

УДК 631:621:01

*О.І. Литвинов, М.Г. Березовий, кандидати технічних наук Національного університету біоресурсів і природокористування України,  
Т.Д. Гуцол, кандидат технічних наук ПДАТУ*

## РІВНЯННЯ РОЗГОНУ МАШИННОГО АГРЕГАТУ

*Отримані точні аналітичні розв'язки диференціальних рівнянь руху під час пуску і розгону машини або агрегату як механічної системи змінної структури з фрикційною в'яззю, побудована діаграма інтегральних кривих кутових швидкостей ведучої і веденої частин агрегату та визначені критичні умови розгону.*

**Ключові слова:** диференціальні рівняння руху, пуск, машина, агрегат, механічна система, фрикційна в'язь, кутові швидкості, умови розгону.

**Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.** Дослідження процесу пуску машинного агрегату або механічної системи „двигун-робоча машина” становить інтерес у багатьох відносинах. Для машинних агрегатів із двигуном внутрішнього згоряння важливо одержати закон руху агрегату, що дав би можливість оцінити критичні умови розгону, а також відповісти на запитання, чи можливо його здійснення при конкретних конструктивних параметрах і експлуатаційно-технологічних факторах. Критичні умови розгону виникають при зрушенні з місця і розгоні агрегату з повним навантаженням і включенні технологічної робочої швидкості. У початковий момент руху накладаються додаткові інерційні навантаження, під впливом яких кутова частота обертання двигуна може настільки понизитися, що пуск і розгін системи виявляться нездійсненими.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми.** З літературних джерел відомо, що процес пуску і розгону машинного або машинно-тракторного агрегату давно був предметом пильної уваги вчених [1-3] і неодноразово розглядався. Одним з перших розглядав це питання відомий учений, основоположник науково-технічного напрямку, пов'язаного з підвищенням робочих швидкостей сільськогосподарських агрегатів, академік В.М. Болтінський. Однак при складанні математичної моделі процесу пуску ним були прийняті деякі спрощення, що позначилися на точності результатів. Адже відомо, що при пуску і зрушенні з місця двигун перевантажується і переходить із робочої лінійної ділянки регуляторної вітки характеристики двигуна на криволінійну перевантажувальну ділянку (рис. 1).

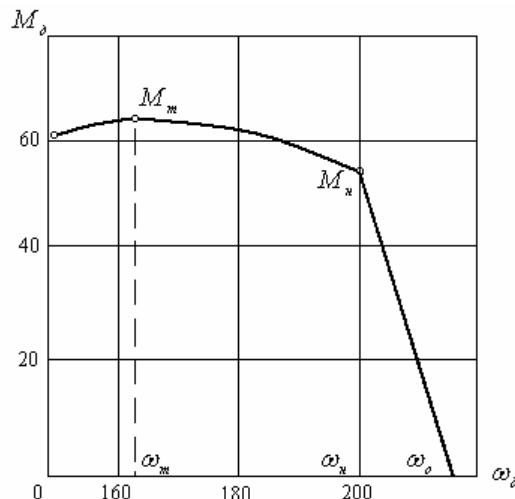


Рис. 1. Характеристика крутного моменту двигуна

У роботі [1] перевантажувальна ділянка була представлена прямою з метою подолання математичних труднощів, що фактично створює відхилення від дійсності. Подібні неточності є і в інших наведених роботах.

На відміну від попередніх досліджень ці недоліки нами усунуті і отримані точні аналітичні рішення, у тому числі з урахуванням нелінійності характеристики крутного моменту двигуна.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Для одержання функціональних залежностей зміни кутової швидкості двигуна і робочої машини від часу, тобто для визначення закону зміни кутових швидкостей була складена розрахункова двомасова динамічна модель агрегату „двигун-робоча машина” змінної структури з одним фрикційним зв’язком. При аналізі виключено з розгляду невеликий вплив на процес зміни кутової швидкості пружних характеристик передатних елементів двигуна і робочої машини у зв’язку зі специфікою поставленого завдання.

Як показано на рис. 1, крутний момент двигуна  $M_\delta$  відповідно до характеристики дизеля змінюється у функції кутової швидкості спочатку лінійно від 0 до номінальної величини  $M_n$ , потім – по квадратичній залежності (перевантажувальна вітка кривої).

Характеристика моменту фрикціону приймається в такому виді: у процесі плавного включення момент фрикціону змінюється пропорційно часу [1], а після включення – приймає сталі значення

$$M_\phi = \beta M_n \frac{t}{t_1}, \quad \text{при } t < t_1, \quad (1)$$

$$M_\phi = \beta M_n, \quad \text{при } t \geq t_1, \quad (2)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт запасу фрикціону (муфти зчеплення),

$t_1$  – момент часу повного включення фрикціону.

У початковий момент часу ведуча й ведена системи кінематично незалежні. Система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$I_\delta \dot{\omega}_\delta = M_\delta - M_\phi, \quad (3)$$

$$I_k \dot{\omega}_k = M_\phi - M_k, \quad (4)$$

де  $I_\delta, I_k$  – зведені до колінчастого вала двигуна моменти інерції мас ведучої і веденої частин агрегату: двигуна і робочої машини;

$\omega_\delta, \omega_k$  – кутові швидкості ведучої і веденої частин;

$M_\delta, M_k$  – зведені крутний момент двигуна і момент опору веденої частини агрегату (робочої машини).

Розв’язок диференціального рівняння (3) залежить від співвідношення часу повного включення фрикціону  $t_1$  і часу зниження кутової швидкості двигуна від холостого ходу до номінальної  $t_n$ . Тут можна виділити три інтервали:

- 1) при  $t < t_1$  момент фрикціону  $M_\phi$  є лінійним за часом, а крутний момент двигуна є лінійним за кутовою швидкістю  $\omega_\delta$ ;
- 2) при  $t_1 < t < t_n$  момент фрикціону виходить на сталі значення  $M_\phi = const$ , а крутний момент двигуна  $M_\delta(\omega_\delta)$  буде лінійним за кутовою швидкістю;
- 3) при  $t_1 > t_n$  момент фрикціону залишається сталим  $M_\phi = const$ , а крутний момент двигуна  $M_\delta(\omega_\delta)$  описується квадратичною залежністю.

Нами отримані точні розв’язки диференціальних рівнянь (3) і (4) з урахуванням реальної залежності крутного моменту двигуна від кутової швидкості, у тому числі і на нелінійній ділянці регуляторної вітки характеристики, що правильно відбиває пусковий процес. Розв’язки диференціальних рівнянь (3) і (4) поєднуються на окремих інтервалах часу за значеннями кутових швидкостей на границях інтервалів як двигуна  $\omega_\delta$ , так і робочої машини  $\omega_k$ . Знайдемо рішення диференціального рівняння (3) на інтервалі при  $t < t_1$ , де крутний момент двигуна є лінійним у функції кутової швидкості і може бути описаний такою залежністю:

$$M_\delta = M_n \frac{\omega_0 - \omega_\delta}{\omega_0 - \omega_n},$$

де  $\omega_n, \omega_0$  – кутові швидкості двигуна, номінальна і холостого ходу;

$M_n$  – номінальний крутний момент двигуна.

Перевіримо правильність аналітичного подання моменту: якщо  $\omega_\delta = \omega_0$ , то  $M_\delta = 0$ , що відповідає холостому ходу двигуна, а якщо  $\omega_\delta = \omega_n$ , то  $M_\delta = M_n$ , що відповідає роботі двигуна на номінальному режимі (рис. 1).

Позначаючи  $\frac{M_n}{I_\partial \Delta \omega_{0n}} = \alpha_0$ , одержимо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами в безрозмірному вигляді:

$$\dot{v} + \alpha_0 v = \beta \alpha_0 \frac{t}{t_1}. \quad (5)$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (5) складається із загального розв'язку однорідного і часткового розв'язку неоднорідного рівняння. Для однорідного рівняння розв'язок шукаємо у вигляді

$$v_1 = c e^{\lambda t}.$$

Після підстановки шуканого рішення в рівняння (5) і рішення характеристичного рівняння одержуємо  $\lambda = -\alpha_0$ . Тоді загальне рішення рівняння (5) буде таким:

$$v_1 = c e^{-\alpha_0 t}. \quad (6)$$

Частковий розв'язок рівняння (5) шукаємо методом варіацій довільних сталих Лагранжа, вводячи підстановку:

$$v(t) = c_1(t) v_1(t).$$

Загальний розв'язок одержимо у вигляді:

$$v(t) = \frac{\beta}{\alpha_0 t_1} ((\alpha_0 t - 1) + e^{-\alpha_0 t}).$$

і остаточно при  $t = t_1$  будемо мати:

$$v(t_1) = \beta \left( 1 - \frac{1 - e^{-\alpha_0 t_1}}{\alpha_0 t_1} \right). \quad (7)$$

Добуток  $\alpha_0 t$  безрозмірний, тому що  $\alpha_0$  має розмірність, яка є оберненою часу  $t^{-1}$ .

Фізичний зміст величини  $\alpha_0$  полягає в тому, що  $t_0 = \frac{1}{\alpha_0} = \frac{I_\partial}{M_n} \Delta \omega_{0n}$  є часом, за який двигун з моментом інерції  $I_\partial$  змінить свою кутову швидкість на величину  $\Delta \omega_{0n} = \omega_0 - \omega_n$ , тобто вийде на номінальний режим роботи.

Продовжимо розв'язок рівняння (3) для інтервалу часу  $t_1 < t < t_n$ , якщо  $t < t_n$  і коли момент фрикціону постійний:  $M_\phi = \beta \cdot M_n = const$ , а момент двигуна залишається лінійним по кутовій швидкості. Тоді диференціальне рівняння в безрозмірному вигляді буде таким:

$$\dot{v} + \alpha_0 v = \beta \alpha_0. \quad (8)$$

Поєднавши вираз (8) з рішенням (7) при  $t = t_1$ , остаточно для інтервалу  $t_1 < t < t_n$  маємо розв'язок:

$$v = \beta \left( 1 - \frac{1 - e^{-\alpha_0 t_1}}{\alpha_0 t_1} e^{-\alpha_0 (t-t_1)} \right). \quad (9)$$

Переходимо далі до одержання точного розв'язку для нелінійної ділянки кривої крутного моменту двигуна на проміжку часу  $t_n < t < t_2$ . Тут крутний момент двигуна представляється параболою у функції кутової швидкості двигуна  $\omega_\partial$ :

$$M_\partial = K_m M_n - (K_m - 1) M_n \left( \frac{\omega_\partial - \omega_m}{\omega_n - \omega_m} \right)^2, \quad (10)$$

де  $K_m = \frac{M_m}{M_n}$  – коефіцієнт пристосованості двигуна;

$M_m, \omega_m$  – максимальний момент двигуна і відповідна йому кутова швидкість;

$t_2$  – момент вирівнювання кутових швидкостей двигуна і робочої машини.

Тоді рівняння (3) буде мати вигляд:

$$I_\partial \dot{\omega}_\partial + (K_m - 1)M_n \left( \frac{\omega_\partial - \omega_m}{\omega_n - \omega_m} \right)^2 = K_m M_n - \beta \cdot M_n.$$

Приведемо кутову швидкість до безрозмірного виду, позначаючи і підставляючи  $\frac{\omega_\partial - \omega_m}{\omega_n - \omega_m} = \Omega_\partial$ , тоді  $\frac{d\omega_\partial}{dt} = \frac{d\Omega_\partial}{dt} \Delta\omega_n$ , де  $\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_m$ , і, позначаючи  $\alpha_n = \frac{M_n}{I_\partial \Delta\omega_n}$ , остаточно одержуємо рівняння:

$$\dot{\Omega}_\partial + (K_m - 1)\alpha_n \Omega_\partial^2 = -\alpha_n (\beta - K_m). \quad (11)$$

Тут  $t = \frac{1}{\alpha_n}$  – характерний час, за яке номінальний момент  $M_n$  викликає зміну кутової частоти двигуна на величину  $\Delta\omega_n$ .

Нелінійне диференціальне рівняння (11) є окремим випадком спеціального рівняння Ріккати  $y' + ay^2 = bx^\rho$  при  $\rho = 0$ , що розв'язується підстановкою  $t = \frac{x}{a}$  і введенням нової змінної  $y' = yu$ , що приводить його до лінійного рівняння першого порядку. У нашому випадку  $ab \leq 0$ , тоді для рівняння (11) існує відомий розв'язок [4]. Поєднаний з попереднім розв'язком (9) на границі інтервалу  $t = t_n$ , де  $\omega_\partial = \omega_n$ , розв'язок рівняння (11) буде мати вигляд:

$$\Omega_\partial(t) = \frac{1 - \sqrt{\frac{\beta - K_m}{K_m - 1}} \operatorname{tg}(\sqrt{(K_m - 1)(\beta - K_m)\alpha_n}(t - t_n))}{1 + \sqrt{\frac{K_m - 1}{\beta - K_m}} \operatorname{tg}(\sqrt{(K_m - 1)(\beta - K_m)\alpha_n}(t - t_n))}. \quad (12)$$

Таким чином, для рівняння (3) отримані розв'язки (7), (9), (12) на зазначених інтервалах з відповідним протіканням кривих крутного моменту двигуна на лінійній і параболічній ділянках.

Приступимо до розв'язку рівняння (4) для веденої частини агрегату. Уведемо безрозмірну кутову швидкість  $\Omega_\kappa = \frac{\omega_\kappa}{\omega_m}$ , звідки  $\dot{\omega}_\kappa = \omega_m \dot{\Omega}_\kappa$ . Прийємо позначення:  $M_\kappa = K_3 M_n$ , де  $K_3$  – коефіцієнт завантаження двигуна,  $\alpha_\kappa = \frac{M_n}{I_\kappa \omega_m}$ .

Тоді одержуємо диференціальне рівняння в безрозмірному вигляді:

$$\dot{\Omega}_\kappa(t) = \alpha_\kappa \left( \beta \frac{t}{t_1} - K_3 \right). \quad (13)$$

Розв'язок рівняння (13) для інтервалу  $t_0 < t < t_1$  має вигляд:

$$\Omega_\kappa(t) = \alpha_\kappa \left( \frac{\beta}{2t_1} t_2 - K_3 t + \frac{K_3^2 t_1}{2\beta} \right). \quad (14)$$

Для границі інтервалу  $t = t_1$  маємо

$$\Omega_\kappa(t_1) = \alpha_\kappa \frac{(\beta - K_3)^2}{2\beta} t_1. \quad (15)$$

Для проміжку часу  $t_1 < t \leq t_2$ , де  $M_\phi = \beta M_n$ , розв'язок рівняння (4) має вигляд:

$$\Omega_\kappa(t) = \alpha_\kappa \left( (\beta - K_3)t - \frac{\beta_2 - K_3^2}{2\beta} t_1 \right). \quad (16)$$

Отже, отримані розв'язки, що дають уявлення про хід зміни кривих  $\omega_\delta(t)$  і  $\omega_\kappa(t)$  в довільний момент часу. Для кривої двигуна – це спадний розв'язок від значення  $\omega_0$ , для кривої робочої машини – зростаючий від нуля. Зміну реальної величини  $\omega_\kappa(t)$  завжди можна простежити з огляду на те, що  $\omega_\kappa = \omega_m \Omega_\kappa(t)$ . Мінімальне значення кутової швидкості двигуна  $\omega_\delta$ , що дорівнює  $\omega_2$ , досягається в той момент часу  $t_2$ , при якому інтегральні криві перетинаються. Далі відбувається спільний розгін системи, кутові швидкості вирівнюються  $\omega_\delta = \omega_\kappa$ , момент тертя фрикціону стрибком убуває до досить необхідної величини, що забезпечує нормальну роботу.

При спільному розгоні системи рівняння (3) і (4) поєднуються:

$$(I_\delta + I_\kappa) \dot{\omega}_\delta = M_\delta - M_\kappa. \quad (17)$$

Підставимо в рівняння (17) вирази для  $M_\delta$  і  $M_\kappa$ . Оскільки двигун працює на перевантажувальній вітці характеристики, то залежність крутного моменту від кутової швидкості є параболічною (10), а момент опору веденої частини агрегату дорівнює  $M_\kappa = K_3 M_n$ . Уводячи безрозмірну кутову швидкість

$$\frac{\omega_\delta - \omega_m}{\omega_n - \omega_m} = \Omega_\delta; \quad \frac{d\omega_\delta}{dt} = \frac{d\Omega_\delta}{dt} \Delta\omega_\delta,$$

та позначаючи  $\frac{M_n}{(I_\delta + I_\kappa) \Delta\omega_n} = \alpha$ , одержуємо нелінійне диференціальне рівняння:

$$\dot{\Omega} + \alpha(K_m - 1)\Omega^2 = \alpha(K_m - K_3). \quad (18)$$

Вираз (18) є спеціальним рівнянням Ріккати, що й рівняння (11), але зі значенням  $ab > 0$ , тому що  $K_m > 1$ ;  $K_m > K_3$ ,  $K_3 < 1$ .

Згідно [4], воно має розв'язок в гіперболічних функціях. Інтегральна крива, що проходить через точку  $t_{n1}$ ,  $\omega_n$ , коли  $\Omega_\delta = 1$ , буде мати вигляд (тут  $\tau = t - t_{n1}$ ):

$$\Omega_\delta(t) = \frac{1 + \sqrt{\frac{K_m - K_3}{K_m - 1}} \operatorname{th}(\sqrt{(K_m - 1)(K_m - K_3)} \alpha) \tau}{1 + \sqrt{\frac{K_m - 1}{K_m - K_3}} \operatorname{th}(\sqrt{(K_m - 1)(K_m - K_3)} \alpha) \tau} \quad (19)$$

Відповідно до отриманих розв'язків побудована діаграма зміни кутових швидкостей двигуна і робочої машини на різних інтервалах пуску (рис. 2). Тут же показаний і хід зміни моментів.

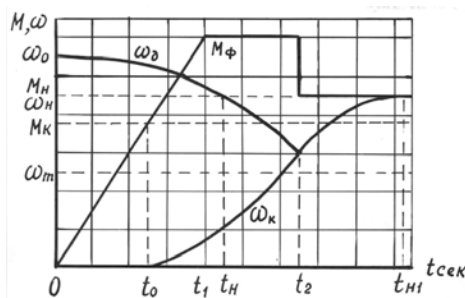


Рис. 2. Графік інтегральних кривих кутових швидкостей і моменту фрикціону

Проведемо короткий якісний аналіз процесу пуску. Отримані розв'язки, що виражають залежність від часу кутових швидкостей двигуна і комбайна окремо і як єдиного кінематичного цілого дозволяють розглянути процес розгону і знайти критерії його справдження і стійкості, забезпечення таких умов його протікання, при яких кутова швидкість двигуна  $\omega_2$  не виявиться нижче критичної  $\omega_m$  (рис. 1). У зв'язку зі складністю виразів обмежимося наближеним аналізом стійкості розгону. Прийmemo для спрощення, що включення фрикціону відбувається миттєво, а параболічна ділянка кривої характеристики крутного моменту двигуна замінюється прямою, що є паралельною осі абсцис.

Тоді диференціальне рівняння руху, значно спрощуючись, приймає вигляд:

$$I_d \dot{\omega}_d = -M_n (\beta - K_m). \quad (20)$$

З виразу (20) легко побачити, що вал двигуна обертається рівномірно-сповільнено, оскільки в правій частині рівняння маємо постійну величину.

З формули (20) може бути визначена за інших рівних умов максимальна величина коефіцієнта запасу фрикціону

$$\beta \leq \frac{K_m - C_\beta K_z}{1 - C_\beta} = \beta_{\max}. \quad (21)$$

Підставивши реальні параметри довільного транспортного або сільськогосподарського агрегату у вираз (21), можна знайти необхідний коефіцієнт запасу фрикціону.

**Висновки.** На відміну від попередніх досліджень, нами отримані точні аналітичні розв'язки диференціальних рівнянь руху механічної системи „двигун-робоча машина” в один із самих важких у динамічному відношенні режимів роботи агрегату – у нестационарному режимі пуску і розгону. Установлено закони зміни кутової швидкості як найбільш інформативні показники руху, у тому числі і з урахуванням нелінійної вітки кривої регуляторної характеристики крутного моменту двигуна.

За результатами дослідження побудована діаграма інтегральних кривих кутових швидкостей двигуна і робочої машини як на інтервалах роздільного руху, так і в період зміненої структури механічної системи під час спільного розгону.

Проведено аналіз стійкості розгону, визначені критерії його здійснення, які накладають обмеження на конструкційні (зведені моменти інерції мас двигуна і робочої машини, коефіцієнт запасу фрикціону) і експлуатаційно-технічні параметри агрегату (коефіцієнт пристосовності і коефіцієнт завантаження двигуна). Визначено максимальний зведений момент інерції агрегату, при якому розгін можливо здійснити, а також і необхідний при цьому коефіцієнт запасу фрикціону.

#### Список використаних джерел

1. Болтінський В.М. Розгін машинно-тракторних агрегатів на підвищених швидкостях // Механізація і електрифікація сільського господарства. – 1961. – № 3. – С. 4-9.
2. Алфьоров С.А. Динаміка зернозбирального комбайна. – М.: Машинобудування, 1973. – 256 с.
3. Вейц В.Л., Кочура А.Е. Динаміка машинних агрегатів із двигунами внутрішнього згоряння. – М.-Л.: Машинобудування, 1976. – 383 с.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Довідник з математики. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

**Аннотация.** Получены точные аналитические решения дифференциальных уравнений движения при пуске и разгоне машины или агрегата как механической системы переменной структуры с одной фрикционной связью, построена диаграмма угловых скоростей ведущей и ведомой частей агрегата и определены критические условия разгона.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения движения, пуск, машина, агрегат, механическая система, фрикционная связь, угловые скорости, условия разгона.

**Summary.** Exact analytical solutions of the differential equations of movement at machine or aggregate start-up and acceleration as mechanical system of variable structure with one frictional bond are received, the diagram of angular velocities of leading and led parts of the aggregate is constructed and critical conditions of acceleration are defined.

**Keywords:** differential equations of movement, start-up, machine, machine aggregate, mechanical system, frictional bond, angular speed, conditions of acceleration.