crop extraction from soil of equations Euler**

The new calculated mathematical model of a root crop vibrational digging up is developed. On the basis of the Euler's equations using the set of the differential equations which allows to investigate the given process analytically is obtained.

Одержано 05.09.11