РОЗДІЛ «ТЕПЛОТЕХНІКА. ТЕПЛОЕНЕРГЕТИКА»

УДК 539.377

ЧЕРНЫЙ О.А., к.т.н., ст. преподаватель
НАГОРНАЯ С.Ю., ассистент

Днепродзержинский государственный технический университет

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОМЕХАНИКИ СКОРОСТНОГО НАГРЕВА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗАГОТОВКИ

Введение. Проблемы прикладной механики в настоящее время приобретают все большую актуальность как для передовых отраслей техники (реактивной, газо-, турборакето- и реакторостроения), так и для традиционных энергоемких производств, прежде всего металлургии и машиностроения. Возрастающая в последнее время необходимость оптимального разрешения противоречий во взаимосвязи энергозатрат, времени термообработки, качества и термопрочности объекта объяснима следующим.

Технические условия зачастую требуют интенсификации тепловых технологических или эксплуатационных режимов. Однако чрезмерное повышение рабочих температур и сокращение продолжительности нагрева может явиться причиной трещинообразований, обусловленных недопустимо большими температурными напряжениями.

Состояние вопроса. Теория оптимального управления (ТОУ) в настоящее время связана с рассмотрением систем с распределенными параметрами. Здесь математическая модель (ММ) содержит дифференциальные уравнения в частных производных, которые более адекватны различным реальным физическим процессам.

В ряде работ по ТОУ тепловыми процессами (например, [1]) дана классификация задач и методов. Это направление науки включает и задачи оптимизации управления тепловыми процессами по быстродействию (ЗОУТПБ). В металлургической и машиностроительной теплотехнике на подобных задачах строится теория экономического нагрева металла [2].

Сложность решения ЗОУТП требует привлечения математического аппарата, выходящего за рамки инженерной практики. Однако необходимость получения решений таких задач диктуется потребностями современной техники. Кроме того, большинство исследований в области управления системами с распределенными параметрами предусматривает конечной целью многоступенчатое релейное управление.

Этому методу присущи известные недостатки. Среди них: быстрое сближение моментов переключения, что мало приемлемо к массивным объектам, имеющим значительную тепловую инерцию; релейное управление предусматривает постоянство ограничивающих параметров, которые в действительности, как правило, нестационарны.

Во Львовской термомеханической школе зародился [3-6] оригинальный подход к решению проблемы – метод последовательных предельных режимов (МППР). Он предусматривает организацию скоростного нагрева по скользящему режиму, означающему последовательное ведение процесса на пределах возможностей нагревателя и прочностных возможностей тела. Такая постановка ЗОУТПБ позволила получить качественно новое (двухступенчатое) управление вместо многоступенчатого (релейного).

Постановка задачи. В работах [3, 4] рассматривались линейные ЗОУТПБ для тел базовой формы (ТБФ: пластина, цилиндр, шар). Теплофизические характеристики материала принимались неизменными, а допускаемое напряжение $[\sigma]$ аппроксимировалось линейной функцией температуры.

Между тем явления ползучести и релаксации при заметном повышении температуры приводят к резкому снижению допускаемых напряжений, что делает линейную температурную зависимость $[\sigma]$ мало приемлемой. Термическая чувствительность материала также заметно влияет на протекание процесса.

Учитывая все это, предположим, что управление скоростным нагревом свободного длинного цилиндра осуществляется в условиях осесимметричного конвективного теплообмена (обозначения переменных в формулах – согласно [4-6, 9]):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\bar{\lambda}(\theta)\rho\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right]=\bar{C}(\theta);\ \ \theta(\rho,0)=\theta_0=0; \tag{1}$$

$$\bar{\lambda}(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1}=Bi[\theta_C(\tau)-\theta_\Pi(t)];\ \ \frac{\partial\theta}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=0}=0. \tag{2}$$

Требуется установить такую функцию управления (температуру нагревателя) $\theta_C(\tau)$, удовлетворяющую условию

$$\theta_C(\tau)\le 1, \tag{3}$$

которая при ограничениях на температурные напряжения (условия термопрочности – УТП)

$$\max|\bar{\sigma}(\rho,\tau)|\le[\bar{\sigma}(\theta)] \tag{4}$$

за кратчайший отрезок времени τ_* переведет цилиндр из начального температурного состояния $\theta_0=0$ в конечное $\theta(\rho,\tau_*)=\theta_*(\rho)$ с максимальной температурой (цель прогрева)

$$\max\theta_*(\rho)=\theta_\Pi^*\le 1. \tag{5}$$

Здесь введены безразмерные величины:

$$\left.\begin{aligned}&\theta(\rho,\tau)=\frac{[T(\rho,\tau)-T_0]}{\Delta\bar{T}_C};\theta_C(\tau)=\frac{[T_C(\tau)-T_0]}{\Delta\bar{T}_C};\\&\Delta\bar{T}_C=T_C^{\max}-T_0;\rho=\frac{r}{R};\tau=\frac{at}{R^2};\\&Bi=\frac{\alpha_k R}{\lambda_0};\bar{\sigma}=\frac{\sigma}{K_\sigma};K_\sigma=\frac{\alpha_T E\Delta\bar{T}_C}{1-\nu}\end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Как показали исследования [7], из теплофизических (λ,c,γ) и механических (α_T,E,ν) характеристик материала наиболее существенное влияние оказывает переменность коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$.

Учитывая это, а также УТП (4), примем

$$\lambda(T)=\lambda_0+\delta_\lambda(T-T_0)=\lambda_0\cdot\bar{\lambda}(\theta);\ \bar{\lambda}(\theta)=1+\varepsilon_\lambda\theta;\ \varepsilon_\lambda=\frac{\delta_\lambda\Delta\bar{T}_C}{\lambda_0}; \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}
&[\sigma(T)] = [\sigma]_0 - \delta_1(T - T_0) - \delta_2(T - T_0)^2;\\
&[\overline{\sigma}(\theta)] = [\overline{\sigma}]_0 - \varepsilon_1\theta - \varepsilon_2\theta^2;\\
&\varepsilon_1 = \frac{\delta_1 \Delta\overline{T}_C}{K_\sigma}; \varepsilon_2 = \frac{\delta_2 \Delta\overline{T}_C{}^2}{K_\sigma}
\end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Трехосное термонапряженное состояние осесимметрично нагреваемого цилиндра определяется известным решением соответствующей задачи термоупругости [8]:

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\sigma}_r = \int_0^1 \theta\rho d\rho - \frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho \theta\rho d\rho;\\
&\overline{\sigma}_\varphi = \int_0^1 \theta\rho d\rho + \frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho \theta\rho d\rho - \theta(\rho,\tau);\\
&\overline{\sigma}_z = 2\int_0^1 \theta\rho d\rho - \theta(\rho,\tau)
\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Заметим, что, во-первых, сжимающие напряжения, действующие на поверхности ($\rho = 1$), по модулю больше растягивающих напряжений в центре ($\rho = 0$); во-вторых, для более нагретой поверхности допускаемые напряжения меньше, чем для менее нагретой центральной зоны. Поэтому ограничимся обеспечением выполнения условия термопрочности на сжатие, принимая при этом третью теорию прочности:

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma], \tag{10}$$

где при $\rho = 1$

$$\overline{\sigma}_1 = \overline{\sigma}_r = 0;\ \overline{\sigma}_2 = \overline{\sigma}_3 = -\left[\theta_\Pi(\tau) - 2\int_0^1 \theta\rho d\rho\right]. \tag{11}$$

Подставляя (8) и (11) в (10), получаем следующее УТП:

$$(1 + \varepsilon_1)\theta_\Pi(\tau) + \varepsilon_2\theta_\Pi^2(\tau) - 2\int_0^1 \theta(\rho,\tau)\rho d\rho \le [\overline{\sigma}]_0. \tag{12}$$

Результаты работы. При решении поставленной задачи в качестве метода-реализатора процесса решения использовался МЭИ Ю.С.Постольника (метод эквивалентных источников [5]) в рамках известной [9] модели термического слоя (МТС), расчленяющей процесс теплопроводности на два этапа: инерционный ($0 \le \tau \le \tau_0$; $\beta(\tau) \le \rho \le 1$; $\beta(\tau)$ – непрогретая зона; $l(\tau) = 1 - \beta(\tau)$ – прогретый (термический) слой) и упорядоченный ($\tau_0 \le \tau \le \tau_*; 0 \le \rho \le 1$).

Приведем результаты, касающиеся этих вопросов. Так как основной целью исследования является установление безопасного скоростного режима управления процессом, то

1-ая ступень ($0 \le \tau \le \tau_1$, $\max|\overline{\sigma}| \le [\overline{\sigma}(\theta)]$).

Процесс нагрева ведем в предельном режиме (3) $\theta_{C1}(\tau) = 1$ до момента τ_1, когда на поверхности $\rho = 1$ достигнуты величины допускаемых. Это, как правило, происхо-

дит в инерционный период ($\tau_1 \le \tau_0$). На этом быстротечном этапе изменением $\lambda(\theta)$ пренебрегаем ($\varepsilon_\lambda = 0$).

Глубина прогрева $l(\tau_1) = l_1$ определяется алгебраическим уравнением

$$l_1^4 + \frac{2(1-2Bi)}{Bi} l_1^3 - \frac{2}{Bi}\left[4 - 3\left(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2-[\bar{\sigma}]_0\right)Bi\right] l_1^2 + \frac{12}{Bi}\left(1+\varepsilon_1-2[\bar{\sigma}]_0\right) l_1 = \frac{24[\bar{\sigma}]_0}{Bi^2}. \quad (13)$$

Время τ_1 переключения на вторую ступень вычисляем по формуле [7]

$$\tau_1 = \left[l_1^2 + 4l_1/Bi - \left(8/Bi^2\right)\ln\left(1+Bil_1/2\right)\right]/24. \quad (14)$$

2-ая ступень ($\tau_1 \le \tau \le \tau_2$).

Процесс ведем (согласно МППР) в режиме предельно допустимого термонапряженного состояния (ТНС) (равенства (12)). Опуская здесь рассмотрение окончания инерционного этапа ($\tau_1 \le \tau \le \tau_0$), приведем формулы для определения управляющей функции на основной части второй ступени и времени τ_2 ее завершения

$$\theta_{C2}(\tau) = \theta_{2\Pi}(\tau) - \frac{3[1-\varepsilon_\lambda\theta_{2\Pi}(\tau)]}{\varepsilon_\lambda Bi}\left\{1-\sqrt{1+8\varepsilon_\lambda\frac{[\bar{\sigma}]_0-\varepsilon_1\theta_{2\Pi}(\tau)-\varepsilon_2\theta_{2\Pi}^2(\tau)}{3[1-\varepsilon_\lambda\theta_{2\Pi}(\tau)]^2}}\right\}, \quad (15)$$

где

$$\theta_{2\Pi}(\tau) = D_\varepsilon\left\{1-\left(1-\frac{\theta_{2\Pi}^0}{D_\varepsilon}\right)\exp\left[-\frac{24\varepsilon_1}{3+4\varepsilon_1}(\tau-\tau_0)\right]\right\}; \quad (16)$$

$$D_\varepsilon = \frac{(3+4\varepsilon_1)[\bar{\sigma}]_0}{[3+4(\varepsilon_1-\varepsilon_\lambda)]\varepsilon_1}; \ \tau_0 = \left[1+\frac{4}{Bi}-\frac{8}{Bi^2}\ln\left(1+\frac{Bi}{2}\right)\right]/24.$$

$$\theta_{2\Pi}^0 = f_{21}(\tau_0)/2 - \varepsilon_\lambda f_{21}^2(\tau_0)/8;$$

$$f_{21}(\tau_0) = \frac{(1+2\varepsilon_1)-\sqrt{8[\bar{\sigma}]_0[(2/3+\varepsilon_1)\varepsilon_\lambda-2\varepsilon_2]}}{(2/3+\varepsilon_1)\varepsilon_\lambda-2\varepsilon_2}. \quad (17)$$

Заканчивается вторая ступень в момент $\tau = \tau_2$, который определяется условием $\theta_{C2}(\tau_2) = 1$. Например, при $\varepsilon_2 = 0$

$$\tau_2 = \tau_0 + \frac{3+4\varepsilon_1}{24\varepsilon_1}\ln\frac{[\bar{\sigma}]_0-\varepsilon_1\theta_{2\Pi}^0}{[\bar{\sigma}]_0-\varepsilon_1\bar{\theta}_{2\Pi}}, \quad (18)$$

где $\bar{\theta}_{2\Pi} = \theta_{2\Pi}(\tau_2)$ определяем из условия $\theta_{C2}(\tau_2) = 1$ (15).

3-я ступень ($\tau_2 \le \tau \le \tau_3$; $\theta_{\Pi 3}(\tau) \le \theta^*$).

Если температура поверхности не достигла требуемого значения θ_Π^* (5), то назначается третья ступень, которая ведется снова на предельном режиме нагревателя $\theta_{C3} = 1$.

Согласно решению МЭИ соответствующей краевой задачи теплопроводности (1), (2) ($\theta_C = 1$) температура поверхности определяется трансцендентным уравнением

$$\ln\frac{1-\theta_{3\Pi}(\tau)}{1-\theta_{3\Pi}^0} + \frac{3\varepsilon_\lambda\left[\theta_{3\Pi}(\tau)-\theta_{3\Pi}^0\right]}{3(1+\varepsilon_\lambda)+Bi}, \tag{19}$$

где $\theta_{3\Pi}^0 = \theta_{2\Pi}(\tau_2) = \overline{\theta}_{2\Pi}$.

Полагая в (19) $\theta_{3\Pi}(\tau_*) = \theta_\Pi^{*\prime}$, находим время $\tau_3 = \tau_*$ окончания скоростного нагрева

$$\tau_* = \tau_2 - \frac{\varepsilon_\lambda\left(\theta_\Pi^* - \theta_{3\Pi}^0\right)}{2Bi} + \frac{3(1+\varepsilon_\lambda)+Bi}{6Bi}\ln\frac{1-\theta_{3\Pi}^0}{1-\theta_\Pi^*}. \tag{20}$$

Выводы. Рассмотренная здесь частная ЗОУТПБ и является наглядным примером обратной задачи прикладной термомеханики по установлению режима температурного нагружения, обеспечивающего скоростной нагрев с соблюдением условий термопрочности.

Полученные зависимости легко поддаются компьютеризации, что способствует их практическому применению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Ю.Н. Управление нагревом металла / Ю.Н.Андреев, А.Г.Бутковский, С.А.Малый. – М.: Металлургия, 1981. – 439 с.
2. Малый С.А. Экономический нагрев металла / Малый С.А. – М.: Металлургия, 1961. – 180 с.
3. Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами / Вигак В.М. – К: Наук. думка, 1979. – 359 с.
4. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями / Вигак В.М. – К: Наук. думка, 1988. – 312 с.
5. Постольник Ю.С. Возможности МЭИ в решении ЗОУТПБ / Ю.С.Постольник // Обратные задачи и идентификация процессов теплообмена: всесоюзн. семинар: тезисы докл. – М., 1987. – С.204-205.
6. Постольник Ю.С. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии / Тимошпольский В.И., Постольник Ю.С., Андрианов Д.Н. – Мн.: Бел. навука, 2005. – 560 с.
7. Постольник Ю.С. Приближенные методы исследований в термомеханике / Постольник Ю.С. – К. - Донецк: Вищ. школа, Головн. изд-во, 1984 – 158 с.
8. Постольник Ю.С. Нелінійна прикладна термомеханіка / Ю.С.Постольник, А.П.Огурцов. – К.: НМЦ ВО МОНУ, 2000 – 280 с.
9. Лыков А.В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности / Лыков А.В. // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1971. – № 5. – С.109-150.

Поступила в редколлегию 03.11.2011.