

УДК. 519.216.22

Полішко С.В. к.т.н. с.н.с.;

Шумська К.О.;

Прокопенко О.С.

Центр військово-стратегічних досліджень Національного університету оборони України  
імені Івана Черняховського

## Статистична швидкодія адаптивних систем з максимально правдоподібною оцінкою апіорі невідомої матриці впливів

Статистическое быстрое действие адаптивных систем с максимально правдоподобной оценкой априори неизвестной матрицы влияний

Statistical fast-acting of the adaptive systems with a maximally plausible estimation a priori unknown matrix of influences

**Резюме.** У статті порівнюється статистична швидкодія чотирьох різновидів адаптивних виявлювачів гаусових сигналів на тлі гаусових корельованих завад (впливів). Висунуто вимоги до обсягу навчальної вибірки при максимально правдоподібному оцінюванні апіорі невідомої кореляційної матриці гаусових завад (матриці впливів).

**Ключові слова:** статистична швидкодія, щільність розподілу, адаптивні виявлювачі, гаусові завади.

**Резюме.** В статье сравнивается статистическое быстрое действие четырех разновидностей адаптивных обнаружителей гауссовых сигналов на фоне гауссовых коррелированных помех (влияний). Выдвинуты требования к объему обучающей выборки при максимально правдоподобном оценивании априори неизвестной корреляционной матрицы гауссовых помех (матрицы влияний).

**Ключевые слова:** статистическое быстрое действие, плотность распределения, адаптивные обнаружители, гауссовы помехи.

**Resume.** In the article the statistical fast-acting of four varieties is compared with adaptive reveal objects Gausse signals on a background Gausse correlated hindrances(influences). Requirements are pulled out to the educational sample size at a maximally plausible evaluation a priori of unknown cross-correlation matrix of Gausse hindrances(matrices of influences).

**Keywords:** statistical fast-acting, closeness of distribution, adaptive detective, to Gausse of clutter.

**Постановка проблеми.** Якість роботи адаптивних виявлювачів (АВ) сигналів у завадовій обстановці, що змінюється динамічно, залежить від їх швидкодії, яка характеризується різними способами.

**Ступінь розробленості проблеми.** Аналізу зазначеної швидкодії приділено велику увагу в літературі [1, 6 та ін.], де найбільш широко використовується "енергетичний" критерій [1, 6 та ін.]. На його основі швидкодія визначається обсягом навчальної вибірки  $K$ , використаної для оцінки апіорі невідомих параметрів завад, при якому в порівнянні з асимптотичною ситуацією середні втрати у відношенні сигнал/(завада + шум) (ВСЗШ) на виході АВ не перевищують заданої величини

(зазвичай – 3 дБ). Проте обсяг вибірки, визначений по допустимим енергетичним втратам, може призвести до неприпустимих втрат у статистичних характеристиках виявлення (імовірності хибної тривоги (ІХТ)  $F$  та імовірності правильного виявлення (ІПВ)  $D$ ) [5]. Ці характеристики є головними для АВ, тому рівень саме їх втрат повинен бути критерієм вибору обсягу навчальної вибірки.

**Метою статті** є порівняльний аналіз "статистичної" швидкодії чотирьох різновидів АВ та обґрунтування на цій основі вимог до обсягу навчальної вибірки  $K$  при максимально правдоподібному (МП) оцінюванні апіорі невідомої кореляційної матриці (КМ) гаусових завад.

### Виклад основного матеріалу

Постановка завдання, моделі і допущення

Задача, що вирішується полягає у визначенні залежності від обсягу навчальної вибірки  $K$  статистичних характеристик виявлення

$$D = D(K) = \int_{x_0}^{\infty} p_{\xi_1}(x, K) dx, \quad F = \int_{x_0}^{\infty} p_0(x, K) dx \quad (1)$$

чотирьох АВ, що відрізняються видом передпорогових статистик (ППС), які порівнюються з порогом  $x_0 = x_0(K)$ , регулюючим ІХТ  $F$ , зумовленої наявністю завади  $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i=1}^M$ .

Тут  $p_{\xi_\gamma}(x, K)$  - щільність розподілу ППС  $\xi_\gamma = \xi(\mathbf{u}_\gamma)$  відповідного АВ при відсутності ( $\gamma = 0$ ) і наявності ( $\gamma = 1$ ) корисного сигналу

$\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=1}^M$  у вхідній суміші

$$\mathbf{u}_\gamma = \{u_i^{(\gamma)}\}_{i=1}^M = \mathbf{y} + \gamma \cdot \mathbf{s}, \quad \gamma = 0, 1 \quad (2)$$

Доданки в (2) мають сенс  $M$  - мірних векторів комплексних амплітуд завади і корисного сигналу на виходах  $M$  каналів прийому (входах АВ) у фіксований момент часу. Вони вважаються випадковими взаємно незалежними комплексними нормальними (гаусовими) векторами з нульовими середніми значеннями і КМ  $\overline{\Phi} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^*$  і  $\overline{\Phi_s} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^*$  відповідно (риска зверху і  $(*)$  - символи статистичного усереднення і ермітового спряження).

Ермітова позитивно визначена КМ завади  $\Phi$  вважається матрицею загального виду, корисний сигнал - когерентна (дружно флюктуюча) пачка

$$\mathbf{s} = \beta \cdot \mathbf{x}, \quad \beta \sim CN(0, h), \quad \Phi_s = h \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^*, \quad \text{rank } \Phi_s = 1 \quad (3)$$

з випадковою нормальною комплексною амплітудою  $\beta$ , відносної (по відношенню до власного шуму приймача) інтенсивністю (ВСШ)  $h$ ,  $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^M$  - невідповідний комплексний  $M$ -мірний вектор амплітудно-фазового розподілу імпульсів пачки на виходах  $M$  каналів прийому.

У розглянутих АВ із порогом порівнюються ППС

$$\xi_{1\gamma} = \left| \mathbf{u}_\gamma^* \cdot \overset{\Delta}{\Psi} \cdot \mathbf{x} \right|^2, \quad \xi_{2\gamma} = \xi_{1\gamma} / \mathbf{x}^* \cdot \overset{\Delta}{\Psi} \cdot \mathbf{x},$$

$$\xi_{3\gamma} = \xi_{2\gamma} / (1 + K^{-1} \cdot \xi_{4\gamma}), \quad \xi_{4\gamma} = \mathbf{u}_\gamma^* \cdot \overset{\Delta}{\Psi} \cdot \mathbf{u}_\gamma, \quad (4)$$

де

$$\overset{\Delta}{\Psi} = \left\{ \overset{\Delta}{\psi}_{ij} \right\}_{i,j=1}^M = \left( \overset{\Delta}{\Phi} \right)^{-1} \quad (5)$$

$M \times M$  матриця, зворотна МП оцінці апіорі невідомої КМ завад, що використовується в АВ

$$\overset{\Delta}{\Phi} = K^{-1} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^M = \mathbf{V}\mathbf{V}^* = \sum_{i=1}^K \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i^*, \quad (6)$$

Вона формується по класифікованій (без корисного сигналу) навчальній вибірці (НВ)  $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^K$   $K$  взаємно незалежних  $M$ -мірних векторів  $\mathbf{v}_i$ ,  $i \in 1, K$ , статистично еквівалентних вектору завади  $\mathbf{y}$  [1 - 5]. У цих умовах випадкова матриця  $\mathbf{A}$  в оцінці (6) має розподіл Уїшарта з щільністю [1]

$$p(\mathbf{A}) = I(\Phi) |\mathbf{A}|^\delta \exp\{-tr(\Phi^{-1}\mathbf{A})\}, \quad (7)$$

$$\delta = K - M \geq 0$$

де  $I(\Phi)$  - нормуючий множник,  $tr(\mathbf{C})$  - слід матриці  $\mathbf{C}$ . Параметрами щільності (7) є ефективний обсяг вибірки  $\delta = K - M \geq 0$  та істина КМ завади  $\Phi$ .

В умовах (6), (7) можна отримати точні аналітичні вирази щільності розподілу ППС (4), розглянутих АВ, при  $\gamma \in 0, 1$  і обчислити на їх основі характеристики виявлення (1). Їх висновок, однак, досить громіздкий, тому нижче наводяться й аналізуються тільки підсумкові результати.

Аналіз "статистичної" швидкодії адаптивних виявлювачів

**А.** Почнемо з ППС  $\xi_{1\gamma}$  (5), що при  $K \rightarrow \infty$  збігається з ППС оптимального виявлювача когерентного сигналу (4) на фоні гаусових завад. У цьому випадку [4]

$$F = {}_3F_1\left(\delta + 2, \frac{(\delta + 2)}{2}, \frac{(\delta + 1)}{2}; K + 1; -4x_1\right),$$

$$D = \int_0^1 p_v(y) {}_2F_0\left(\frac{(\delta + 2)}{2}, \frac{(\delta + 1)}{2}; -4x_1 \cdot y; 1 + \mu \cdot y\right) dy, \quad (8)$$

де  ${}_2F_0(a, b; z)$  і  ${}_3F_1(a, b, c; d; z)$  - відповідні гіпергеометричні функції,

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 \cdot (K^2 \cdot \mathbf{x}^{*T} \cdot \Psi \cdot \mathbf{x}), \\ \Psi &= \Phi^{-1}, \quad \mu = h \cdot \mathbf{x}^{*T} \cdot \Psi \cdot \mathbf{x} - \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \beta(x, \delta, M) &= \frac{x^\delta (1-x)^M}{B(\delta+1, M+1)}, \\ B(n+1, m+1) &= n!m!/(n+m+1)! \end{aligned} \quad (12)$$

ВСЗШ на виході оптимального виявлювача,

$$p_v(x) = \beta(x, \delta+1, M-2), \quad - \quad (10)$$

щільність розподілу випадкової величини

$$\begin{aligned} v &= \mu / \mu, \\ \mu &= h \cdot \left| \mathbf{r}^{*} \cdot \mathbf{x} \right|^2 / \mathbf{r}^{*} \cdot \Phi \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \Psi \cdot \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (11)$$

що має сенс нормованого до максимуму оціночного ВСЗШ на виході АВ [1],

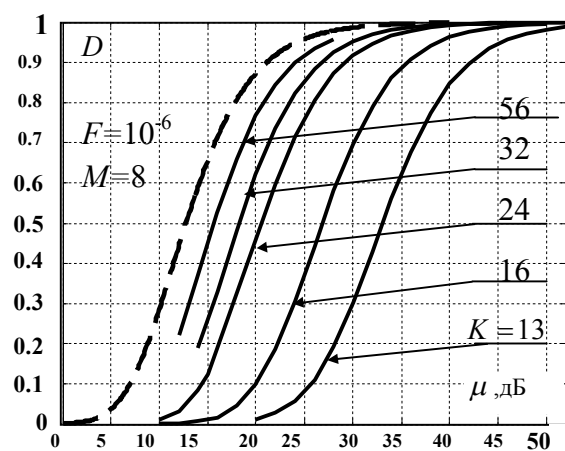


Рис. 1

Залежність цих втрат від ОБ  $K$  при  $D = 0.5$  показана суцільною кривою на рис. 2. Штрихова крива 1 тут характеризує середні енергетичні втрати АВ, рівні [1]

$$1/\bar{v} = (K+1)/(\delta+2) \quad (13)$$

Ці втрати вже при  $K \geq K_e = 2M - 3$  не

перевищують 3 дБ ( $1/\bar{v} \leq 2$ ) і тому для їх компенсації достатньо подвоїти ВСШ  $h$  (3). На цій підставі вибірку обсягу  $K_e$  часто вважають практично достатньою. Однак така вибірка може призвести до неприпустимо великих втрат у характеристиках виявлення. Так, в умовах рис. 1, 2 при  $K = K_e = 13$  АВ практично непрацездатний ( $D = D_a \leq 0.02$ ) аж до значення  $\mu \approx 21$  дБ, при якому оптимальна обробка забезпечує ПВ  $D = D_0 = 0.9$ . Подвоєння ВСШ  $h$ , при якому середнє значення вихідного ВСЗШ також дорівнює 21 дБ, збільшує ПВ тільки до  $D = D_a \leq 0.05$ , тобто залишає його як і раніше непрацездатним. Щоб довести значення ПВ до  $D = D_a = 0.9$  потрібно ВСЗШ  $\mu \approx 42$  дБ, тобто

Розраховані за (8) сімейство залежностей  $D = D(\mu, K)$  для  $F = 10^{-6}$  і  $M = 8$  наведені на рис. 1. Штрихова крива тут відповідає гіпотетичній асимптотичній ситуації  $K \rightarrow \infty$  (точної КМ завади в (4)). Різниця абсцис штрихової і суцільної кривих в обраній точці осі визначає втрати (в дБ) в цій точці порогового сигналу АВ у порівнянні з оптимальним через обмеженість ОБ  $K$  в МП оцінці (6).

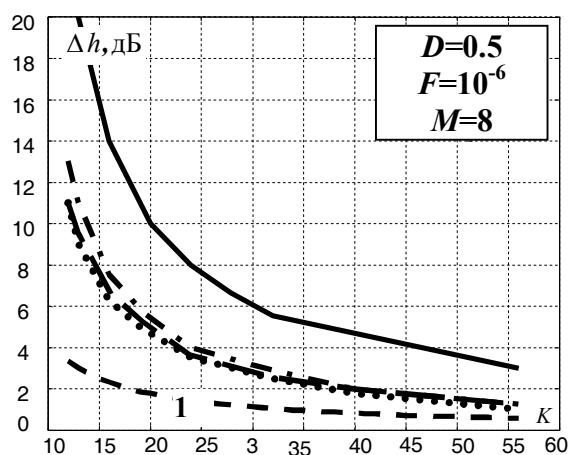


Рис. 2

збільшення ЗСШ не на 3, а на 21 дБ. Щоб вимоги до додаткового росту порогового ВСШ  $h$  не перевищили 3 дБ, в умовах рис. 2 необхідна навчальна вибірка істотно більшого обсягу  $K = K_s \approx 56 = 7M$ .

Ще один недолік розглянутого АВ - неможливість регулювати (зокрема, фіксувати) рівень хибних тривог із-за залежності порогу  $x_0$  (9) від апіорі невідомої точної КМ завади. Цей недолік відсутній в інших АВ (4).

**Б.** В адаптивних виявлювачах із ППС  $\xi_{2\gamma}$  і  $\xi_{3\gamma}$  (4) цей недолік усувається за рахунок нормування ППС  $\xi_{1\gamma}$  на відповідні множники. Як показано в [2, 3], цей захід забезпечує незалежність щільностей розподілу відповідних ППС при відсутності сигналу ( $\gamma = 0$ ) від апіорі невідомих характеристик завад, так що поріг  $x_0$ , керуючий рівнем помилкових тривог, залежить тільки від відомих значень  $M$  і  $K$ . Істотно, що цей захід одночасно приблизно вдвічі збільшує і статистичну швидкодію

відповідних АВ, показану на рис. 2 штрих-пунктирною (для ППС  $\xi_{2\gamma}$ ) і пунктирною (для ППС  $\xi_{3\gamma}$ ) кривими.

Зазначені достоїнства "купаються", однак, різким ускладненням АВ через необхідність формувати нормуючі множники для кожного з безліч опорних сигналів  $x$  (3), що перекривають весь можливий діапазон амплітудно-фазових розподілів імпульсів пачки корисних сигналів на виходах  $M$  каналів прийому.

**В.** Істотно простіше ця задача розв'язується в АВ, що формують ППС

$$F = \frac{1}{\int_0^{(1+x_0/K)} \beta(y; \delta, m-1) dy}, \quad D = \frac{\int_0^{(1+x_0/K)} \beta(y; \delta, m-1) {}_2F_1\left(1, K+1; M; \frac{(1-y)\cdot\mu}{(1+\mu)}\right) dy}{(1+\mu)}.$$

Звідси випливає, що керування рівнем хибної тривоги за рахунок регулювання порогу  $x_0$  тут також не вимагає знання істинної кореляційної матриці завади. Водночас, статистична швидкодія адаптивного виявлювача (14) (позначена крапками крива на рис. 2) не нижча, аніж істотно більш складних АВ.

**Висновки.** Вимоги до обсягу навчальної вибірки, що впливають із загальноживаного "енергетичного" критерію швидкодії, не гарантують практично необхідного рівня статистичних характеристик виявлення АВ. Для його досягнення можуть знадобитися вибірки в декілька разів більшого об'єму, коректно визначеного на основі використаного в статті "статистичного" критерію швидкодії.

Відомі методи підвищення "статистичної" швидкодії АВ та управління рівнем хибних тривог, оснований на нормуванні передпорогової статистики, суттєво ускладнюють обробку. Показано, що їх достоїнства притаманні й істотно більш простим АВ із некогерентним накопиченням вихідних сигналів об'єднуючих фільтрів, функції яких можуть ефективно виконувати адаптивні рішотчасті фільтри. Тому розробка АВ на їх основі, які є найбільш придатні для використання в адаптивних системах просторово-часової обробки сигналів

$$\xi_{4\gamma} = \mathbf{u}_\gamma^* \cdot \Psi \cdot \mathbf{u}_\gamma = \mathbf{p}_\gamma^* \cdot \mathbf{p}_\gamma, \quad \mathbf{p}_\gamma = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_\gamma, \quad \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} = \Psi. \quad (14)$$

Обробка відповідно до (14) припускає некогерентного накопичення (підсумовування квадратів модулів) елементів вектора  $\mathbf{p}_\gamma = \{p_i^{(\gamma)}\}_{i=1}^M$  вихідних сигналів об'єднуючого фільтра завади (з матричною імпульсною характеристикою  $\mathbf{H}$  – "коренем" матриці  $\Psi$  в поданні, визначеному останньою рівністю в (14)). У цьому випадку [5]

на фоні гаусових завад, є **напрямок подальших досліджень.**

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. S. Reed, J. D. Mallet, L. E. Brennan. "Rapid convergence rate in adaptive arrays".// IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., November 1974, vol. AES-10, №6.
2. L. Cai, H. Wang. Performance Comparisons of Modified SMI and GLR Algorithms.// IEEE Trans. on AES, vol.3, May, 1991, p.p.487-491.
3. F. Robey, D. Fuhrmann, E. Kelly and R. Nitzberg. "A CFAR adaptive matched filter detector".// IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol.28, №1, January 1992, p.p. 208-216.
4. D.I. Likhovitsky, P.M. Flekser, S.V. Polishko. On losses of coherent signal in the adaptive detector with non-coherent integration. // Proceedings IV<sup>th</sup> International Conference on Antenna Theory and Techniques. Sevastopol, Ukraine, September 9-12, 2003, p.p. 36-41.
5. Д. И. Леховицкий, С. В. Полишко, С. И. Бурковский. О стабилизации уровня ложной тревоги в фильтровых системах междупериодной обработки сигналов на фоне пассивных помех. – Системы обработки информации. -Х.:ХВУ. -2004. -Вип.5, с.154-163.
6. Ширман Я. Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981. 416с.