

УДК 624.072.21/23

V. Devin, V. Tkachuk, State Agrarian and Engineering University in Podilya

#### FARM PAYMENT ON A DEPOSIT SUPPORTS THE FINITE ELEMENT METHOD

**Annotation.** After editing of metallic construction sinking of its supports (displacement, change, is in arbitrary direction), which results in appearance of tensions in its elements without the appendix of the external loadings, can take place in the process of its exploitation.

The similar is observed subject to condition static indefinableness of the system, and at the considerable degree of such indefinableness results in difficult calculations at the use of classic method of forces. During exploitation a farm, as joint cored system, carries on itself the external loadings which is taken to key. At planning of elaborate statically indefinable

designs impossibility of achievement must be taken into account in all its elements of tensions, near to possible tensions; part of elements joint cored systems is in the tense not enough state.

Lay out the arbitrary sinking of support on vertical and horizontal constituents. Then, using principle of super position, tension from sinking of supports, add to tensions which arise up at loadings, and also to possible temperature tensions.

The idea of finite element method (FEM) is based on consideration of equilibrium of all system, broken on separate elements. In application of FEM to the farms such elements are bars, united in knots in which the enclosed loadings can be and moving of which set to unknown.

Central part of decision of tasks of FEM is forming of «matrix of inflexibility» of the examined system which depends on its geometry and inflexibility of its separate elements; for difficult joint cored system the order of such matrix can arrive at hundreds and even thousands.

For forming of matrix of inflexibility the original program is made in algorithmic language which includes complete research tensely deformed to the state.

**Key words:** assembling tensions, method of finite elements, matrix of inflexibility, tensely-deformed state.

**В.С. Ткачук, В.В. Девін, кандидати технічних наук, доценти ПДАТУ**

## РОЗРАХУНОК ФЕРМ НА ОСАДКУ ОПОР МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розглянуті статично невизначні шарнірно-стержневі системи, в яких виникає напружено-деформований стан із-за осадки опор. Застосовуючи метод скінчених елементів, розкривається статична невизначність плоских ферм при їх довільній геометрії. Для формування матриці жорсткості складена оригінальна програма на алгоритмічній мові, що включає повне дослідження напружено-деформованого стану.

**Ключові слова:** монтажні напруження, метод скінчених елементів, матриця жорсткості, напружено-деформований стан, осадка опор.

**Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.** Після монтажу металевої конструкції в процесі експлуатації може відбутися осадка її опор (просідання, зсув в довільному напрямку), що приводить до появи напружень в елементах без прикладання зовнішніх навантажень. Подібне спостерігається при умові статичної невизначності системи і при значному степені такої невизначності приводить до складних розрахунків при використанні класичного методу сил. При експлуатації ферма, як шарнірно-стержнева система (ШСС), несе на собі зовнішні навантаження, які умовно зводяться до вузлових. Тоді, використовуючи принцип суперпозиції, напруження від осадки опор додають до напружень, що виникають при навантаженнях, а також до можливих температурних напружень.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми.** При проектуванні складних статично невизначних конструкцій повинна враховуватись неможливість досягнення в усіх її елементах напружень, близьких до допустимих напружень; частина елементів шарнірно-стержневих систем знаходиться в недонапруженому стані. Теоретичні розрахунки ведуться в передбаченні роботи матеріалу всіх елементів системи в пружній зоні. Довільну осадку опори розкладаємо на вертикальну і горизонтальну складові.

Ідея методу скінчених елементів (МСЕ) базується на розгляданні рівноваги всієї системи, розбитої на окремі елементи. У застосуванні МСЕ до ферм такими елементами є стержні, з'єднані у вузлах, в яких можуть бути прикладені навантаження і переміщення яких приймаються за невідомі. Центральною частиною розв'язання задач МСЕ є формування «матриці жорсткості» розглядуваної системи, що залежить від геометрії та жорсткості окремих її елементів; для складних ШСС порядок такої матриці може досягати сотень і навіть тисяч [1-3].

**Мега статті** – розробити методику для розрахунку ферм будь-якої конфігурації з прямолінійними елементами; закріплення ферми може бути довільним; довільним може бути вектор осадок при умові малості переміщень опорних вузлів порівняно з повздовжніми розмірами елементів ШСС.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Аналітичний розв'язок. Постановка задачі. Задана розрахункова схема плоскої ферми, в якій  $n$  стержнів з'єднані в  $m$  вузлах. У реальних конструкціях їх елементи виготовлені з однакового матеріалу (сталь), але, узагальнюючи, приймаємо, що матеріали стержнів відрізняються фізичними характеристиками. Вважаємо відомими довжини  $l$  стержнів ферми й кути їх нахилу  $\alpha$  до осі  $x$ . Площі перерізів стержнів  $F$  постійні по довжині, тобто жорсткість кожного стержня

$$E_i F_i = \text{const}.$$

Так як маємо можливе прикладання зусиль і реакцій тільки у вузлах схеми, то для кожного стержня маємо однорідний напружений стан – простий розтяг та стиск. Можлива втрата стійкості стиснутих елементів тут не розглядається. Система зв'язана «із землею» за допомогою  $k$  опорних стержнів.

Розв'язується задача дослідження напружено-деформованого стану (НДС) системи, а саме треба визначити:

- зусилля  $N$  в стержня (основна частина задачі);
- опорні реакції  $R$  по напрямку опорних стержнів;
- напруження  $\sigma$  в перерізах стержнів;
- подовження  $\Delta l$  стержнів;
- переміщення  $U, V$  вузлів.

#### Розкриття статичної невизначності.

Для плоскої ферми ознакою статичної невизначності є нерівність

$$n + k \geq 2 \cdot m \quad (1)$$

(позначення див. вище). Статична невизначність може бути зовнішньою і внутрішньою; тут розглянемо задачі першого типу. Викладемо хід розв'язку методом сил стосовно до ферм з осадкою опор.

На рис. 1 штрихами показано положення ферми після осадки опори 3 на величину  $v_3$  вниз. Кількість елементів ШСС  $n = 7$ , кількість вузлів  $m = 5$ , кількість опорних стержнів  $k = 4$  степінь статичної невизначності

$$n + k - 2 \times m = 7 + 4 - 2 \times 5 = 1.$$

У загальному випадку в складній фермі з багатьма опорами буде задано вектор осадок

$$\bar{U} = (u_i, v_i),$$

де  $u_i, v_i$  – переміщення опор відповідно в горизонтальному і вертикальному напрямку.

Вибираємо основну систему, відкинувши «зайві» опорні стержні. Вводимо невідомі зусилля  $X_i$  в напрямку цих стержнів (фактично це є відповідні опорні реакції для ферми), й визначаємо зусилля в стержнях  $N_p$  в цьому «вантажному» стані.

Зображаємо  $S = n + k - 2 \cdot m$  одиничних станів, прикладаючи по напрямку відкинутих стержнів одиничні сили  $\bar{X} = 1$ , й визначаємо зусилля в стержнях  $\bar{N}$  в цих станах. Для визначення зусиль  $N, \bar{N}$  користуємось відомими методами розрахунку статично визначних ферм (для подальшого розуміння МСЕ краще користуватись методом вирізання вузлів).

Обчислюємо коефіцієнти  $\delta_{ij}$  канонічних рівнянь методу сил за формулою:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i \cdot \bar{N}_j \cdot G_{ij}, \quad (2)$$

$$\text{де } G = l / E \cdot F \text{ – обернена жорсткість стержня.} \quad (3)$$

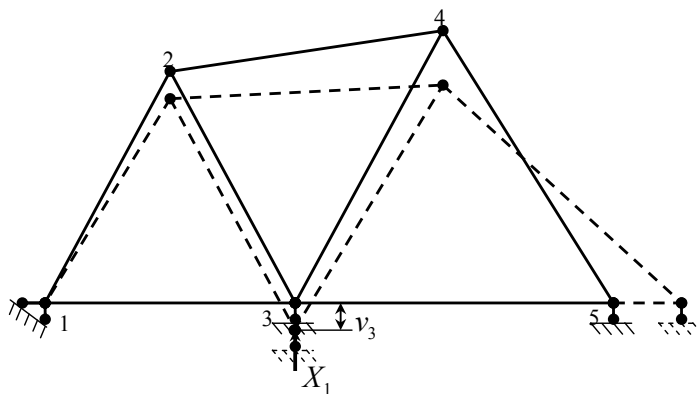


Рис. 1. Схема статично невизначної шарнірно-стержневої системи

Записуємо систему канонічних рівнянь

$$\sum \delta_{ij} \cdot X_j + \Delta_{i0} = 0, \quad (4)$$

де вільні члени  $\Delta_{i0}$  – це елементи вектора осадок, записаного для всієї системи, тобто вектор з  $2m$  елементів, з яких ненульовими є тільки відомі осадки  $u_i, v_i$ . Розв'язуємо систему, знаходимо зусилля  $X_i$ ; таким чином буде «розкрито» статична невизначність системи.

*Дослідження НДС системи.*

Обчислюємо зусилля в стержнях і опорні реакції шарнірно-стержневої системи за формулами:

$$N = \sum_{i=1}^s X_i \bar{N}_i, \quad (5)$$

$$R = \sum X_i \bar{R}_i. \quad (6)$$

Опорні реакції  $\bar{R}_i$  визначені попередньо в одиничних станах.

Визначаємо напруження в перерізах стержнів і подовження стержнів за формулами

$$\sigma_i = N_i / F_i, \quad (7)$$

$$\Delta l_i = N_i G_i. \quad (8)$$

Відмітимо, що переміщення вузлів ШСС в загальному випадку при розв'язку задачі методом сил знайти не вдається.

Примітка. Для впевненості в правильності розкриття статичної невизначності можна виконати деформаційну перевірку, виходячи з факту, що переміщення в напрямку будь-якої сили  $X_i$  повинно дорівнювати нулю або величині відповідної осадки опор; це еквівалентно виконанню умови:

$$\sum N_i \bar{N}_i G_{ij} + \Delta_{i0} = 0 \quad (9)$$

(див. пояснення до формули (4)).

Приклад. (Рис. 2)

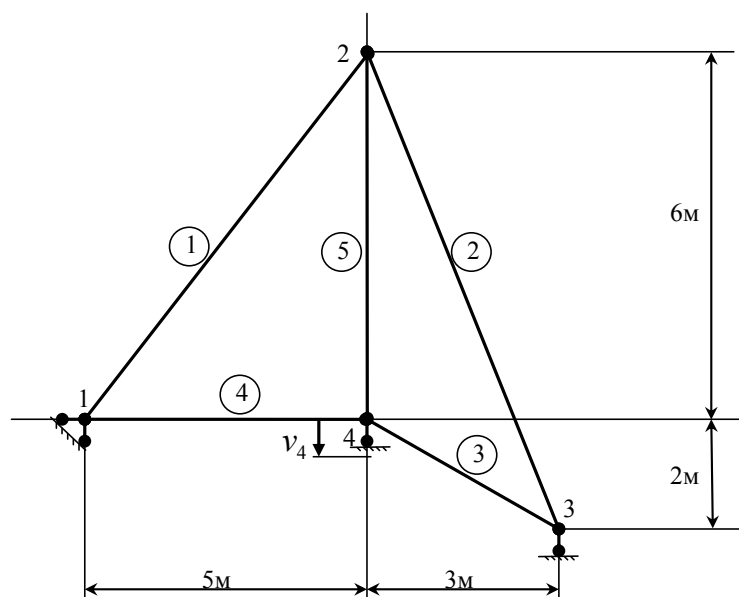


Рис. 2. Один раз статично невизначна ферма.

Пронумеруємо вузли й стержні (в кружечках). Маємо  $n=5$ ,  $m=4$ ,  $k=4$ . Система  $5+4-2 \cdot 4=1$  раз статично невизначна. По умові задана осадка опори 4 – вертикальне переміщення вузла  $v_4 = 1$  см. У таблиці 1 наведені дані по умові задачі: модулі пружності  $E$  матеріалу стержнів і площі поперечних перерізів стержнів  $F$ .

Попередньо розглянемо геометрію системи. Довжини стержнів:  $l_1 = \sqrt{5^2 + 6^2} = 7,810$  м;  $l_2 = \sqrt{3^2 + 8^2} = 8,544$  м і т.д. Кути нахилу стержнів до осі  $x$ :  $\cos \beta_1 = 5 / 7,81 = 0,6402$ ;  $\sin \beta_1 = 6 / 7,81 = 0,7682$ ;  $\beta_1 = 50,2^\circ$  і т.д. Дані обчислень заносимо в таблицю 1.

Таблиця 1

Стержні	$E \cdot 10^{-4}$ кН / см <sup>2</sup>	$F$ см <sup>2</sup>	$l$ м	$\cos \beta$	$\sin \beta$	$\beta$ град
1	2	10	7,810	0,6402	0,7682	50,2
2	0,7	8	8,544	0,3511	-0,9363	-69,44
3	1	15	3,606	-0,8319	0,5548	33,70
4	1,2	20	5	1	0	0
5	0,9	12	6	0	-1	-90

Згідно формул (3) підраховуємо значення обернених жорсткостей стержнів:

$$G_1 = 781,0 / 2 \cdot 10 = 39,05; \quad G_2 = 854,4 / 0,7 \cdot 8 = 152,27 \text{ і т.д.}$$

Дані запишемо в таблицю 2.

Таблиця 2

Стержні	$G \cdot 10^4$ см / кН	$\bar{N}$	$\bar{N}^2 \cdot G \cdot 10^4$ см / кН	$N$ кН	$\sigma$ кН / см <sup>2</sup>	$\Delta l$ см
1	39,05	-0,4882	9,307	-22,52	-2,252	0,0879
2	152,57	-0,8902	120,902	-41,07	-5,134	0,6266
3	24,04	0,3757	3,393	17,33	1,156	-0,0417
4	20,83	0,3125	2,034	14,42	0,721	-0,0300
5	55,56	1,2083	81,117	55,76	4,647	-0,3098
$\Sigma$			216,75			

Зобразимо одиничний стан (рис. 3), відкинувши опорний стержень у вузлі 4, і ввівши невідоме зусилля  $X_1$ . Визначаємо опорні реакції з умов рівноваги в цьому стані. Горизонтальна складова  $\bar{H}_1 = 0$  (на рис. не зображаємо). Вертикальні складові

$$\bar{V}_1 = 0,375; \bar{V}_3 = 0,625. \text{ Перевірка } \Sigma Y = 1 - 0,375 - 0,625 = 0.$$

Вирізаємо вузли, починаючи з вузла 1, і розглядаємо умови рівноваги (рис. 4).

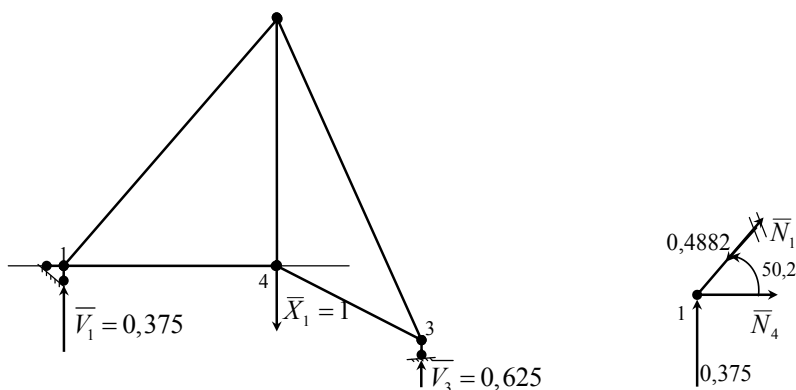


Рис. 3. Основна система.

Рис. 4. Рівновага вузла 1.

$$\Sigma Y = 0,375 + \bar{N}_1 \sin 50,2^\circ = 0; \quad \bar{N}_1 = -0,4882;$$

$$\Sigma X = \bar{N}_4 - 0,4882 \cos 50,2^\circ = 0; \quad \bar{N}_4 = 0,3125.$$

Далі, обходячи вузли в порядку 4, 3, 2, обчислюємо останні зусилля  $\bar{N}_i$  в одиничному стані; дані заносимо в таблицю 2.

Канонічна система (4) запишеться в даному випадку у вигляді одного рівняння:

$$\delta_{11} X_1 + v_4 = 0. \tag{*}$$

Обчислюємо коефіцієнт  $\delta_{11}$  за формулою (2); для цього заповнюємо стовпець  $\bar{N}^2 \cdot G$  в таблиці 2. Для окремих стержнів маємо:

$$\bar{N}_1^2 \cdot G_1 = 0,4882^2 \cdot 39,05 = 9,307;$$

$$\bar{N}_2^2 \cdot G_2 = 0,8902^2 \cdot 152,57 = 121,10 \text{ і т. д.}$$

Значення  $\delta_{11}$  записане в останньому рядку табл. 2. Таким чином рівняння (\*) запишеться, враховуючи розмірність  $G$ , у вигляді:

$$216,75 \cdot X_1 + 1 \cdot 10^4 = 0;$$

Звідси  $X_1 = -46,14$  кН. Таким чином, статична невизначність розкрита.

Дослідимо напружено-деформований стан системи.

Зусилля в стержнях обчислюємо за формулою (5):

$$N_1 = -46,14 \cdot (-0,4882) = 22,52 \text{ кН}; \quad N_2 = -46,14 \cdot (-0,8902) = 41,07 \text{ к}; \quad \text{опорні реакції - за формулою (6):}$$

$$V_3 = 46,14 \cdot 0,625 = 28,84 \text{ кН}; \quad V_3 = 46,14 \cdot 0,625 = 28,84 \text{ кН};$$

напруження в перерізах стержнів - за формулою (7):

$$\sigma_1 = -22,52 / 10 = -2,252 \text{ кН/см}^2; \quad \sigma_2 = -41,57 / 8 = -5,134 \text{ кН/см}^2 \text{ і т.д.};$$

подовження стержнів - за формулою (8):

$$\Delta l_1 = 22,52 \cdot 39,05 / 10^4 = 0,0879 \text{ см};$$

$$\Delta l_2 = 41,07 \cdot 152,57 / 10^4 = 0,6266 \text{ см і т. д.}$$

Результати заносимо в таблицю 2. Виконуємо деформаційну перевірку згідно формули (9):  
 $[39,05 \cdot (-0,4882) \cdot (-22,52) + 152,57 \cdot (-0,8902) \cdot (-41,07) + 24,04 \cdot 0,3757 \cdot 17,33 +$   
 $+ 20,83 \cdot 0,3125 \cdot 14,42 + 55,56 \cdot 1,2083 \cdot 55,76] \cdot 10^{-4} - 1 = 1 - 1 = 0.$

### Машинний розв'язок.

#### Суть методу скінченних елементів.

Конструкцію розбиваємо на окремі елементи, для яких напружено-деформований стан (НДС) вважається відомим. Виходячи з умов рівноваги та нерозривності переміщень, виконуємо спряження таких елементів. Далі формулюємо три групи рівнянь: статичні, геометричні і фізичні. В основу покладаємо ідеї методу переміщень, коли за невідомі прийнято переміщення нероз'ємних вузлів [1-3]. При формуванні вказаних груп рівнянь приходимо до побудови матриці жорсткості (МЖ) всієї розглядуваної системи. У роботі застосований власний підхід до формування МЖ, який дозволяє спростити розрахунки і введення початкових даних [4].

Залежно від причини, що викликає НДС (зовнішні навантаження, температурні та монтажні напруження), праві частини системи лінійних рівнянь відносно переміщень  $u_i, v_i$  визначаються по-різному. Систему рівнянь розв'язуємо матричним методом, обчислюючи обернену до МЖ матрицю податливості системи.

#### МСЕ в застосуванні до ШСС.

Ферму розглядаємо як сукупність  $n$  стержнів і  $m$  вузлів. При шарнірному з'єднанні стержнів у вузлах в перерізах діють тільки повздовжні зусилля  $N_i = const$ , тобто для кожного кінцевого елемента маємо однорідний напружений стан. При зміщенні опор в статично визначній ШСС напруження в її елементах не виникають, як це відбувається при навантаженні такої системи зовнішніми силами; при цьому можна визначити тільки переміщення всіх вузлів. У випадку статично невизначної ферми переміщення якихось із «зайвих» опор викликає появу в елементах конструкції НДС. Задача зведеться до визначення ненульових переміщень незакріплених або частково закріплених вузлів ШСС.

*а) Статичний бік задачі.* Вирізаємо вузли ферми й складаємо рівняння виду  $\sum X = 0, \sum Y = 0$ ; при відсутності зовнішніх навантажень ці рівняння для  $i$ -го вузла ( $i = 1, m$ ) запишуться у вигляді:

$$\sum_{i=1}^r N_i \cdot \cos \beta_i = 0; \quad \sum N_i \cdot \sin \beta_i = 0, \quad (10)$$

де  $r$  – кількість стержнів, що сходяться в  $i$ -му вузлі.

*б) Геометричний бік задачі.* Приймаючи гіпотезу малості для переміщення вузлів і подовжень стержнів, можна записати [3]:

$$\Delta l_{ij} = (u_i - u_j) \cdot \cos \beta + (v_i - v_j) \cdot \sin \beta, \quad (11)$$

де  $u, v$  – проекції переміщень вузлів  $i, j$  відповідно на осі  $x, y$ ;

$\beta$  – кут нахилу стержня  $i, j$  до осі  $x$ .

*в) Фізичний бік задачі.* Подовження стержня від зусиль в стержнях  $N$ :

$$\Delta l_{ij} = \Delta l_N = Nl/EF,$$

або, враховуючи позначення (3), можна записати:

$$\Delta l_{ij} = G \cdot N. \quad (12)$$

*г) Синтез.* Порівнюючи (11) і (12), для зусилля в стержні  $i, j$  маємо:

$$N_{ij} = [(u_i - u_j) \cdot \cos \beta + (v_i - v_j) \cdot \sin \beta] / G \quad (13)$$

Підставляємо цей вираз в рівняння рівноваги (10) і збираємо члени з  $u_i, v_i, u_k, v_k, \dots, u_t, v_t$  ( $k, \dots, t$  – номери вузлів, суміжних з  $i$ -м вузлом), при  $i = 1, m$  будемо мати систему  $2 \cdot m$  лінійних рівнянь відносно переміщень. Якщо в умові задачі не задати вектор осадки опор, то вказана система буде однорідною й матиме тільки нульовий розв'язок, що означає відсутність НДС в системі.

Тому вважаємо, що задано ненульовий «вектор осадок» опор ШСС  $U$ , тоді система рівнянь в матричній формі запишеться

$$R \cdot \bar{U} = \bar{P}_1, \quad (14)$$

де  $R$  – матриця системи, тобто МЖ для всієї ферми;

$\bar{U}$  – вектор невідомих переміщень;

$\bar{P}_1$  – вектор вільних членів.

Матриця  $R$  є блочною й симетричною відносно головної діагоналі. Її конструювання детально викладено в [4], тут же зупинимося на конструюванні вектора  $\bar{P}_1$ . Так як вектор  $U$  ненульовий, елементи вектора  $P_1$  обчислюються за формулою:

$$P_{1i} = \sum_{j=1}^{2m} R_{ij} \cdot U_j \quad (i = \overline{1, 2m}). \quad (15)$$



Подальший розв'язок зводиться до «стискання» системи рівнянь шляхом вилучення рядків і стовпців МЖ з номерами, які задаються вектором  $\bar{C}(c_1, c_2, \dots, c_k)$ , де  $c_i$  – номери опорних стержнів;  $k$  – їх кількість. Одержуємо «стиснуту» матрицю жорсткості,  $Z_1$  – «стиснутий» вектор  $\bar{P}_2$  (вільні члени системи рівнянь). Одержану систему розв'язуємо за формулою:

$$\bar{U}_1 = Z_1^{-1} \cdot \bar{P}_2, \tag{16}$$

де "–1" – операція обертання матриць.

Таким чином, одержані основні результати – знайдені переміщення  $u, v$  вузлів ферми.

Аналіз НДС ферми. Одержавши вузлові переміщення, можна повністю дослідити напружено-деформований стан ШСС, а саме:

з формули (13) визначаємо зусилля  $N$  в стержнях. Опорні реакції  $R_i$  знаходимо з умов рівноваги вузлів по знайдених значеннях  $N_i$

$$R_i = \sum_{j=1}^n T(c_i, j) N_j, (i=1, t), \tag{17}$$

де  $t$  – кількість опорних стержнів;

$T$  – «тригонометрична матриця» системи (вирази для її елементів тут не наводимо);

з формули (7) знаходимо напруження  $\sigma$  в перерізах стержнів;

з формули (12) обчислюємо повздовжні деформації стержнів.

Програма на алгоритмічній мові.

Відмітимо деякі моменти при користуванні програмою. Притримуємось наступного порядку нумерації опорних стержнів для  $i$ -го вузла та осадок (переміщень вузлів):

$2 \cdot i - 1$  – горизонтальний напрямок;

$2 \cdot i$  – вертикальний напрямок.

Правило знаків для  $U_i, V_i$ .

Введення даних:

координати  $x, y$  вузлів – попарно, в метрах;

елементи структурних векторів  $a, b$  – попарно.

Приклад. ФЕРМА. ОСАДКА ОПОР

Умова задачі

Координати вузлів

0,000	5,000	8,000	5,000
0,000	6,000	-2,000	0,000

Структурні вектори

1	2	3	1	2
2	3	4	4	4

Модулі пружності

2,00E4	0,70E4	1,00E4	1,20E4	0,90E4
--------	--------	--------	--------	--------

Площі перерізів

10,00	8,00	15,00	20,00	12,00
-------	------	-------	-------	-------

Вектор осадок

0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,00
------	------	------	------	------	------	------	------	-------

Вектор закріплення

1	2	6	8
---	---	---	---

Результати розв'язку

Опорні реакції

0,0000	-17,3052	-28,8421	46,1473
--------	----------	----------	---------

Зусилля в стержнях

-22,5264	-41,0711	17,3319	14,4210	55,7614
----------	----------	---------	---------	---------

Переміщення вузлів

0,0000	0,6908	0,7468	0,0300
--------	--------	--------	--------

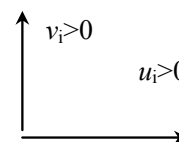
0,0000	-0,6902	0,0000	-1,0000
--------	---------	--------	---------

Подовження стержнів

-0,0880	-0,6266	0,0417	0,0300	0,3098
---------	---------	--------	--------	--------

Напруження в стержнях

-2,2526	-5,1339	1,1555	0,7211	4,6468
---------	---------	--------	--------	--------



**Висновки.** Пропоноване використання методу дозволяє вести повний розрахунок плоских статично невизначних ферм на переміщення вузлів, зокрема на осадку опор в реальних шарнірно-стержневих системах. Програма на алгоритмічній мові включає повне дослідження напружено-деформованого стану. Метод може бути узагальнений і на випадок просторових стержневих систем.

#### Список використаних джерел

1. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – К.: Наукова думка, 1976.– 415 с.
2. Снитко Н.К. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1972. – 488 с.
3. Строительная механика. Под редакцией Даркова А.В. – М.: Высшая школа, 1976. – 600 с.
4. Справочник по теории упругости. Под редакцией Варвака П.М. – К.: Будівельник, 1971. – 420 с.
5. Беляев Н.М. Сопrotивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 608 с.

**Аннотация.** Рассмотрены статически неопределимые шарнирно-стержневые системы, в которых возникает напряженно-деформированное состояние из-за осадки опор. Применением метода конечных элементов раскрывается статическая неопределимость плоских ферм при их произвольной геометрии. Для формирования матрицы жесткости составлена оригинальная программа на алгоритмическом языке, которая включает полное исследование напряженно-деформированного состояния. Приведены примеры решения задач методом сил и машинным методом.

**Ключевые слова:** монтажные напряжения, метод конечных элементов, матрица жесткости, напряженно-деформированное состояние, осадка опор.