

первичной и вторичной обмоток трансформатора Тесла. Это явление объясняется конструктивными особенностями трансформатора, а именно, более «строгими» требованиями к расчету и практическому достижению резонанса во вторичной обмотке.

Экспериментальным путем установлено, что рабочая частота комплекса, состоящего из двух резонансных трансформаторов Тесла и проводника, соединяющего передатчик и приемник энергии, лежит в пределах 260-280 кГц. Допустимая ошибка установки рабочей частоты комплекса не более  $\pm 2 \dots 2,5$  кГц ( $\Delta \leq 1\%$ ).

Таким образом, внешне простой по конструкции резонансный трансформатор Тесла, используемый в качестве передающего и принимающего устройства в системе резонансной передачи электрической энергии, представляет собой сложный объект управления с множеством дополнительных резонансных частот, что значительно усложняет задачу автоматического поиска и поддержания рабочей частоты комплекса и требует реализации дополнительных процедур по обеспечению стабильности и помехозащищенности информационного канала системы управления.

#### **Выводы.**

1. Все множество резонансных частот контуров первичной и вторичной обмоток трансформатора Тесла расположены в трех частотных полосах  $\Delta f_i$  и гармонически связаны между собой.
2. Внедрение комплексов резонансной однопроводной передачи электрической энергии требует разработки методики идентификации и автоматического управления резонансными явлениями в системе.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Тесла Н. Статьи / Н.Тесла. – Самара: Издательский дом «Агни», 2008. – 584с.
2. Тесла Н. Колорадо-Спрингс. Дневники. 1899-1900 / Н.Тесла. – Самара: Издательский дом «Агни», 2008. – 460с.
3. Стребков Д.С. Резонансные методы передачи электрической энергии / Д.С.Стребков, А.И.Некрасов; под ред. академика РАСХН Д.С.Стребкова. – 2-е изд. – М.: ВИЭСХ, 2006. – 304с.
4. Иоссель Ю.Я. Расчет электрической емкости / Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. – 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1981. – 288с.
5. Немцов М.В. Справочник по расчету катушек индуктивности / М.В.Немцов, Ю.М.Шамаев. – М.: Энергоиздат, 1981. – 136с.

УДК 681.5.03

ВОЛЯНСКИЙ Р.С., к.т.н., доцент  
САДОВОЙ А.В., д.т.н., профессор

Днепродзержинский государственный технический университет

### **КОНСТРУИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ КАЧЕСТВА ДЛЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ АКТИВАЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ**

**Введение.** Существующие системы управления электромеханическими объектами обеспечивают экспоненциально протекающие переходные процессы и гарантируют требуемый запас устойчивости [1]. Такой характер движения объекта управления в замкнутой системе объясняется в первую очередь линейностью используемых управляющих воздействий. Аналогичная ситуация наблюдается в системах разрывного

управления, которые в скользящем режиме эквивалентны линейным с неограниченным коэффициентом усиления, а при срыве скользящего режима работают как разомкнутые с максимальным управляющим воздействием. За счет форсировки управляющего воздействия системы разрывного управления обладают высоким быстродействием и точностью. Однако процесс управления в таких системах сопровождается подачей на объект в каждый момент времени максимального управляющего воздействия, что не всегда является энергетически целесообразным и приводит к значительным энергетическим затратам. Поэтому, наряду с рассмотренными ранее системами в последнее время появились разработки, позволяющие форсировать протекание переходных процессов без повышения энергии управления в установившихся режимах. В первую очередь к таким разработкам следует отнести системы управления, реализующие скользящие режимы высоких порядков [2], которые возникают при использовании иррациональных активационных функций и реализуются управлениями вида

$$U = -|S|^{\alpha} \text{sign}(S), \quad (1)$$

где  $S$  – линия равновесного состояния регулятора;  $\alpha$  – показатель степени,  $\alpha \in [0,1]$ .

Выполненные ранее исследования [3] показали, что существенное влияние на быстродействие систем с управлениями (1) оказывает показатель степени  $\alpha$ , с уменьшением которого повышается не только быстродействие, но и колебательность системы. Это позволяет форсировать систему при пуске, однако негативно сказывается на установившемся режиме.

Данный факт позволил сформулировать гипотезу об изменении показателя степени  $\alpha$  в процессе движения системы управления, в соответствии с которой замкнутая система при больших рассогласованиях работает как релейная с  $\alpha = 0$ , а по мере снижения ошибки управления увеличивается показатель  $\alpha$ , что устраняет автоколебания и существенно ограничивает энергию управления. Таким образом, в установившемся режиме система может работать в соответствии с линейным алгоритмом управления, обеспечивая минимальное энергопотребление, а при возрастании отклонения управляемой величины от заданного значения автоматически снижается показатель  $\alpha$ , и за счет повышенного энергопотребления происходит форсированный переход в новую точку фазового пространства. Таким образом, за счет плавного изменения активационной функции организуется система оптимального управления с переменной структурой.

Проверке данной гипотезы в настоящее время препятствует отсутствие функционалов качества, минимизация которых осуществляется управляющим воздействием вида

$$U = -f_1(S)^{f_2(S)}. \quad (2)$$

Управление (2) является сложной функцией от  $S$ , и определение интегральных функционалов качества, которые оно минимизирует на траекториях управляемого движения, – достаточно сложная задача. Поэтому прежде чем переходить к решению этой задачи, целесообразно рассмотреть определение целей управления, достижение которых обеспечивают управляющие воздействия с показательной активационной функцией

$$U = -C^{|f_2(S)|} \text{sign}(S), \quad (3)$$

где  $C$  – отличная от 0 и  $\pm 1$  константа, которая определяет амплитуду управляющего воздействия.

**Постановка задачи.** Целью настоящей работы является определение интегрального функционала качества, минимизация которого осуществляется оптимальным управлением (3).

**Результаты работы.** Искомый функционал качества представим в виде интеграла двух слагаемых, первое из которых  $F(S)$  определяет асимптотичность траекторий движения системы управления, а второе  $G(U)$  – расход энергии управления

$$I = \int_0^{\infty} [F(S) + G(U)] dt. \quad (4)$$

Для определения слагаемых функционала (4) в соответствии с [4] запишем сопряженные функции

$$\begin{aligned} f(S) &= -g^{-1}(U) = C^{|f_2(S)|} \text{sign}(S); \\ g(U) &= -f^{-1}(S) = \log_C |U| \text{sign}(U). \end{aligned} \quad (5)$$

Расход энергии на управление  $G(U)$  может быть найден путем интегрирования последнего выражения системы (5) по управляющему воздействию

$$\begin{aligned} G(U) &= \int g(U) dU = \int \log_C |U| \text{sign}(U) dU = \frac{1}{\ln C} \int \ln |U| \text{sign}(U) dU = \\ &= \frac{1}{\ln C} |U| (\ln |U| - 1) = C_1 |U| \ln |U| - C_1 |U|, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $C_1 = \frac{1}{\ln C}$ .

Графическое представление функций  $g(U)$  и  $G(U)$  для случая  $C = 2$  приведено на рис.1.

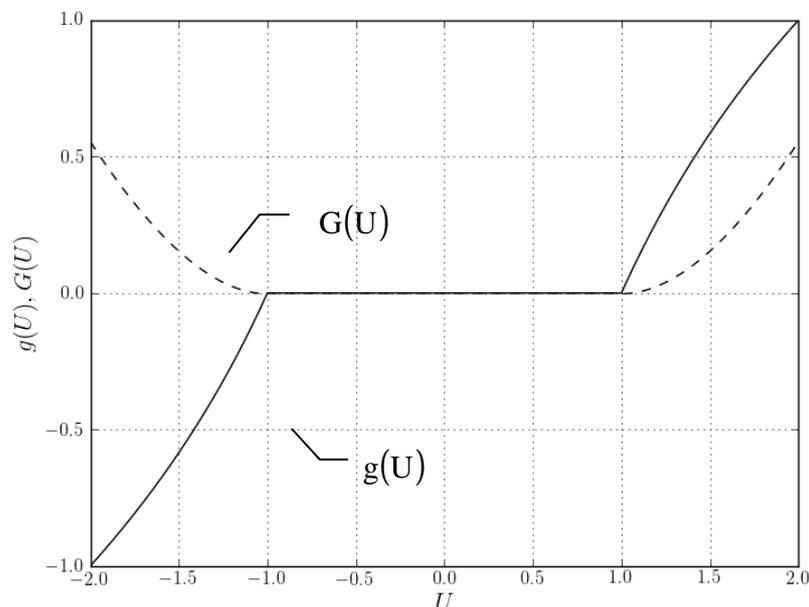


Рисунок 1 – Внешний вид функций  $g(U)$  и  $G(U)$

Анализ выражения (6) и графиков, приведенных на рис.1, показывает, что функция  $G(U)$  является знакопостоянной, имеющей экстремум, соответственно интеграл от нее

$$I_U = \int_0^{\infty} G(U) dt \quad (7)$$

имеет экстремали и может использоваться при построении оптимальных систем.

Перейдем теперь к рассмотрению составляющей  $F(S)$  функционала (4). Эта составляющая в самом общем случае определяется выражением [4]

$$F(S) = S \cdot f(S) - \int S \frac{\partial f(S)}{\partial S} dS, \quad (8)$$

которое с учетом функции (5) примет вид

$$\begin{aligned} F(S) &= S \cdot C^{|f_2(S)|} \text{sign}(S) - \int S \frac{\partial C^{|f_2(S)|}}{\partial |f_2(S)|} \frac{\partial f_2(S)}{\partial S} dS = \\ &= S \cdot C^{|f_2(S)|} \text{sign}(S) - \ln C \int S C^{|f_2(S)|} \text{sign}(S) \frac{\partial f_2(S)}{\partial S} dS. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычисление интеграла, образующего второе слагаемое выражения (9) в общем виде при неопределенной функции  $f_2(S)$  затруднено. Поэтому имеет смысл рассмотреть определение значения выражения (9) для ряда случаев при различных функциях  $f_2(S)$ .

**1. Функция**  $f_2(S) = S$ . В этом случае выражение (9) принимает вид

$$\begin{aligned} F(S) &= S \cdot C^{|S|} \text{sign}(S) - \ln C \int S C^{|S|} \text{sign}(S) \frac{\partial S}{\partial S} dS = \\ &= S \cdot C^{|S|} \text{sign}(S) - \ln C \int S C^{|S|} \text{sign}(S) dS = \\ &= |S| \cdot C^{|S|} - \ln C \int |S| C^{|S|} dS = |S| \cdot C^{|S|} - \ln C \frac{C^{|S|} (|S| \ln C - 1)}{(\ln C)^2} = \\ &= |S| \cdot C^{|S|} - \frac{\ln C |S| C^{|S|}}{\ln C} + \frac{C^{|S|}}{\ln C} = \frac{C^{|S|}}{\ln C} = C_1 C^{|S|}. \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что выражение  $C_1 C^{|S|}$  имеет экстремум при  $S = 0$ .

Подстановка значений выражений (10) и (6) в функционал (4) позволяет получить следующий функционал качества:

$$I = \int_0^{\infty} [C_1 C^{|S|} + (C_1 |U| \ln |U| - C_1 |U|)] dt = C_1 \int_0^{\infty} [C^{|S|} + (|U| \ln |U| - |U|)] dt, \quad (11)$$

который минимизируется оптимальным управлением

$$U = -C^{|S|} \text{sign}(S). \quad (12)$$

**2. Функция**  $f_2(S) = \sqrt{|S|}$ . Для этой функции первое слагаемое интегранта функционала (4) примет вид

$$\begin{aligned}
 F(S) &= S \cdot C^{\sqrt{|S|}} \text{sign}(S) - \ln C \int S C^{\sqrt{|S|}} \text{sign}(S) \frac{\partial \sqrt{|S|}}{\partial S} dS = \\
 &= S \cdot C^{\sqrt{|S|}} \text{sign}(S) - \ln C \int \frac{|S| C^{\sqrt{|S|}}}{2\sqrt{|S|}} dS = |S| \cdot C^{\sqrt{|S|}} - \frac{\ln C}{2} \int \sqrt{|S|} C^{|S|} dS = \\
 &= |S| \cdot C^{\sqrt{|S|}} - \ln C \frac{C^{\sqrt{|S|}} (|S| (\ln C)^2 - 2\sqrt{|S|} \ln C + 2)}{(\ln C)^3} = \\
 &= |S| \cdot C^{\sqrt{|S|}} - \ln C \frac{|S| \cdot C^{\sqrt{|S|}} (\ln C)^2}{(\ln C)^3} + \ln C \frac{2\sqrt{|S|} \cdot C^{\sqrt{|S|}} \ln C}{(\ln C)^3} - \ln C \frac{2C^{\sqrt{|S|}}}{(\ln C)^3} = \\
 &= \frac{2\sqrt{|S|} \cdot C^{\sqrt{|S|}}}{\ln C} - \frac{2C^{\sqrt{|S|}}}{(\ln C)^2} = 2 \frac{C^{\sqrt{|S|}}}{\ln C} \left( \sqrt{|S|} - \frac{1}{\ln C} \right) = 2C_1 C^{\sqrt{|S|}} (\sqrt{|S|} - C_1)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Подставив в функционал (4) значения выражений (13) и (6), получим следующий интегральный функционал

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\infty} \left[ 2C_1 C^{\sqrt{|S|}} (\sqrt{|S|} - C_1) + (C_1 |U| \ln |U| - C_1 |U|) \right] dt = \\
 &= C_1 \int_0^{\infty} \left[ 2C^{\sqrt{|S|}} (\sqrt{|S|} - C_1) + (|U| \ln |U| - |U|) \right] dt,
 \end{aligned} \tag{14}$$

который минимизируется оптимальным управлением

$$U = -C^{\sqrt{|S|}} \text{sign}(S). \tag{15}$$

В рассмотренных примерах интеграл, образующий второе слагаемое выражения (9), определялся через элементарные функции. Однако в ряде случаев найти значение этого интеграла в классе элементарных функций не представляется возможным.

Проиллюстрируем это следующими примерами.

**3. Функция**  $f_2(S) = \frac{1}{|S|}$ . Для гиперболической функции первое слагаемое интеграла функционала (4) примет вид

$$\begin{aligned}
 F(S) &= S \cdot C^{1/|S|} \text{sign}(S) - \ln C \int S C^{1/|S|} \text{sign}(S) \frac{\partial (1/|S|)}{\partial S} dS = \\
 &= |S| \cdot C^{1/|S|} + \ln C \int |S| \frac{C^{1/|S|}}{|S|^2} dS = |S| \cdot C^{1/|S|} + \ln C \int \frac{C^{1/|S|}}{|S|} dS.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Найти значение интеграла, образующего второе слагаемое выражения (16), в элементарных функциях невозможно, однако значение  $F(S)$  может быть определено через экспоненциальный интеграл [5]

$$Ei(a, z) = \int_1^{\infty} e^{-kz} k^{-a} dk \tag{17}$$

следующим образом:

$$F(S) = |S| \cdot C^{1/|S|} + \ln C \cdot \text{Ei} \left( 1, -\frac{\ln C}{|S|} \right) = |S| \cdot C^{1/|S|} + \frac{1}{C_1} \text{Ei} \left( 1, -\frac{1}{C_1|S|} \right). \quad (18)$$

Тогда с учетом выражений (18) и (6) искомый функционал примет вид

$$I = \int_0^{\infty} \left[ |S| \cdot C^{1/|S|} + \frac{1}{C_1} \text{Ei} \left( 1, -\frac{1}{C_1|S|} \right) + (C_1|U| \ln|U| - C_1|U|) \right] dt. \quad (19)$$

Функционал (19) минимизируется оптимальным управлением

$$U = -C^{1/|S|} \text{sign}(S). \quad (20)$$

**4. Функция**  $f_2(S) = |S|^\alpha$ . Найдем функционал качества, который минимизируется оптимальным управлением

$$U = -C|S|^\alpha \text{sign}(S), \alpha \neq 0. \quad (21)$$

Использование при вычислении второго слагаемого выражения (9) верхней неполной гамма-функции [5]

$$\Gamma(s, x) = \int_x^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad (22)$$

которая связана с интегралом (17) соотношением

$$\text{Ei}(a, z) = z^{a-1} \Gamma(1-a, z), \quad (23)$$

позволяет обобщить полученные результаты на случай произвольного показателя степени  $\alpha$  функции

$$f_2(S) = |S|^\alpha. \quad (24)$$

Тогда выражение (9) примет вид

$$\begin{aligned} F(S) &= S \cdot C|S|^\alpha \text{sign}(S) - \ln C \int S C|S|^\alpha \text{sign}(S) \frac{\partial |S|^\alpha}{\partial S} dS = \\ &= |S| \cdot C|S|^\alpha - \alpha \ln C \int |S| C|S|^\alpha |S|^{\alpha-1} dS = |S| \cdot C^{1/|S|} - \alpha \ln C \int C|S|^\alpha |S|^\alpha dS = \\ &= |S| \cdot C|S|^\alpha + \alpha \ln^{(\alpha-1)/\alpha} C \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}, -\ln C|S|^\alpha\right)}{\alpha^{\sqrt{-\alpha}}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставив выражения (25) и (6) в функционал (4), получим

$$I = \int_0^{\infty} \left[ |S| \cdot C|S|^\alpha + \alpha \ln^{(\alpha-1)/\alpha} C \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}, -\ln C|S|^\alpha\right)}{\alpha^{\sqrt{-\alpha}}} + (C_1|U| \ln|U| - C_1|U|) \right] dt. \quad (26)$$

Дальнейшее усложнение функции  $f_2(S)$ , в частности переход к аддитивным формам

$$f_2(S) = \sum_{i=1}^m w_i f_i(S), \quad (27)$$

где  $m$  – число слагаемых функции  $f_2(S)$ , приводит к необходимости использования и других неэлементарных функций.

В частности использование функции ошибок [5]

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (28)$$

позволило определить функционал, который минимизируется управлением

$$U = -C^{w_1 \sqrt{|S|} + w_2 |S|} \operatorname{sign}(S), \quad (29)$$

однако вследствие громоздкости полученного интеграла он здесь не приводится.

**Выводы.** Приведенные математические выкладки позволяют сделать вывод о том, что функционалы качества, которые минимизируются оптимальными управлениями с показательной активационной функцией, состоят из двух слагаемых, определяющих динамику объекта управления и энергию управления, необходимую для осуществления движения объекта по заданным траекториям возмущенного движения.

Необходимо отметить, что составляющая  $G(U)$ , которая учитывает расход энергии управления, однозначно зависит от управляющего воздействия и при  $|U| \leq 1$  имеет экстремум, наличие которого позволяет математически обосновать возможность снижения затрат энергии управления в оптимальных системах, реализующих управляющие воздействия (3).

Составляющая  $F(S)$  функционала качества, определяющая траекторию возмущенного движения объекта управления, в простейших случаях может быть выражена через элементарные функции, причем в этом случае по ее виду может быть определен класс оптимального управления. В более сложных случаях эта составляющая не может быть определена среди элементарных функций и выражается через ряд неэлементарных функций. Использование некоторых из них позволяет значительно расширить класс минимизируемых функционалов, а значит, и увеличить область используемых управляющих воздействий.

Сложность приведенного математического аппарата создает предпосылки к использованию в инженерных расчетах численных методов для определения составляющих функционала (4) и алгоритмов оптимального управления (3).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Садовой А.В. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами / Садовой А.В., Сухинин Б.В., Сохина Ю.В. – К.: ИСИМО, 1996. – 298с.
2. Емельянов С.В. Новые типы обратной связи: управление при неопределенности / С.В.Емельянов, С.К.Коровин. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 352с.
3. Волянский Р.С. Синтез оптимальной системы управления с иррациональной активационной функцией / Р.С.Волянский, А.В.Садовой // Вестник НТУ «ХПИ» «Проблемы автоматизированного электропривода» (Теория и практика). – 2010. – Вып.28. – С.49-51.
4. Волянский Р.С. Решение обратной задачи аналитического конструирования регуляторов для электромеханической системы с обобщенной активационной функцией / Р.С.Волянский, К.А Калужный // Достижение молодых ученых в развитии инновационных процессов в экономике, науке и образовании: сборник докладов научной конференции, ч.1. – Брянск: изд-во БГТУ. – 2011. – С.139-140.
5. Ямке Е. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Е.Ямке, Ф.Эмде, Ф.Леш. – М.:Наука, 1964. – 344с.