УДК 624.072.21/23

***В.В. Девін, В.С. Ткачук**, кандидати технічних наук, доценти ПДАТУ*

РОЗРАХУНОК ПРОСТОРОВИХ ШАРНІРНО-СТЕРЖНЕВИХ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розглянуті просторові шарнірно-стержневі системи, в яких виникає напружено-деформований стан із-за прикладання вузлових навантажень. Із застосуванням методу кінцевих елементів розв'язується задача по дослідженню НДС системи при її довільній геометрії.

***Ключові слова:** метод кінцевих елементів, матриця жорсткості, шарнірно-стержневі системи.*

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. При розв'язку реальних інженерних задач виникають труднощі аналітичного та обчислювального характеру при розгляданні навіть статично визначних систем, не говорячи про статично невизначні системи. Велика кількість елементів шарнірно-стержневих систем (ШСС), збільшення степені статичної невизначності приводить до громіздких обчислень; застосування відомих методів визначення зусиль в стержнях неодмінно викликає похибки в їх обчисленнях. Зокрема, при розгляданні статично невизначних систем класичним методом сил пошук найвигіднішої основної системи часто вимагає штучних прийомів. Більш раціональними з точки зору об'ємності обчислювальної роботи є метод переміщень та змішаний метод, але вони є більш обтяжливими для засвоєння, особливо враховуючи дефіцит часу, виділеного для вивчення розглядуваного курсу.

У даній роботі розглянуто застосування методу кінцевих елементів для довільних шарнірно-стержневих систем. Авторами складена оригінальна програма для розрахунку плоских ферм довільної конфігурації при будь-яких способах закріплення. Головною рисою програми є те, що при побудові матриці жорсткості системи не використовується структурна матриця і не виникає потреби в громіздких проміжних операціях над матрицями. Програма повністю автоматизує розрахунок як статично визначних, так і статично невизначних шарнірно-стержневих систем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми. Для опанування методикою розрахунків шарнірно-стержневих систем при довільній системі навантажень в навчальних цілях розглядаються малоелементні системи і використовуються аналітичні методи визначення зусиль в елементах таких систем (вирізання вузлів, проекцій, моментних точок) [1, 2, 4]. Класичні методи розкриття статичної невизначності (методи сил, переміщень, змішаний) є обов'язковими для засвоєння інженером-будівельником, бо саме їх застосування дозволяє ставити і розв'язувати реальні задачі в усій їх повноті. Зокрема, цьому питанню присвячена робота [3] при розв'язанні деяких специфічних задач.

Мета дослідження: розробка універсального алгоритму застосування методу кінцевих елементів, який дозволяє систематизувати розрахунки систем незалежно від їх геометрії, способу закріплення, степені статичної визначності.

Виклад основного матеріалу дослідження.

1. Аналітичний розв'язок.

Розглядається плоска шарнірно-стержнева система, в якій m вузлів з'єднують n стержнів. Вважаємо відомою геометрію системи в системі координат xOy, довжини l_i елементів шарнірно-стержневої системи, кути їх нахилу б$_i$ до осі x. По довжині стержнів жорсткості їх перерізів постійні

$$E_i F_i = const,$$

де E_i – модуль пружності матеріалу;

F_i – площі перерізів.

Система закріплена за допомогою k опорних стержнів у вузлах; навантаження P_i розглядаються теж тільки як вузлові. Ставиться повна задача дослідження НДС, а саме знаходження зусиль N_i в стержнях, опорних реакцій R_i, подовжень Δl_i стержнів, переміщень U_k, V_k вузлів, напружень σ_i в перерізах стержнів.

© *В.В. Девін, В.С. Ткачук, 2011*

Послідовно вирізаємо вузли, починаючи з вузла, в якому сходяться не більше двох стержнів. Складаємо рівняння рівноваги у вигляді (рис. 1)

$$\sum_{j=1}^{r} N_j \cos\alpha_j + P_{xi} = 0,$$
$$\sum_{j=1}^{r} N_j \sin\alpha_j + P_{yi} = 0, \qquad (1)$$

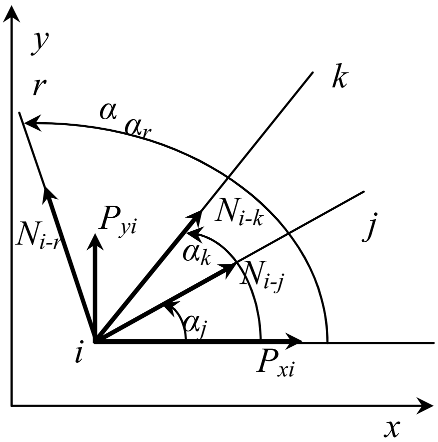

Рис. 1. Рівновага системи.

де r – кількість стержнів, що сходяться у вузлі i.

Пронумеруємо вузли і стержні: m = 5; n = 7; k = 3. Значення відносних модулів пружності $\beta = E/E_1$ та відносних площ перерізів $\gamma = F/F_1$ наведені в таблиці 1.

Розглядаємо геометрію системи. Довжини стержнів:

$$l_2 = \sqrt{4^2 + 6{,}5^2} = 7{,}63 \ \text{м}; \ l_3 = \sqrt{3^2 + 6{,}5^2} = 7{,}16 \ \text{м} \quad \text{і т. д.}$$

Кути нахилу стержнів:

$$\cos\alpha_2 = 4/7{,}63 = 0{,}524; \sin\alpha_2 = 6{,}5/7{,}63 = 0{,}852; \alpha_2 = 58{,}4^0$$

$$\cos\alpha_3 = 3/7{,}16 = 0{,}419; \sin\alpha_3 = 6{,}5/7{,}16 = -0{,}908; \alpha_3 = 65{,}2^0 \text{ і т.д.}$$

Для визначення опорних реакцій складаємо рівняння рівноваги.

Приклад.

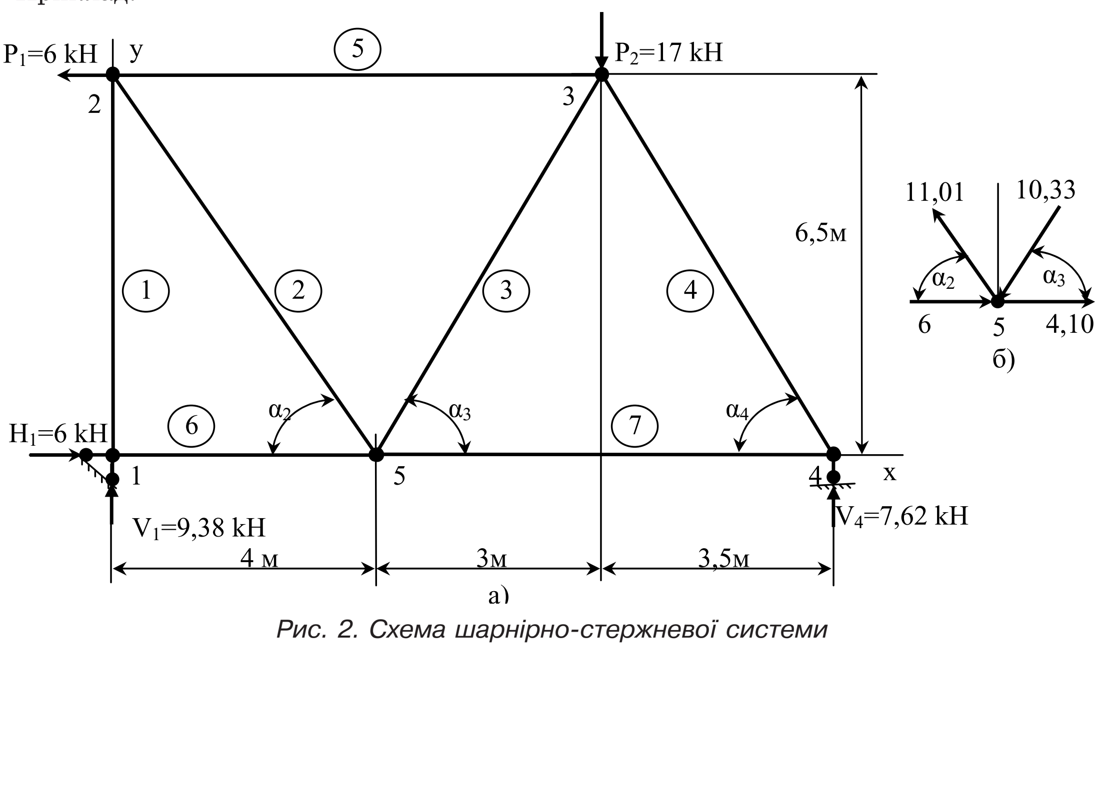

Рис. 2. Схема шарнірно-стержневої системи

Таблиця 1

Стержні	$\beta = \dfrac{E}{E_1}$	$\gamma = \dfrac{F}{F_1}$	*l, м*	α, град	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	N, кН	$\Delta\tilde{l}$, $кН \cdot м$
1	1	1	6,5	90	0	1	-9,38	-60,97
2	0,6	2	7,63	58,4	0,524	0,852	11,01	70,0
3	1	4	7,16	65,2	0,419	0,908	-10,33	-18,49
4	0,5	1	7,38	61,7	0,474	0,881	-8,65	-127,67
5	0,4	2,5	7	0	1	0	0,23	1,61
6	1	0,7	4	0	1	0	-6	-34,29
7	0,8	3	6,5	0	1	0	4,10	11,1

Для визначення зусиль N_i в стержнях системи вирізаємо послідовно вузли, починаючи, наприклад, з вузла 1. Дані заносимо в таблицю 1. Тут приводимо тільки рівновагу вузла 5, використану для перевірки – рис. 2 б.

$$\sum X = 6 + 4{,}10 - 11{,}01 \cdot 0{,}524 - 10{,}33 \cdot 0{,}419 = 10{,}1 - 10{,}1 \equiv 0$$

$$\sum Y = 11{,}01 \cdot 0{,}852 - 10{,}33 \cdot 0{,}908 = 9{,}38 - 9{,}38 \equiv 0.$$

Подовження стержнів визначаємо згідно закону Гука

$$\Delta l_i = N_i l_i / E_i F_i . \qquad (2)$$

У таблиці 1 наведено умовні подовження $\Delta\tilde{l} = Nl / \beta\gamma$. Так $\Delta l_1 = -9{,}38 \cdot 6{,}5 / 1 \cdot 1 = -60{,}97$ (укорочення), $\Delta l_2 = 11{,}01 \cdot 7{,}63 / 0{,}6 \cdot 2 = 70{,}0$ і т.д.

2. Машинний розв'язок.

Досліджувана конструкція розбивається на окремі елементи, НДС яких вважається відомим. Виходячи з умов рівноваги та умов нерозривності переміщень, виконується спряження таких елементів. При цьому формулюються три групи рівнянь:

а) статичні (рівновага системи); б) геометричні (зв'язок між деформаціями та переміщеннями); в) фізичні (зв'язок між силами та деформаціями).

Розглянемо реалізацію методу кінцевих елементів (МКЕ) для шарнірно-стержневої системи. ШСС розглядаємо як сукупність *m* вузлів і *n* стержнів. Вважаємо, що навантаження P_i прикладені тільки в вузлах ферми; так як поздовжні зусилля $N_i = const$ вздовж довжини стержнів, то маємо однорідний напружений стан.

Статичний бік задачі. Вирізаємо *i*-й вузол (див рис. 1) і складаємо рівняння рівноваги виду (1), при цьому в число зусиль можуть входити і невідомі опорні реакції. Такі рівняння записуємо для всіх *m* вузлів.

Геометричний бік задачі.

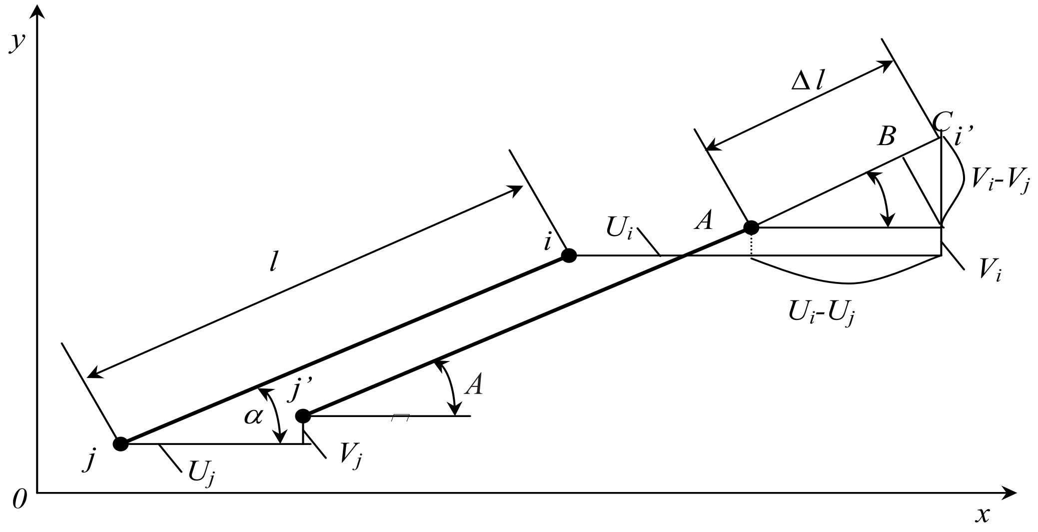

Рис. 3. Схема до розрахунку переміщень.

Позначимо через *U, V* проекції переміщень вузлів; вузли *i, j* після деформації змістились в положення *i', j'*. У зв'язку з малістю деформацій приймаємо для кутів $\alpha' \approx \alpha$. Подовження стержня

$$\Delta l = AB + BC \quad \text{або} \quad \Delta l = (U_i - U_j)\cdot\cos\alpha + (V_i - V_j)\cdot\sin\alpha \qquad (3)$$

Фізичний бік задачі. За законом Гука подовження стержня $\Delta l = N\ G$, де позначена умовна обернена жорсткість стержня (податливість)

$$G = l / EF\ . \qquad (4)$$

Синтез. Порівнюючи вирази для Δl з (2) та (3) і зібравши подібні члени з $U_i, V_i, U_S, V_S, \ldots, U_t, V_t$ (*s, t* – номери всіх вузлів, суміжних з *i*-м вузлом), прийдемо до системи 2*m* лінійних рівнянь з невідомими переміщеннями U_j, V_j. Запишемо систему в матричному вигляді

$$\overline{R} \cdot \overline{U} = \overline{P}\ ,$$

де $\overline{R}$ – матриця системи, яка фізично означає матрицю жорсткості всієї шарнірно-стержневої системи;

$\vec{U}$ – вектор невідомих переміщень;

$\vec{P}$ – вектор зусиль:

$$\vec{U}^* = (U_1, V_1, U_2, V_2, \ldots U_m, V_m);\quad \vec{P}^* = (P_{X1}, P_{Y1}, P_{X2}, P_{Y2} \ldots P_{Xk}, P_{Yk})\ .$$

Матриця жорсткості має блочний вигляд і є симетричною відносно головної діагоналі. Діагональні та побічні блоки 2×2 мають відповідно вигляд:

$$\begin{pmatrix} \sum_r (\cos^2\alpha_j / G_j) & \sum_r (\cos\alpha_j \sin\alpha_j / G_j) \\ \sum_r (\cos\alpha_j \sin\alpha_j / G_j) & \sum_r (\sin^2\alpha_j / G_j) \end{pmatrix},$$

$$-\begin{pmatrix} \cos^2\alpha_S / G_S & \cos\alpha_S \sin\alpha_S / G_S \\ \cos\alpha_S \sin\alpha_S / G_S & \sin^2\alpha_S / G_S \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

При наявності *k* опорних стержнів „стискаємо" матрицю $\overline{R}$, викидаючи з неї відповідні рядки й стовпці, тобто приходимо до системи

$$\overline{Z} \cdot \overline{U_1} = \overline{P_2}\ , \qquad (6)$$

де $\overline{U_1}, \overline{P_2}$ – "стиснуті" вектори $\overline{U}$ і $\overline{P}$.

Розв'язок системи (9) має вигляд

$$\overline{U_j} = \overline{B_1} \cdot \overline{P_2}\ , \qquad (7)$$

де $\overline{B}_1 = \overline{Z}_1^{-1}$ – обернена матриця до матриці $\overline{Z}_1$; фізично вона означає матрицю податливості системи. Знайшовши переміщення *U, V* вузлів шарнірно-стержневої системи, подальший розв'язок зводимо до повного дослідження НДС системи.

Зупинимося на алгоритмі формування матриці жорсткості. Нехай задані структурні вектори $\vec{a}(n), \vec{в}(n)$, попарними елементами яких є номери вузлів, які з'єднує відповідний стержень.

Тоді формуємо вектори $\vec{C}_1(n), \vec{C}_2(n), \vec{C}_3(n)$ з елементами відповідно

$$c_{1i} = \cos^2\alpha_i / G_i;\ c_{2i} = \sin^2\alpha_i / G_i;\ c_{3i} = \cos\alpha_i \sin\alpha_i / G_i \qquad (8)$$

Інструкція по використанню програми.

Результати розв'язку виводяться в табличному вигляді на екран чи принтер.

Розв'язання задачі на ЕОМ.

1. Запустити програму на виконання.
2. Вступивши в діалог з комп'ютером, ввести дані, закінчивши кожне введення клавішею *ENTER*.

Вводимо наступні дані:

m – кількість вузлів;

x, y – координати вузлів попарно, в метрах;

n – кількість стержнів;

a, b – елементи структурних векторів попарно;

$\widetilde{E}$ – відносні модулі пружності матеріалу стержнів ($\widetilde{E} = E / E_1$);
$\widetilde{F}$ – відносні площі поперечних перерізів стержнів ($\widetilde{F} = F / F_1$);
KS – кількість опорних стержнів;

C – номери опорних стержнів в вузлах шарнірно-стержневої системи (для вузла *i* горизонтальні опорні стержні мають номери *2i-1*, вертикальні – *2i*); *KZ* – кількість вузлових навантажень;

n, P – номери вузлових навантажень та їх значення попарно; розмірність

P [kH] (номери *n* навантажень *P* визначаються аналогічно номерам опорних стержнів).

3. Вибрати приймач результатів – екран чи принтер.

Приклад. Статично визначна система (рис. 2). Початок координат у вузлі 1. Координати вузлів наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Вузли	1	2	3	4	5
x, м	0	0	7	10,5	4
y, м	0	6,5	6,5	0	0

Враховуючи нумерацію вузлів та стержнів, запишемо структурні вектори $\vec{a}, \vec{b}$ (табл. 3).

Таблиця 3

Стержні	1	2	3	4	5	6	7
a	1	2	3	3	2	1	4
b	2	5	5	4	3	5	5

Складемо вектор закріплення, застосовуючи наступний принцип нумерації опорних стержнів для *i*-го вузла: *2i-1* – для горизонтальних стержнів, *2i* – для вертикальних стержнів.

Для вузлів 1, 4 маємо: $\vec{C} = (1,2,8)$; $k = 3$.

Складемо вектори вузлових навантажень $\vec{N}, \vec{P}$, таблиця 4.

Таблиця 4

Номери навантажень	3	6
Значення навантажень	-6	-17

У табл. 5 наведені вектори відносних модулів пружності $\widetilde{E}$ та відносних площ перерізів стержнів $\widetilde{F}$.

Таблиця 5

Стержні	1	2	3	4	5	6	7
$\widetilde{E}$	1	0,6	1	0,5	0,4	1	0,8
$\widetilde{F}$	1	2	4	1	2,5	0,7	3

Нижче наведено результати розрахунку на ПК.

Результати розв'язку.

Опорні реакції

-6,0000	-9,3810	-7,6190

Зусилля в стержнях

-9,3810	11,0149	-10,3319	-8,6534	0,2271	-6,0000	4,1026

Переміщення вузлів

0,0000	-43,0126	-41,4228	-23,1746	-34,2857
0,0000	-60,9762	-154,9364	0,0000	-137,8647

Подовження стержнів

-60,9762	70,0565	-18,4913	-127,7656	1,5897	-34,2857	11,1111

Список використаних джерел

1. Снитко Н.К. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1972. – 488 с.
2. Строительная механика. Под редакцией Даркова А.В. – М.: Высшая школа, 1976. – 600 с.
3. Стукотілов В.С. Розрахунки на ЕОМ статично невизначних систем – Кам'янець-Подільський. – 2000. – Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету, Серія фізико-математична. – С. 111-117.
4. Справочник по теории упругости. Под редакцией Варвака П.М. – К.: Будівельник, 1971. – 420 с.

Аннотация. *Рассмотрены пространственные шарнирно-стержневые системы, в которых возникает напряженно-деформированное состояние из-за приложения узловой нагрузки. С помощью метода конечных элементов решена задача по исследованию НДС системы при ее произвольной геометрии.*

Ключевые слова: *метод конечных элементов, матрица жесткости, шарнирно-стержневая система.*

Abstract. *The spatial joint cored systems in which the tense deformed state is from the appendix of the key loading are considered. By the method of eventual elements a task is decided on research of the system at its arbitrary geometry.*

Key words: *method of eventual elements, matrix of inflexibility, joint the cored system.*

УДК 621.316.718.5

Л.Ф. Камишлова*, кандидат технічних наук, доцент КПНУ ім. Івана Огієнка,*
П.В. Герасимов*, старший викладач,*
О.В. Козак, *асистент ПДАТУ*

РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ ЕЛЕКТРОМАШИННОГО ГЕНЕРАТОРА ІМПУЛЬСНОЇ НАПРУГИ

На основі теоретичних досліджень роботи електромашинного генератора імпульсної напруги (ЕГІН), що продовжувалася тривалий час, була розроблена методика розрахунку основних параметрів джерела. В основі методики – використання підсумків аналізу у вигляді кривих залежностей основних геометричних параметрів від електричних параметрів генератора.

Ключові слова: *індуктивність, взаємоіндуктивність, реакція якоря, комутація, жорсткість характеристики.*

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковимми чи практичними завданнями. Для обробки металів існує велика кількість джерел. Однак процес зварювання тугоплавких металів до цих пір технологічно складний. Обслуговування електрообладнання для такого виду обробки металів потребує висококваліфікованих працівників. Запропонований генератор призначений для обробки всіх видів металів, простий по конструкції, не потребує висококваліфікованих зварювальників і може експлуатуватись в польових умовах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми. Розробкою джерел електричної енергії, призначених для обробки металів в польових умовах, займаються лабораторії багатьох держав (США, Німеччина, Англія, Росія та інші). Особлива увага надається генераторам, які володіють універсальними зовнішніми характеристиками, тобто здатними обробляти як м'які, так і тугоплавкі метали. При цьому конструкція генератора повинна бути вкрай проста. Значний вклад в розробку джерел для обробки металів внесли вчені М.І. Крайцберг, С.Я. Коган, М.Г. Шехтман, Патон Б.Е. та інші. Генератор, що пропонується, є унікальним, захищеним авторським свідоцтвом.

Постановка проблеми: розробити методику розрахунку геометричних та електричних параметрів електромашинного генератора несиметричних імпульсів.

© Л.Ф. Камишлова, П.В. Герасимов, О.В. Козак, 2011