$$\frac{d^2}{dt^2}\eta = g\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha)\cdot\left[1 - f\cdot\tan(\alpha)\cdot\frac{\frac{d}{dt}\eta}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt}\xi\right)^2+\left(\frac{d}{dt}\eta\right)^2}}\right]$$

$$0 = N - mg\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha).$$

Висновки. Визначивши швидкість руху частинки ґрунту по робочій поверхні гнутоштабового зуба залежно від його конструктивних параметрів і швидкості руху борони засобами Mathcad, встановлено, що при зростанні кута входження уступу до 35° швидкість руху частинок ґрунту плавно зменшується, а при подальшому збільшенні кута до 45° швидкість різко зменшується. При значенні кута β = 45° швидкість руху частинки, в порівнянні зі значеннями кута в межах від 15 до 35° менша у 2-3 рази. Цими значеннями кута входження уступу в ґрунт слід обмежитися під час проектування ґрунтообробних робочих органів.

Список використаних джерел

1. Бабицкий Л.Ф. Исследование и обоснование геометрических параметров зубчатых рабочих органов культиваторов для противоэрозийной обработки почвы: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.20.01/ Челябинский ин-т мех. и эл. с. х. – Челябинск, 1979. – 20 с.
2. Бабіцький Л.Ф. Біонічні напрямки розробки ґрунтообробних машин. – К.: Урожай, 1998. – 164 с.
3. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям с.-х. машин. – К.: Издательство Укр. Академии с.-х. наук, 1980. – 142 с.
4. Гуков Я.С. Обробіток ґрунту. Технологія і техніка. Механіко-технологічне обґрунтування енергозберігаючих засобів для механізації обробітку ґрунту в умовах України. – К.: Норапрінт, 1999. – 280 с.
5. Кравчук В.І., Гуков Я.С. Енерговитрати при розпушенні ґрунту механічним способом // Механізація сільськогосподарського виробництва. – К.: НАУ, 2000. – С. 17-21.
6. Шанина З.М. Исследование параметров зубчатых рабочих органов для мелкой обработки почвы в условиях юга УССР: Дис. … канд. техн. наук: 05.20.01. – Мелитополь, 1987. – 167 с.
7. Шевченко И.А. Обоснование геометрических параметров ступенчатых рабочих органов глубокорыхлителей для почв юга Украины: Дис. ... канд. техн. наук: 05.20.01. – М., 1987. – 167 с
8. Кушнарев А.С., Кочев В.И. Механико-технологические основы обработки почвы. – К.: Урожай, 1989. – 144 с.

Аннотация. *Приведены результаты исследования перемещения частиц почвы по наклонной поверхности рабочих органов с изогнутополосовыми элементами, в частности на примере зуба бороны.*
Ключевые слова: *почва, обработка почвы, рыхление, рабочий элемент.*

Abstract. *Submitted the results of the study the movement of soil particles on an inclined plane working parts with strip bent tooth on an example the prong harrows.*
Key words: *soil, strip bent tooth, tillage, loosening*

УДК 51:519, 873

М.А. Фугело*, кандидат фізико-математичних наук, доцент ПДАТУ*

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Досліджуються основні проблеми теорії надійності, зокрема вивчається питання зміни стану технічної системи з часом. Аналізуються способи підвищення надійності технічних систем, розв'язується задача визначення оптимального розміщення резервних елементів.
Ключові слова: *надійність, теорія надійності, технічна система, безвідмовність, довговічність, ремонтопристосовність, математична модель, математичні методи, резервування.*

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. Теорія надійності – одна з самих актуальних наукових дисциплін нашого часу. Звичайно, питання надійності технічних систем в першу чергу представляють собою інженерний та економічний інтерес і є предметом дослідження інженерів, економістів, організаторів виробництва. Однак це не означає, що математичні методи для теорії надійності представляють лише другорядне значення. Ці методи з перших днів існування теорії надійності як особливої науки ввійшли в неї одними з основних її складових. Більш того, виявляється, що без широкого залучення математичних ідей і методів теорія надійності перетворились би у чисто якісну науку і не могла би дати можливість виконувати необхідні розрахунки, шукати оптимальні розв'язки, вводити числові характеристики для оцінки стану технічних пристроїв, здійснювати порівняння надійності пропонованих конструкцій. Тому очевидна необхідність подальшого вивчення питання щодо використання математичних методів в теорії надійності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язування даної проблеми. У багатьох публікаціях, які стосуються проблеми надійності технічних систем як учених пострадянських держав [1, 2, 4, 7], так і зарубіжних [3, 6] достатньо розкриті зміст основних задач теорії надійності технічних систем і роль яку грають у ній математичні методи. Однак прогрес в науці дозволяє модернізувати методологію математичного обґрунтування надійності та зробити її більш ефективною.

Отже, розробка та удосконалення математичних методів розв'язання основних задач теорії надійності технічних систем є досить актуальною.

Мета дослідження полягає в математичному описі зміни стану технічної системи з часом та ролі резервування в підвищенні надійності.

Виклад основного матеріалу дослідження. У природі не існує абсолютно однорідних і не змінюючих з часом своїх властивостей матеріалів, тому не може бути і абсолютно надійних виробів. Такі зміни носять випадковий характер, який заздалегідь не передбачений і непомітний для ока.

Вибором конструкції, комплектуючих елементів, матеріалів, експлуатаційних режимів і рядом інших заходів можна добитися підвищення безвідмовності роботи виробів, більшої однорідності їх якості. Дуже часто інженерні та конструкторські пропозиції пов'язані перш за все якраз із прагненням збільшити середню тривалість безвідмовної роботи виробів і зменшити можливе її розсіювання.

Вказані обставини приводять до широкого використання в теорії і практиці надійності методів теорії ймовірностей та математичної статистики. Для оцінки надійності виробів приходиться проводити спеціально організовані дослідження, а також спостереження за нормально працюючими виробами. Теорія досліджень і збір даних про вироби, що експлуатуються, вимагають не тільки практичного досвіду, але й глибоких математичних розробок. Вироби техніки виготовляються для виконання якихось функцій – перевезення вантажів, обробітку землі, вироблення енергії тощо. При цьому до них пред'являються сповна природні вимоги:

a) технічні вироби, як правило, не повинні виходити з робочого стану в заданий період функціонування;
b) при умові виконання необхідних налагоджень, профілактичних ремонтів і заміни окремих деталей вони повинні бути здатні тривалий час виконувати покладені на них задачі;
c) виконання необхідних робіт з наладки і ремонту не повинно визивати яких-небудь труднощів.

Вимога, сформульована в пункті «a», отримала назву <u>безвідмовності</u>. Вона абсолютно необхідна кожному виробу. Виріб, який нездатний успішно пропрацювати протягом заданого часу, не може вважатися надійним.

Властивість, описана у вимозі «b», носить назву <u>довговічності</u>. Вона необхідна переважній більшості виробів техніки, так як немає можливості постійно замінювати вироби на нові. Будь-які вироби повинні економічно оправдати себе, а для цього вимагається, щоб вони достатньо довго пропрацювали.

Довговічність виробу складається не тільки з періодів роботи, коли зберігається його безвідмовність, закладена ще в період виготовлення, але й з тієї його здатності виконувати свої функції, які він отримує від періодичних ремонтів, наладок, заміни зношених вузлів і деталей.

Третя вимога, яку необхідно пред'являти до технічних виробів, щоб вони могли вважатися надійними, носить назву ремонтопристосованості. Мова йде про те, щоб наладка і ремонт виробу були здійсненими в короткі терміни і не вимагали повного його розбирання. Продумана конструкція машини обов'язково повинна враховувати умови експлуатації, а значить, і ремонту (по крайній мірі дрібного) на місці, без відправлення машини в ремонтні майстерні.

Для оцінки надійності технічних систем і порівняння досягнутої надійності в різних конструкціях необхідно виробити кількісні показники, які дозволяли б вияснити, які безвідмовність, довговічність і ремонтопристосовність даної групи виробів чи даної конструкції.

Безвідмовність прийнято оцінювати ймовірністю того, що виріб пропрацює заданий проміжок часу **t** без збоїв і без необхідності проведення ремонту, заміни вузлів чи елементів. Це, очевидно, центральна числова характеристика надійності виробу, так як безвідмовність необхідна для будь-яких систем – одноразової дії і довготривалої експлуатації.

Довговічність природно оцінювати сумарним напрацюванням пристрою від моменту виготовлення до моменту списання, коли подальше відновлення стає безглуздим із-за високої вартості ремонту або ж із-за того, що після ремонту пристрій здатний пропрацювати лише короткий термін.

Ремонтопристосованість виробу можна вимірювати або часом, який необхідно затратити на лагодження виробу і приведення його в працездатний стан, або ж вартістю ремонту.

Однією із важливих задач математичної теорії надійності варто визнати побудову таких моделей, які дозволяли би із загальних міркувань чисто якісного характеру робити далекоглядні висновки про розподіл тривалості безвідмовної роботи пристроїв, що нас цікавлять. Розглянемо деякі з них [1].

Перш за все розглянемо наступну модель, яку розвинув О. Я. Хінчин для задач теорії масового обслуговування, і таку, що представляє значну цікавість для теорії надійності.

Нехай є велика кількість елементів, працюючих незалежно один від одного. Позначимо через $X_k(t)$ функцію, яка рівна 0 до моменту відмови елемента *k* і *1* в момент *i* після відмови. Елемент, що відмовив, ми негайно замінюємо на подібний, так що в нашій системі постійно працює одне і те ж число елементів.

Якщо число елементів *n* – велике і елементи приблизно однорідні, тобто їх відмови наступають приблизно однаково часто і не може бути такого випадку, що який-небудь один елемент дає переважну частку відмов, то, виявляється, має місце слідуюча теорема Хінчина: ймовірність того, що в складній системі за час *t* відказують *k* елементів знаходяться за наближеною формулою:

$$P\{x(t_0+t) - x(t_0) = k\} \approx \frac{(\gamma t)^k}{k!} e^{-\gamma t},$$

де *k* може набирати будь-яке ціле значення від 0 і дальше;

γ – додатна константа.

Це добре відомий розподіл Пуассона.

У багатьох випадках теорема О. Я. Хінчина дає гарні наближення до дійсності.

Безсумнівно, що передумови О. Я. Хінчина, зроблені ним при доведенні отриманого результату, досить обмежені для цілей теорії надійності. В останній приходиться мати справу не зі стаціонарним потоком відмов, а з потоком, суттєво залежним від часу експлуатації.

Як правило, число відмов з часом збільшується і проміжки між відмовами скорочуються. Ось чому так багато зусиль було направлено на розширення умов теореми Хінчина і на відмову від ряду зроблених ним передумов.

Суттєвий крок в цьому напрямку був зроблений Б.І. Грігеліонісом. Він відмовився від умов стаціонарності і ординарності, які грали істотну роль в дослідженнях Хінчина. В умовах Грігеліоніса має місце асимптотична близькість до неоднорідного пуассонівського процесу:

$$P\{\pounds(t_0+t)-\pounds(t_0)=k\} \approx \frac{[\gamma(t_0+t) - \gamma(t_0)]^k}{k!} e^{-[\gamma(t_0+t)-\gamma(t_0)]}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$; $\gamma(t)$ – неспадна функція від *t*.

Вірно і обернене: для будь-якої неспадної функції $\gamma(t)$ можна вказати такі елементи, що для них будуть виконані вказані рівності. Теорема Грігеліоніса дозволяє врахувати зміну стану системи залежно від тривалості її експлуатації і навантаження.

Тривалість безвідмовної роботи, якщо в момент часу $t = 0$ система уже пропрацювала час t_0, має розподіл:

$$F(t) = 1 - e^{-[\Lambda(t_0+t) - \Lambda(t_0)]}.$$

Звернемо увагу на те, що у викладену схему вкладаються багаточисленні розподіли, які вже зарекомендували себе в теорії надійності, наприклад розподіл Вейбулла:

$$\Phi(x) = 1 - e^{-x^{\alpha}}, \text{ коли } x \ge 0.$$

Зрозуміло, що підхід до побудови теорії надійності охарактеризований вище, сам по собі, без додаткових досліджень процесу зміни станів, недостатній для дослідження реальних систем.

Досить важливим етапом в дослідженні надійності технічних систем є опис зміни стану системи з часом. Такий опис можна здійснити з допомогою функції інтенсивності відмов. Нехай τ – тривалість безвідмовної роботи технічної системи. Зрозуміло, що τ – випадкова величина. Нехай

$$Q(t) = P\{\tau < t\}$$

її функція розподілу. Іншими словами, функція розподілу $Q(t)$ є ймовірність того, що система відмовить до моменту t.

Ми припускаємо, що Q (t) – неперервна та існує неперервна щільність розподілу:

$$P(t) = dQ(t)/dt.$$

Поряд із функцією $Q(t)$ часто використовується й інша функція:

$$P(t) = 1 - Q(t) = P\{\tau \ge t\}.$$

Ця функція дає ймовірність того, що система пропрацювала безвідмовно по меншій мірі час t. Вона задовольняє двом співвідношенням: $P(0) = 1$ і $P(t) \to 0$, коли $t \to \infty$.

Позначимо через $P(t, t_1)$ ймовірність того, що технічна система не відмовить на проміжку часу (t, t_1), а через $P(t + t_1)$ – ймовірність безвідмовної роботи системи протягом часу $(t + t_1)$. Тоді:

$$P(t + t_1) = P(t)P(t, t_1).$$

Звідси:

$$P(t, t_1) = P(t + t_1)/P(t),$$

і ймовірність відмови системи в проміжку часу (t, t_1) рівна:

$$Q(t, t_1) = 1 - P(t, t_1) = [P(t) - P(t + t_1)]/P(t) = [Q(t + t_1) - Q(t)]/P(t).$$

Але

$$Q(t + t_1) - Q(t) = Q^1(t)\,[(t + t_1) - t] + 0(t_1),$$

де $0(t_1)$ – символ, що позначає величину нескінченно малу порівняно з t_1.

Введемо позначення:

$$\lambda(t) = p(t)/P(t) = -P^1(t)/P(t) \qquad (1)$$

й пояснимо ймовірнісний зміст функцій $\lambda(t)$. Це умовна щільність ймовірності того, що система, яка пропрацювала безвідмовно час t, відмовить зразу після його закінчення.

Функція $\lambda(t)$ називається функцією відмов (функцією інтенсивності відмов).

Із рівності (1) маємо:

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(z)dz}.$$

Із одержаної формули легко отримати ймовірність безвідмовної роботи системи на проміжку часу від t_1 до t_2:

$$P(t_1, t_2) = \frac{P(t_2)}{P(t_1)} = e^{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(z)dz}.$$

Якщо функція розподілу тривалості безвідмовної роботи відома, то функція $\lambda(t)$ може бути легко підрахована.

Наприклад, при показниковому розподілі

$$P(\breve{n}) = \prod_{i=1}^{5}(1 - (1 - P_i)^{n_i+1}), \text{ коли } t \ge 0,$$

знаходимо

$$\lambda(t) = \lambda\frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda.$$

При розподілі Вейбулла маємо:

$$Q(t) = 1 - e^{-ct^d}\ (t \geq 0),\ c \text{ і } d \text{ – додатні сталі.}$$

Звідки

$$\lambda(t) = \lambda\, t^{n-1}.$$

Одним із розповсюджених і досить дієвих способів підвищення надійності технічних систем є резервування, тобто введення в схему виробу додаткових елементів, які включаються в роботу по мірі виходу з ладу основних. Отже, виникає задача визначення оптимального розміщення резервних елементів, тобто отримання максимальної надійності системи при умові не перевищення деяких допустимих значень вартості, маси, об'єму тощо. Ця задача досить складна, тому при її розв'язуванні здебільшого приймаються деякі обмеження [5]:

- розглядається послідовна система, що складається з *K* підсистем, яка роботоздатна тільки тоді, коли роботоздатні одночасно всі її підсистеми;
- можливі тільки два стани підсистем: роботоздатний і відмова;
- припускається, що *i*-та підсистема представляє собою $n + 1$ паралельних взаємно незалежних елементів, кожний із яких має ймовірність відмови q_i;
- при відмові якого-небудь із елементів підсистеми здійснюється його заміна на запасний елемент того ж типу, при цьому час на заміну не перевищує допустимого часу перерви в роботі системи;
- якщо елемента потрібного типу не виявляється серед запасних, то це призводить до відмови системи.

Можна довести, що для системи, яка розглядається, ймовірність безвідмовної роботи визначається за формулою:

$$P(\breve{n}) = \prod_{i=1}^{k} (1 - q^{n_i+1}), \qquad (2)$$

де $\breve{n} = (n_1, n_2, \ldots n_i, \ldots n_k)$, n_i – кількість резервних елементів *i*-тої підсистеми.

При цьому повинні дотримуватися слідуючі лінійні обмеження:

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij} n_i \leq b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots r, \qquad (3)$$

де r – кількість обмежень на затрати.

Залежність (2) будемо називати рівнянням надійності.

Вимагається знайти вектор, компонентами якого є невід'ємні цілі числа, що максимізують ймовірність безвідмовної роботи системи. Задачу можна розв'язати поступовим збільшенням надійності, на кожному кроці добавляючи по одному резервному елементу, такому, який забезпечує найбільший приріст показника надійності системи при мінімальному збільшенні витрат.

Розглянемо приклад. Вузол сільськогосподарської машини складається з 5 агрегатів. Відмова будь-якого з агрегатів призводить до відмови вузла. Ймовірність безвідмовної роботи кожного агрегата протягом заданого часу t = 70 год.; витрати, пов'язані із заміною агрегатів і зберіганням запасних, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Тип агрегату	Ймовірність безвідмовної роботи	Затрати, од.			
		1	2	3	4
1	0,65	25	15	0,30	0,5
2	0,80	15	30	0,15	1,5
3	0,75	30	35	0,45	2,0
4	0,70	20	20	0,10	3,0
5	0,70	10	10	0,20	4,0

Допустимі витрати, пов'язані зі зберіганням і використанням запасних агрегатів при ремонті вузлів по видах, відповідно складають:

200, 175, 2, 16 одиниць.

Потрібно визначити, які і в якій кількості запасні агрегати необхідно мати, щоб при заданих обмеженнях на затрати ймовірність безвідмовної роботи вузла протягом заданого часу була б максимальною.

Складаємо цільову функцію:

$$P(\breve{n}) = \prod_{i=1}^{5}(1-(1-P_i)^{n_i+1}),$$

де $\breve{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$;

n_i – кількість резервних агрегатів i-го типу.

Цю функцію необхідно максимізувати. При цьому повинні дотримуватися наступні обмеження:

$$25n_1 + 15n_2 + 30n_3 + 20n_4 + 10n_5 \le 200;$$
$$15n_1 + 30n_2 + 35n_3 + 20n_4 + 10n_5 \le 175;$$
$$0{,}3n_1 + 0{,}15n_2 + 0{,}45n_3 + 0{,}1n_4 + 0{,}2n_5 \le 2;$$
$$0{,}5n_1 + 1{,}5n_2 + 2n_3 + 3n_4 + 4n_5 \le 16.$$

Розв'язуючи задачу за програмою, що реалізує вище згадану методику на ЕОМ, отримуємо:

$$n_1=3;\ n_2=2;\ n_3=1;\ n_4=1;\ n_5=1.$$

При цьому ймовірність безвідмовної роботи вузла машини протягом заданого часу буде 0,7586.

Висновок. Із вище сказаного слідує, що з допомогою математичних методів можна розраховувати або оцінювати характеристики надійності систем. Це дозволяє прогнозувати надійність складних систем, дає можливість порівняти різні варіанти створюваних систем і вибрати з них найбільш надійний.

Досить цікаві математичні питання виникають при розв'язанні задачі організації ремонту парків машин – тракторів, автомобілів, сільськогосподарської техніки тощо. На жаль, поки що цим питанням приділяється недостатня увага і багато пов'язаних з ними задач ще далекі від задовільного рішення.

Список використаних джерел

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.Н., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 84 с.
2. Бруевич Н.Г. Количественная оценка надежности. – В кн.: Основные вопросы теории и практики надежности. – М.: Наука, 1971. – С. 5-25.
3. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. – М.: Знание, 1969. – 488 с.
4. Барзшович Е.Ю., Каштанов В.А. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. – М.: Наука, 1971. – 272 с.
5. Бирков П.В. Обеспечение надежности машин инженерного вооружения при эксплуатации. – М.: Военное издательство, 1985. – 140 с.
6. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления (пер. с англ.) – М.: Советское радио, 1967. – 256 с.
7. Соловьев А.Д. Основы математической теории надежности. – М.: Знание, 1975. – 116 с.

Аннотация. *Исследуются основные проблемы теории надёжности, в частности изучается вопрос изменения состояния технической системы со временем. Анализируются способы повышения надёжности технических систем, решается задача определения оптимального размещения резервных элементов.*

Ключевие слова: *надёжность, теория надёжности, техническая система, безотказность, ремонтоприспособленность, долговечность, математическая модель, математические методы, резервирование.*

Abstract. *The main problems of reliability theory are examined, in particular, the question of changes in the technical system with the passage of time. Ways to improve the reliability of technical systems are analyzed; thorough consideration is given to the problem of determining the optimal allocation of reserve elements.*

Keywords: *reliability, reliability theory, technical system, trouble-free, durability, reparability, mathematical model, mathematical methods, reservation.*