УДК 351.04.865

Гаценко С. С.

Кафедра застосування космічних систем та геоінформаційного забезпечення Національного університету оборони України імені Івана Черняховського, Київ

Математична модель дисципліни обслуговування інформаційних потоків

Резюме. У статті запропоновано математичну модель дисципліни обслуговування інформаційних потоків, яка характеризує взаємодію потоків запитів із комутаційною схемою, що є актуальним у подальшому при безпосередній розробці підсистеми розподілу та зберігання інформації в інформаційній системі підтримки прийняття рішення автоматизованої системи управління військами.

Ключові слова: математична модель; дисципліна обслуговування; інформаційний потік; потоки запитів; імовірності станів; довжини черги; очікування; функція розподілу.

Постановка проблеми. На сучасному етапі розвитку Збройних Сил України в органах управління виникає протиріччя між безперервно зростаючим обсягом інформації, яка використовується в процесі управління, і часом, який безперервно скорочується на її збирання, оброблення, аналіз та доведення [4, 7, 8].

Зміна характеру збройної боротьби (“гібридна війна”), недостатність апріорної інформації про противника призвела до значного зростання обсягу інформації, яка добувається розвідувальними органами та переробляється в органах управління. При цьому збільшився не лише обсяг, а й ступінь деталізації даних, необхідних для прийняття рішення в умовах невизначеності [8, 9].

Аналіз публікацій [2-4, 6, 9, 13, 14] показує, що розв’язання цієї задачі на сьогодні неможливе без впровадження в практику роботи органів управління сучасних методів прийняття рішення на основі інтелектуалізації інформаційних процесів, автоматизації її обробки, розроблення і втілення спеціального програмного забезпечення, штучного інтелекту, сучасних досягнень у галузі інформаційних технологій та раціональних схем (систем) збору, обробки, передачі і розподілу розвідувальної інформації.

У [2-4, 8] запропонований підхід щодо розв’язання задачі удосконалення автоматизованої системи управління військами (АСУ військами) шляхом розроблення та впровадження інтелектуальної системи підтримки прийняття рішення (ІСППР) АСУ військами, а також методики розподілу розвідувальної інформації та надання рекомендацій в умовах невизначеності.

В [2] авторами запропонована модель ІСППР АСУ військами та в [3] розроблена математична модель інформаційних потоків на основі характеристик та властивостей потоків запитів систем розподілу інформації.

Отже, в статті **метою дослідження** є розроблення математичної моделі дисципліни обслуговування інформаційних потоків, як складової системи розподілу інформації, яка виконує функцію взаємодії потоків запитів із комутаційною схемою (КС) підсистеми розподілу та зберігання інформації [2] ІСППР АСУ військами

Виклад основного матеріалу. Важливою складовою математичної моделі підсистеми розподілу та зберігання інформації [2] є дисципліна обслуговування потоку запитів, яка характеризує взаємодію підсистеми з потоком запитів КС підсистеми розподілу та зберігання інформації.

На основі базової класифікації [12, 15], дисципліна обслуговування однорідного випадкового нестаціонарного ординарного потоку запитів без післядії (інформаційного потоку) [2, 3] з точки зору:

способу обслуговування запитів – з очікуванням;

закону розподілу тривалості обслуговування – випадкова величина розподілена за показовим законом;

наявності пріоритетів в обслуговуванні певних категорій запитів – з можливістю реалізації;

порядку обслуговування запитів – по черзі;

наявності обмежень при обслуговуванні всіх або деяких категорій запитів (за часом очікування, за кількістю запитів, що очікують, за тривалістю обслуговування) – без обмежень.

У підсистемі розподілу та зберігання інформації обслуговування запитів буде здійснюватись з очікуванням із метою уникнення втрат розвідувальної інформації.

Закон розподілу тривалості обслуговування запитів буде показовим, оскільки саме з використанням цього закону розподілу випадкової величини для досліджень, в повному обсязі буде враховано особливості тривалості обслуговування запитів та запис розвідувальної інформації до відповідних баз даних у підсистемі розподілу та зберігання інформації.

Так, з досвіду застосування підрозділів у ході проведення антитерористичної операції (АТО) на сході України [4]: розвідувальне повідомлення малого інформаційного обсягу (до 100 кБ) подавались на вищестоящі органи управління (ОУ) на порядок частіше, ніж розвідувальне повідомлення обсягом більше 100 кБ, у свою чергу, розвідувальні донесення, обсяг яких вимірювався мегабайтами, відправлялись та приймались набагато рідше, ніж попередні. Приведена закономірність якраз і описується показовим законом розподілу, оскільки зі зростанням обсягів розвідувальної інформації збільшується загальний час на обслуговування та запис до відповідної бази даних кожного інформаційного повідомлення.

Для розподілу запитів буде використовуватись повнодоступний пучок ємністю $\upsilon(1 \le \upsilon < \infty)$ ліній, включений в неблокуючу КС.

Вибір саме повнодоступного пучка схемою реалізації КС пов'язаний з високим ступенем надійності, що обумовлений простотою програмної реалізації. На вхід КС поступає потік запитів, що досліджується з параметром нестаціонарного ординарного потоку без післядії $\int_{t_0}^{t} \lambda(u)du$ [3]. Кожен запит, що надійшов для обслуговування займає будь-яку вільну лінію пучка. Якщо всі υ ліній зайняті в момент надходження запиту, то він стає в чергу на очікування до звільнення зайнятих іншими запитами ліній пучка. Виходячи з цього, запити, які надходять на очікування можуть створити чергу різної кінцевої довжини. Запити, які знаходяться в черзі на очікуванні, обслуговуються в порядку черги.

Тривалість зайняття лінії обслуговуванням запиту є випадковою величиною, розподіленою за показовим законом розподілу з параметром

$$\beta : F(t) = 1 - e^{-\beta t},$$

де $F(t)$ – функція розподілу.

Тому доцільно визначити:

імовірності різних станів повнодоступного пучка;

імовірності довжини черги запитів, що знаходяться на очікуванні;

імовірність очікування запиту на обслуговування;

функцію розподілу часу очікування запитом початку обслуговування.

Позначимо через i стан системи в будь-який момент часу t. Це означає, що в системі на обслуговуванні та очікуванні знаходиться $i = 0, 1, 2, \ldots$ запитів. Якщо в момент часу t в системі знаходиться $i < \upsilon$ запитів, то вони всі знаходяться на обслуговуванні. При $i = \upsilon + r$, υ запитів знаходиться на обслуговуванні (зайняті всі υ ліній пучка), а решта $r = i - \upsilon$ запитів знаходяться в очікуванні (r – довжина черги).

Визначення ймовірностей станів системи повнодоступного пучка. Процес зміни станів системи $i = 0, 1, 2\ldots$ досліджуємої КС можна розглядати як марківський процес народження та загибелі із скінченною множиною станів, оскільки за нескінченно малий інтервал часу $[t, t+\tau)$ з імовірністю більше нуля в стан i можливий тільки безпосередній перехід системи зі станів $i-1,\ i,\ i+1$.

Не обмежуючи поки що ємності пучка ліній $\upsilon = \infty$, визначимо ймовірності $P_i(t+\tau)$ того, що в момент $(t+\tau)$ пучок знаходиться в стані i.

Оскільки досліджуємий потік запитів є ординарним і його параметр в момент часу t не залежить від процесу обслуговування запитів до моменту t, то процес обслуговування запитів цього потоку повнодоступним пучком ліній є процесом народження та загибелі. Діаграма станів і переходів цього процесу приведена на рисунку 1.

Процес народження в даній задачі ототожнюється з процесом зайняття, а процес загибелі - з процесом звільнень ліній пучка. Параметри потоків зайняття та звільнень позначені відповідно λ_i та ν_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ При цьому мається на увазі значення параметрів зайняття та звільнення для кожного числа запитів ряду $i = 0, 1, 2, \ldots$ за інтервал часу τ. Виходячи з процесу народження та загибелі, при $\tau \to 0$ пучок у момент $(t+\tau)$ може знаходитись у стані i тільки при виконанні наступних умов.

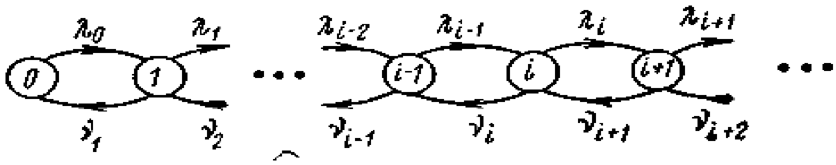

Рис. 1 Діаграма станів і переходів цього процесу

1. У момент t пучок знаходиться в стані $i-1$ (імовірність цієї події $P_{i-1}(t)$), і за час τ на обслуговування надійде точно один запит (імовірність даної події $P_{в}(\tau)$). Тоді ймовірність переходу пучка за інтервал часу $[t,t+\tau)$ зі стану $i-1$ в стан i становить $P_{i-1,i}(\tau)=P_{i-1}(t)P_{в}(\tau)$. При цьому ймовірність $P_{в}(\tau)$ є умовною, тобто визначається з урахуванням того, що в момент t пучок знаходиться в стані $i-1$.

2. У момент t пучок знаходиться в стані $i+1$ (імовірність цієї події $P_{i+1}(t)$), і за час τ звільниться точно одна з $i+1$ зайнятих ліній (імовірність даної події $P_{зв\ i+1}(\tau)$). Тоді ймовірність переходу пучка за інтервал часу $[t,t+\tau)$ зі стану $i+1$ в стан i становить $P_{i+1,i}(\tau)=P_{i+1}(t)P_{зв\ i+1}(\tau)$. При цьому ймовірність $P_{зв\ i+1}(\tau)$ є умовною, тобто визначається з урахуванням того, що в момент t пучок знаходиться в стані $i+1$.

3. У момент t пучок знаходиться в стані i (імовірність цієї подій $P_i(t)$). За час τ пучок не змінить свого стану, він залишиться в стані i, тобто на пучок не надходить запит і в ньому не звільняється жодна із зайнятих ліній [імовірність цієї події $(1-P_{в}(\tau)-P_{зв\ i}(\tau))$]. Імовірність переходу пучка зі стану i в стан i становить $P_{ii}(\tau)=P_i(t)(1-P_{в}(\tau)-P_{зв\ i}(\tau))$.

4. За час $[t,t+\tau)$ в пучку відбувається два і більше переходів у результаті надходження двох і більше запитів, або звільнення двох і більше ліній, або надходження одного і більше запитів з одночасним звільненням однієї та більше ліній. Імовірність таких подій $o(t)$.

Умови 1-4 взаємно виключають одна одну, тому ймовірності $P_i(t+\tau),\ i=0,1,2,\dots$, визначаються як сума приведених вище чотирьох ймовірностей:

$$\begin{aligned} P_i(t+\tau) &= P_{i-1,i}(\tau)+P_{i+1,i}(\tau)+P_{i,i}(\tau)+o(\tau)=P_{i-1}(t)P_{\hat{a}}(\tau)+ \\ &+P_{i+1}(t)P_{\text{çâ}\,i+1}(\tau)+P_i(t)(1-P_{\hat{a}}(\tau)-P_{\text{çâ}\,i}(\tau))+o(\tau);\quad i\geq 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Імовірність надходження точно одного запиту $P_{в}(\tau)$ за інтервал часу $[t,t+\tau)$ та ймовірність звільнення точно однієї з i зайнятих ліній за той же інтервал часу – $P_{зв\ i}(\tau)$.

Із визначення параметра потоку в будь-який момент часу t: $\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{P_{i\geq 1}(t,t+\tau)}{\tau}=\lambda(t)$ слідує висновок, що ймовірність поступлення одного і більше запитів за інтервал часу $[t,t+\tau)$ дорівнює $P_{i\geq 1}(t,t+\tau)=\lambda(t)\tau+o(\tau)$. Для досліджуємого потоку запитів із параметром λ_i, який залежить від початкового моменту t та тривалості часового інтервалу $[t,t+\tau)$ – урахування нестаціонарності: $P_{i\geq 1}(t,t+\tau)=\tau\int\limits_t^{t+\tau}\lambda_1(u)du+o_1(\tau)$. Оскільки він є ще й ординарним, то ймовірність поступлення двох та більше запитів за нескінченно малий інтервал часу $[t,t+\tau)$ дорівнює $P_{i\geq 2}(t,t+\tau)=o_2(\tau)$. На основі цього:

$$P_{в}(\tau)=P_{i\geq 1}(t,t+\tau)-P_{i\geq 2}(t,t+\tau)=\tau\int\limits_t^{t+\tau}\lambda_1(u)du+o_1(\tau)-o_2(\tau).$$

З урахуванням того, що $o_1(\tau)$ та $o_2(\tau)$ – нескінченно малі одного порядку отримаємо:

$$P_{\hat{a}}(\tau)=\tau\int\limits_t^{t+\tau}\lambda_1(u)du+o(\tau). \tag{1.2}$$

Потоком звільнень називається послідовність моментів закінчення обслуговування запитів. У момент часу t параметр потоку звільнень $\nu(t)$ залежить тільки від параметра показового закону розподілу тривалості обслуговування та кількості запитів, які знаходяться на обслуговуванні в даний момент часу. Нехай в комутаційній системі, де $\upsilon = \infty$ в момент часу t зайнято i ліній (i запитів знаходиться на обслуговуванні). Імовірність звільнення j ліній за інтервал часу тривалістю τ можна розглянути як j успішних випробувань при загальній кількості i незалежних випробувань і за теоремою про повторення випробувань записати:

$$P_j(i,\tau) = C_i^j P^j (1-P)^{i-j}, \qquad (1.3)$$

де P – імовірність звільнення однієї лінії за інтервал часу τ.

При показовому законі розподілу тривалості обслуговування:

$$P = P(T < \tau) = 1 - e^{\beta\tau}. \qquad (1.4)$$

З врахуванням 1.3 в 1.4 отримаємо:

$$P_j(i,\tau) = C_i^j (1-e^{-\beta\tau})^j \mathrm{e}^{-(i-j)\beta\tau}. \qquad (1.5)$$

Імовірність того, що за інтервал часу τ не звільниться ні одна з i зайнятих ліній, $P_0(i,\tau) = e^{-i\beta\tau}$, а ймовірність того, що звільниться хоча б одна лінія, дорівнює:

$$P_{j\ge1}(\tau) = 1 - P_0(i,\tau) = 1 - e^{-i\beta\tau}. \qquad (1.6)$$

З визначення параметра потоку:

$$\nu(t) = \lim_{\tau\to0}\frac{P_{j\ge1}(\tau)}{\tau}. \qquad (1.7)$$

Запишемо ймовірність $P_{j\ge1}(\tau)$ з урахуванням розкладання функції $e^{-i\beta\tau}$ в ряд:

$$P_{j\ge1}(\tau) = 1 - e^{-i\beta\tau} = 1 - \sum_{g=0}^{\infty}(-1)^g (i\beta\tau)^g \frac{1}{g!} = i\beta\tau + o(\tau). \qquad (1.8)$$

З врахуванням 1.8 в 1.7 отримаємо $\nu(t) = \lim_{\tau\to0}\left(i\beta + \frac{o(\tau)}{\tau}\right) = i\beta$, що й необхідно було довести. Таким чином, імовірність звільнення за час $\tau \to 0$ однієї з i зайнятих ліній не залежить від характеру поступаючого потоку запитів. Імовірність $P_{зв\ i}(\tau)$ залежить тільки від стану i пучка в момент t та закону розподілу тривалості обслуговування, який є показниковим. Імовірність звільнення хоча б однієї з i зайнятих ліній за інтервал часу τ у відповідності до 1.8 дорівнює:

$$P_{j\ge1}(\tau) = i\beta\tau + o(\tau). \qquad (1.9)$$

Візьмемо за одиницю часу середню тривалість зайняття. Тоді $\beta = 1$. Потік звільнень є ординарним. На основі цього ймовірність звільнення точно однієї з i зайнятих ліній за інтервал часу $[t, t+\tau)$ при $\tau \to 0$ дорівнює: $P_{зв\ i}(\tau) = i\tau + o(\tau)$. (1.10)

Слід зазначити, що імовірності $P_в(\tau)$ та $P_{зв\ i}(\tau)$ пропорційні τ. Відповідно, ймовірності поступлення за час τ будь-яких двох і більше подій (двох і більше запитів, або двох і більше звільнень, або запиту і звільнення тощо) є величини порядку $o(\tau)$. З цього слідує, що ймовірності $P_{ij}(\tau) = (t, t+\tau)$ переходу системи за інтервал часу $[t, t+\tau)$ зі стану i в стан j при $|i-j| \ge 2$ дорівнює $P_{ij}(t, t+\tau) = o(\tau),\quad |i-j| \ge 2$.

Підставимо в систему 1.10 отримані значення ймовірностей $P_в(\tau)$ та $P_{зв}(\tau)$, перенесемо з правої частини рівняння в ліву $P_i(t)$, просумуємо всі нескінченно малі доданки $o(\tau)$ та поділимо обидві частини рівняння на τ. У результаті отримаємо:

$$\frac{P_i(t+\tau) - P_i(t)}{\tau} = \lambda_{i-1}P_{i-1}(t) - (\lambda_i + i)P_i(t) + (i+1)P_{i+1}(t) + \frac{o(\tau)}{\tau}, \quad i \ge 1,$$

перейшовши до границі $\tau \to 0$, отримаємо:

$$\frac{d}{dt}P_i(t) = \lambda_{i-1}P_{i-1}(t) - (\lambda_i + i)P_i(t) + (i+1)P_{i+1}(t), \quad i \ge 1.$$

При $i = 0$ перехід системи зі стану $i-1$ в стан i не має місця. Тому:

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + P_1(t).$$

Таким чином, для визначення ймовірностей $P_i(t),\quad i = 0,1,2...$ необхідно розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}P_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + P_1(t);\\&\frac{d}{dt}P_i(t) = \lambda_{i-1}P_{i-1}(t) - (\lambda_i + i)P_i(t) + (i+1)P_{i+1}(t), \quad i \ge 1\end{aligned}\right\} \qquad (1.11)$$

При $t \to \infty$ для ймовірностей $P_i(t)$ існують кінцеві границі (стаціонарні ймовірності) – $\lim\limits_{i\to\infty} P_i(t) = P_i$. Тоді $\frac{d}{dt}P_i(t) = 0$. Прийнявши для системи рівнянь 1.11, що $t \to \infty$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}&0 = -\lambda_0 P_0(t) + P_1(t);\\&0 = \lambda_{i-1}P_{i-1}(t) - (\lambda_i + i)P_i(t) + (i+1)P_{i+1}(t), \quad i \ge 1\end{aligned}\right\}. \qquad (1.12)$$

При $t \to \infty$ для ймовірностей $P_i(t)$ існують кінцеві границі (стаціонарні ймовірності) – $\lim\limits_{i\to\infty} P_i(t) = P_i$. Тоді $\frac{d}{dt}P_i(t) = 0$. Прийнявши для системи рівнянь 1.11, що $t \to \infty$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}&0 = -\lambda_0 P_0(t) + P_1(t);\\&0 = \lambda_{i-1}P_{i-1}(t) - (\lambda_i + i)P_i(t) + (i+1)P_{i+1}(t), \quad i \ge 1\end{aligned}\right\}. \qquad (1.12)$$

Введемо позначення: $\lambda_{i-1}P_{i-1} - iP_i = z_i$, отримаємо: $z_1 = 0; \quad z_i - z_{i+1} = 0, \quad i \ge 1$.

Звідси $z_i = 0, \quad i \ge 1$, і відповідно $P_i = \frac{\lambda_{i-1}}{i}P_{i-1}, \quad i \ge 1$. Виражаючи ймовірності P_i через P_0 отримаємо:

$$P_i = \left(\frac{\prod\limits_{k=0}^{i-1}\lambda_k}{i!}\right)P_0, \quad i \ge 1 \qquad \sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\prod\limits_{k=0}^{i-1}\lambda_k}{i!}\right). \qquad (1.13), (1.14)$$

У 1.14 прийнято позначення $\prod\limits_{k=0}^{-1}\lambda_k \equiv 1$.

Якщо ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\prod\limits_{k=0}^{i-1}\lambda_k}{i!}\right)$ розходиться, то запити надходять настільки частіше порівняно із звільненнями зайнятих ліній, що, починаючи з деякого моменту часу, обслуговування комутаційною системою вхідного потоку запитів буде неможливим і потік поступаючих запитів формуватиме чергу на обслуговування на вході КС. Для того, щоб ряд сходився, необхідно, щоб параметр потоку запитів λ_i суттєво не відрізнявся від параметра потоку звільнень ν_i. При будь-якому t, в тому числі й $t \to \infty$, якщо ряд сходиться, то $\sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i = 1$. На основі цього для загального випадку процесу народження та загибелі з кінцевим числом станів із параметрами λ_i та ν_i, $\quad i = 0,1,2,...$ стаціонарні імовірності станів виражаються наступними виразами:

$$P_0=\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=0}^{i-1}\lambda_k}{\prod_{k=1}^{i}\nu_k}\right]^{-1};\quad P_i=\frac{\prod_{k=0}^{i-1}\lambda_k}{\prod_{k=1}^{i}\nu_k}P_0,\quad i\geq 1\ . \qquad (1.15)$$

Оскільки в системі розподілу та зберігання інформації на обслуговування надходять запити нестаціонарного потоку, то параметр потоку занять $\lambda_i=\int_t^{t+\tau}\lambda(u)du,\quad i=0,1,2,...$ Параметр потоку звільнень:

$$\nu_i=\begin{cases}\beta i, & 0\leq i\leq \upsilon;\\ \beta\upsilon, & i>\upsilon.\end{cases}$$

Підставляючи λ_i та ν_i в 1.15 та враховуючи, що $y(t,t+\tau)=\dfrac{\lambda}{\beta}=\dfrac{\int_t^{t+\tau}\lambda(u)du}{\beta}$ (з метою уникнення громіздкості запису поступаюче навантаження $y(t,t+\tau)$ позначимо просто y), отримаємо:

$$P_i=\begin{cases}\dfrac{y^i}{i!}P_0, & 0\leq i\leq \upsilon;\\ \dfrac{y^\upsilon}{\upsilon!}\left(\dfrac{y}{\upsilon}\right)^{i-\upsilon}P_0, & i>\upsilon;\end{cases} \qquad (1.16)$$

$$P_0=\frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty}P_i}=\frac{1}{\sum_{i=0}^{\upsilon}\dfrac{y^i}{i!}+\dfrac{y^\upsilon}{\upsilon!}\sum_{i=\upsilon+1}^{\infty}\left(\dfrac{y}{\upsilon}\right)^{i-\upsilon}} \qquad (1.17)$$

Практичний інтерес представляє випадок з кінцевою чергою, тобто коли виконуються умови: $\lambda<\nu$ $(\lambda<\upsilon\beta)$, $i>\upsilon$. Таким чином, необхідною і достатньою умовою кінцевої черги в повнодоступному пучку з очікуванням є виконання нерівності $y<\upsilon$ – поступаюче навантаження y на повнодоступний пучок із υ ліній повинно мати значення менше ємності пучка. Враховуючи це, і використовуючи вираз для суми нескінченно спадаючої геометричної прогресії ($S=\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a_1}{1-q}$ – сума нескінченно спадаючої геометричної прогресії дорівнює першому члену цієї прогресії, поділеному на одиницю мінус знаменник цієї прогресії), вираз 1.17 набуде вигляду:

$$P_0=\frac{1}{\sum_{j=0}^{\upsilon}\dfrac{y^j}{j!}+\dfrac{y^\upsilon}{\upsilon!}\dfrac{y}{\upsilon-y}} \qquad (1.18)$$

Стаціонарні імовірності 1.16 з урахуванням 1.18 матимуть вигляд:

$$P_i=\begin{cases}\dfrac{\dfrac{y^i}{i!}}{\sum_{j=0}^{\upsilon}\dfrac{y^j}{j!}+\dfrac{y^\upsilon}{\upsilon!}\dfrac{y}{\upsilon-y}}, & 0\leq i\leq \upsilon;\\ \dfrac{\dfrac{y^\upsilon}{\upsilon}\left(\dfrac{y}{\upsilon}\right)^{i-\upsilon}}{\sum_{j=0}^{\upsilon}\dfrac{y^j}{j!}+\dfrac{y^\upsilon}{\upsilon!}\dfrac{y}{\upsilon-y}}, & i>\upsilon.\end{cases} \qquad (1.19)$$

Визначення імовірності довжини черги запитів, що знаходяться на очікуванні. Імовірність довжини черги запитів $r+1$, що знаходяться на очікуванні визначається рекурентним співвідношенням:

$$P_{\upsilon+r+1}=\omega_{r+1}=\frac{y}{\upsilon}\omega_r,\quad r=0,1,2,... \qquad (1.20)$$

З цього співвідношення (з урахуванням, що $y<\upsilon$) слідує, що $\omega_0>\omega_1>\omega_2>...>\omega_r>...$, тобто ймовірність того, що в пучку зайняті всі лінії і на очікуванні немає запитів, більше, ніж імовірність того, що на очікуванні знаходиться точно один запит, а значення останньої ймовірності більша, ніж імовірність того, що на очікуванні знаходиться точно два запити тощо.

Імовірність очікування запиту на обслуговування або втрати по часу P_t. У підсистемі розподілу та зберігання інформації, що досліджується, дисципліна обслуговування запитів якої є з очікуванням, втрати по часу P_t є інтервалом часу, протягом якого всі υ ліній пучка зайняті і на очікуванні знаходиться $r=0,1,2,...$ запитів. Виходячи з цього, втрати за часом дорівнюють імовірності $P(\gamma>0)$ того, що запит, який поступив, не буде негайно обслужений, а буде знаходитись на очікуванні протягом часу γ більшого нуля. Ця ймовірність дорівнює:

$$P_t=P(\gamma>0)=\sum_{i=\upsilon}^{\infty}P_i=\sum_{r=0}^{\infty}\omega_r \qquad (1.21)$$

Поділивши чисельник та знаменник 1.19 на $\sum_{j=0}^{\upsilon}\frac{y^j}{j!}$ та враховуючи, що $\frac{\frac{y^i}{i!}}{\sum_{j=0}^{\upsilon}\frac{y^j}{j!}} = E_{i,\upsilon}(y) = P_i$ (перша формула Ерланга при $i=\upsilon$), отримаємо:

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{E_{i,\upsilon}(y)}{1+E_\upsilon(y)\dfrac{y}{\upsilon-y}}, & 0 \le i \le \upsilon; \\ \dfrac{E_\upsilon(y)\left(\dfrac{y}{\upsilon}\right)^{i-\upsilon}}{1+E_\upsilon(y)\dfrac{y}{\upsilon-y}}, & i > \upsilon \end{cases} \quad (1.22)$$

Використовуючи співвідношення 1.22 для виразу 1.21:

$$P_t = P(\gamma > 0) = \frac{E_\upsilon(y)}{1-\dfrac{y}{\upsilon}(1-E_\upsilon(y))} = D_\upsilon(y). \quad (1.23)$$

Отриманий вираз є другою формулою Ерланга. Формула табульована. Таблиці дозволяють за будь-якими двома параметрами – y, υ, P_t – визначити третій.

Вираз 1.23 показує, що втрати за часом P_t чисельно дорівнюють умовним втратам $P(\gamma > 0)$, можуть бути визначені і з допомогою таблиць першої формули Ерланга. Використовуючи ці таблиці, P_t можна визначити з наступного співвідношення:

$$P_t = D_\upsilon(y) = \frac{1}{\dfrac{1}{E_\upsilon(y)} - \dfrac{1}{E_{\upsilon-1}(y)}(1-E_\upsilon(y))} \quad (1.24)$$

Отже, в досліджуємій системі з очікуванням при обслуговуванні досліджуємого потоку запитів повнодоступним пучком імовірність втрат за часом та ймовірність станів системи залежать тільки від інтенсивності поступаючого навантаження y та ємності пучка ліній υ.

Функція розподілу часу очікування. Втрати за часом P_t, або, що те саме, імовірність $P(\gamma > 0)$ того, що поступивший запит буде обслужений тільки після деякого часу очікування, не дозволяють в достатній мірі характеризувати якість обслуговування комутаційною системою з очікуванням поступаючого потоку запитів. Отримана характеристика $P_t = P(\gamma > 0) = D_\upsilon(y)$ визначає долю запитів, обслуговування яких відбувається після деякого часу очікування, однак не дає відповіді на досить важливе з точки зору забезпечення якості обслуговування питання – як розподіляється час очікування початку обслуговування для запитів, що потрапляють на очікування. Для цього необхідним є визначення функції розподілу тривалості очікування початку обслуговування при вихідних умовах для досліджуваної підсистеми розподілу та зберігання інформації: показниковий закон розподілу тривалості обслуговування, запити, що знаходяться на очікуванні обслуговуються в порядку черги.

Позначимо через $P(\gamma > t)$ імовірність того, що запит, який надійшов у будь-який момент часу, потрапить на очікування і час очікування буде більше t; через $P_i(\gamma > t)$ умовну ймовірність тієї ж нерівності в припущенні, що запит надійде в момент часу, коли система знаходиться в стані i, і через P_i імовірність того, що система знаходиться в цьому стані, тобто, що в системі знаходиться точно i запитів, що обслуговуються та знаходяться в черзі.

Беручи до уваги, що в КС поступивший запит потрапляє на очікування лише у випадку, коли в момент його надходження зайняті всі лінії пучка та на очікуванні знаходиться $r = 0,1,2,...$ запитів, тобто система знаходиться в одному зі станів $i=\upsilon,\ \upsilon+1,\ \upsilon+2,...$, за формулою повної ймовірності отримаємо:

$$P(\gamma > t) = \sum_{i=\upsilon}^{\infty} P_i P_i(\gamma > t) \quad (1.25)$$

Знайдемо ймовірність $P_i(\gamma > t)$. Якщо система знаходиться в стані $i (i \ge \upsilon)$, то безпосередньо перед моментом поступлення запиту в системі на очікуванні знаходиться $(i-\upsilon)$. Запит, що поступив стає в чергу $(i-\upsilon+1)$-м. Оскільки запити знімаються з черги для обслуговування в порядку поступлення ("першим поступив – першим обслуговується"), то ймовірність $P_i(\gamma > t)$ є ймовірністю того, що за час t після моменту поступлення запиту буде знято з очікування і переведено на обслуговування не більше $(i-\upsilon)$

запитів. Виходячи з цього, ймовірність $P_i(\gamma > t)$ відповідає імовірності того, що за час t відбудеться звільнення (закінчується обслуговування) не більше $(i-\upsilon)$.

Тривалість обслуговування одного запиту T (без урахування часу очікування) розподілу за показовим законом:

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\beta t}.$$

Функція розподілу інтервалів часу між моментами звільнень ліній пучка при умові зайнятості в пучку всіх υ ліній є $F_{oc} = P_i(t) = 1 - e^{-\beta \upsilon t}$. Ця функція розподілена за показовим законом розподілу, що визначає потік звільнень як найпростіший потік, параметр якого $\lambda = \beta\upsilon$. Відповідно до цього ймовірність P_i того, що за час t відбудеться звільнення точно j ліній, відповідно до формули Пуассона складає $P_j = \frac{(\beta\upsilon t)^j}{j!} e^{-\beta\upsilon t}$, а ймовірність того, що за час t відбудеться не більше $(i-\upsilon)$ звільнень, якщо система знаходиться в стані i:

$$P_t(\gamma > t) = \sum_{j=0}^{i-\upsilon} P_j = \sum_{j=0}^{i-\upsilon} \frac{(\beta\upsilon t)^j}{j!} e^{-\beta\upsilon t} \qquad (1.26)$$

Підставивши співвідношення 1.22 та 1.26 в 1.25 та здійснивши деякі перетворення, отримаємо:

$$P(\gamma > t) = P(\gamma > 0) e^{-\beta(\upsilon - y)t}, \qquad (1.27)$$

де $P(\gamma > 0)$ визначається за формулою 1.23.

Якщо за одиницю виміру часу γ і t взяти середній час зайняття, то $\beta = 1$ і:

$$P(\gamma > t) = P(\gamma > 0) e^{-(\upsilon - y)t} \qquad (1.28)$$

Вираз 1.28 дає змогу будувати універсальні сімейства кривих $P(\gamma > t) = f(t)$ і отримати універсальні таблиці для будь-яких значень середньої тривалості зайняття.

Висновки та напрями подальших досліджень. Отже, розроблена математична модель дисципліни обслуговування інформаційних потоків підсистеми розподілу та зберігання інформації в ІСППР АСУ військами. Визначені ймовірності станів повнодоступного пучка, а саме ймовірності довжини черги запитів, що знаходяться на очікуванні; імовірність очікування запиту на обслуговування та функцію розподілу часу очікування запитом початку обслуговування, що в подальшому дасть можливість розроблення математичної моделі підсистеми розподілу та зберігання інформації, та допоможе вирішити наукове завдання удосконалення АСУ військами шляхом раціонального розподілу інформаційних потоків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Абезгауз Г.Г.– Справочник по вероятностным расчетам. М.. Воениздат, 1970.- 536 с. .
2. Варламов І.Д., Гаценко С.С. Модель інформаційних потоків автоматизованих систем управління / І.Д. Варламов, С.С. Гаценко // Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони – 2014 – № 3 (21) С. 25-33.
3. Варламов І.Д., Гаценко С.С. Математична модель нестаціонарних інформаційних потоків в автоматизованій системі управління військами / І.Д. Варламов, С.С. Гаценко // Збірник наукових праць ЦНДІ ОВТ ЗСУ. – 2015 - № 4 (59). – С. 107-112.
4. Варламов І.Д. Аналіз проблем інформаційного забезпечення органів військового управління при плануванні оборонної операції за досвідом проведення Антитерористичної операції на сході України / І.Д. Варламов, С.С. Гаценко // Матеріали науково-практичного семінару Основні напрямки застосування космічних систем та геоінформаційного забезпечення в інтересах національної безпеки і оборони.– Київ: НУОУ, 2015.–С. 35-41.
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. Для вузов. — 6-е изд. Стер. — М.: Высш. Шк., 1999.— 576 с.
6. Воронин А.Н. Многокритериальные решения: модели и методы: монографія / А.Н. Воронин., Ю.К. Зиатдинов., М.В. Куклинский. – К : НАУ, 2011. – 348 с.
7. Гаценко С.С. Проблема розподілу інформаційних потоків в автоматизованих системах управління військами (силами) Збройних Сил України / С.С. Гаценко, Ю.М. Кальницький, О.М. Гельвейчук // Збірник наукових праць Центру воєнно-стратегічних досліджень НУОУ ім. Черняховського. – 2014. № 2 (51). – С. 107-112.
8. Гаценко С.С. Аналіз вимог до систем управління військами та шляхи їх удосконалення / С.С. Гаценко // Збірник наукових праць Центру воєнно-стратегічних досліджень НУОУ ім. Черняховського. – 2015. № 2 (54). – С. 85-91.
9. Дружинін С.В. Сучасний стан автоматизації управління військами в Збройних Силах України / О.К. Климович, О.Г. Саєнко // Системи озброєння і військова техніка, 2010, № 1(21).
10. Ложковський А.Г. Дослідження впливу параметрів навантаження на характеристики якості обслуговування: автореферат д.т.н. Наук: спец. 05.12.02. – Телекомунікаційні системи та мережі / А.Г. Ложковський: – Одеса, ОНАЗ _м.. О.С. Попова, 2003. – 20 с.
11. Ложковский А.Г. Методы расчета качества обслуживания в мультисервисных сетях: The 2-nd International Conference [Telecommunication, Electronics and Informatics”]. – Chishinau, 2008. – P. 117–126.

12. Лившиц Б.С. Теория телетрафика / Б.С. Лившиц, А.П. Пшеничников, А.Д. Харкевич. Учебник для вузов. 2-е перераб. и доп. М : Связь, 1979. – 224 с.
13. Маслов В.П. Інформаційні системи і технології в економіці: Посібник для студ. Вузів / В.П. Маслов. Міністерство освіти і науки України. – К : Слово, 2005. – 263 с.
14. Пермяков О.Ю., Сбітнєв А.І. Інформаційні технології і сучасна збройна боротьба / О.Ю. Пермяков, А.І. Сбітнєв, – Луганськ.: Знання, 2008. – 204 с.
15. Шнепс М.А. Системы распределения информации. Методы расчета. Справ. пособие / М.А. Шнепс. – М : Связь, 1979. – 344 с.

Стаття надійшла до редакції 15.09.2015

Гаценко С. С.

Кафедра применения космических систем и геоинформационного обеспечения Национального университета обороны Украины имени Ивана Черняховского, Киев

Математическая модель дисциплины обслуживания информационных потоков

Резюме. В статье предложена математическая модель дисциплины обслуживания информационных потоков, которая характерезует взаимодействие потоков вызовов с комутационной схемой, что есть актуальным в дальнейшем при непосредственной разработке подсистемы расспределения и хранения информации в информационной системе поддержки принятия решений автоматизированой системы управления войсками.

Ключевые слова: математическая модель; дисциплина обслуживания; информационный поток; потоки вызовов; вероятности состояния, длина очереди; ожидание; функция распределения.

S. Gacenko

Department of application of the space systems and geoinformative providing National Defence University of Ukraine named after Ivan Chernyhovskij, Kiev

Mathematical model of service discipline information flows

Resume. In the article the mathematical model of service discipline of information flows that characterizes the interaction flows queries with switching scheme that is relevant in the future development of the direct distribution subsystems and storage of information in the information system decision support automated system.

Keywords: mathematical model of service discipline; information flow; the flow of requests probability states; queue length, waiting; distribution function.