РОЗДІЛ «ЕЛЕКТРОМЕХАНІКА. ЕЛЕКТРОТЕХНІКА»

УДК 681.5.03

ВОЛЯНСКИЙ Р.С., к.т.н., доцент
САДОВОЙ А.В., д.т.н., профессор

Днепродзержинский государственный технический университет

АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ИРРАЦИОНАЛЬНОЙ АКТИВАЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ

Введение. К настоящему времени для анализа свойств и характеристик динамических систем разработано большое количество алгебраических, частотных, графоаналитических и численных методов [1]. Некоторые из этих методов являются весьма общими и находят применение при исследовании как линейных, так и нелинейных систем [2], а часть этих методов применима только к системам, которые описываются линейными или линеаризованными уравнениями [3]. Отличительной особенностью методов исследования линейных систем является простота их использования и отсутствие необходимости применения сложного математического аппарата, включающего в себя дифференциальное и интегральное исчисления и интегральные преобразования.

Особое место в ряду методов исследования линейных систем занимают методы, базирующиеся на анализе корней характеристического уравнения и их распределения [3]. При помощи корневых методов можно делать вывод не только об устойчивости линейных динамических систем, но и анализировать их быстродействие и колебательность без решения уравнений, описывающих поведение замкнутой электромеханической системы.

В самом общем случае использование корневых методов для анализа нелинейных систем затруднено невозможностью записать характеристическое уравнение для произвольной нелинейной системы вследствие наличия в ее математическом описании нелинейных зависимостей $f(.)$. Однако, в ряде случаев эти нелинейные зависимости могут быть заменены линейными с переменными коэффициентами $g(.)$, которые зависят от переменных состояния регулируемого объекта

$$f(S) = g(S)S, \tag{1}$$

или

$$g(S) = \frac{f(S)}{S}, \tag{2}$$

где S – обобщенная координата электромеханической системы, зависящая от переменных состояния объекта управления, $f(S)$ – нечетная нелинейная зависимость.

Выражения (1) и (2) создают предпосылки для использования методов анализа линейных систем при исследовании нелинейных.

Постановка задачи. Целью настоящей работы является исследование зависимости корней характеристического уравнения от параметров и координат замкнутой электромеханической системы с иррациональной активационной функцией.

Результаты работы. *Материалы исследования.* В качестве объекта управления (ОУ) рассмотрим электропривод постоянного тока, питающийся от широтно-импульсного преобразователя. Уравнения динамики ОУ имеют вид

$$p\omega = \frac{c}{J}I; \quad pI = -\frac{1}{T_a}I - \frac{c}{R_a T_a}\omega + \frac{k}{R_a T_a}U_y, \tag{3}$$

где c – конструктивный коэффициент, J – момент инерции привода, R_a, T_a – сопротивление и постоянная времени якорной цепи электропривода соответственно, k – коэффициент усиления управляемого преобразователя, U_y – напряжение управления.

Приняв в качестве базовых переменных скорость идеального холостого хода ω_0, ток короткого замыкания I_k и максимальное напряжение управления $U_{y\max}$, представим уравнения (3) в относительных единицах

$$py_1 = a_{12}y_2; \quad py_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + m_2U, \tag{4}$$

где

$$a_{12} = \frac{1}{T_m} = \frac{cI_k}{J\omega_0}, a_{21} = a_{22} = -\frac{1}{T_a}, m_2 = -a_{22}. \tag{5}$$

Замена в уравнениях (4) переменных состояния y_i и U на их отклонения от желаемых значений y_i^* и U^* позволяет записать уравнения возмущенного движения

$$p\eta_1 = a_{12}\eta_2; \quad p\eta_2 = a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + m_2u, \tag{6}$$

$$\eta_i = y_i - y_i^*, u = U - U^*. \tag{7}$$

Для динамического объекта (6) оптимальное управление

$$u = f(S) = -k|S|^{\alpha}\operatorname{sign}(S) \tag{8}$$

будем искать из условия минимизации интегрального функционала качества

$$I = \int_0^{\infty}\left(|S|^{1+\alpha} + C|u|^{1+1/\alpha}\right)dt. \tag{9}$$

В управляющем воздействии (8) и функционале (9) линия равновесного состояния регулятора определяется выражением

$$S = \eta_1 + v_{12}\eta_2, \tag{10}$$

где весовой коэффициент v_{12} связан с коэффициентами функции Ляпунова

$$V = \sum_{i,j=1}^{2} V_{ij}\eta_i\eta_j, \; V_{ij} = V_{ji} \tag{11}$$

зависимостью

$$v_{12} = V_{22}/V_{12}. \tag{12}$$

Коэффициенты функции Ляпунова V_{in} определяются через параметры объекта управления [4]

$$V_{12} = -a_{22}; V_{22} = a_{12}. \tag{13}$$

Система уравнений (6) совместно с управляющим воздействием (8), уравнением (10) и коэффициентами (12) и (13) позволяет записать уравнения, описывающие динамику замкнутой электромеханической системы с иррациональной активационной функцией

$$p\eta_1 = a_{12}\eta_2; p\eta_2 = a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 - m_2k\left|\eta_1 - \frac{a_{12}}{a_{22}}\eta_2\right|^{\alpha}\operatorname{sign}\left(\eta_1 - \frac{a_{12}}{a_{22}}\eta_2\right). \tag{14}$$

Использование переменного коэффициента (2) позволяет представить систему (14) следующим образом:

$$p\eta_1 = a_{12}\eta_2; \quad p\eta_2 = [a_{21} - m_2 k g(S)]\eta_1 + \left[a_{22} + \frac{m_2 a_{12}}{a_{22}} k g(S)\right]\eta_2, \tag{15}$$

где

$$g(S) = \frac{|S|^{\alpha}}{S}\,\mathrm{sign}(S) = |S|^{\alpha-1}. \tag{16}$$

С учетом обозначения (10) коэффициент (16) будет

$$g(S) = |S|^{\alpha-1} = \left|\eta_1 - \frac{a_{12}}{a_{22}}\eta_2\right|^{\alpha-1}. \tag{17}$$

С учетом обозначений

$$b_{12} = a_{12}; b_{21} = a_{21} - m_2 k g(S); b_{22} = a_{22} + \frac{m_2 a_{12}}{a_{22}} k g(S) \tag{18}$$

система (14) примет вид

$$p\eta_1 = b_{12}\eta_2; \quad p\eta_2 = b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2. \tag{19}$$

Выполненные преобразования позволили представить динамику исходной замкнутой нелинейной системы (14) в виде уравнений (19), которые аналогичны уравнениям, описывающим свободное движение линейной системы.

Для системы (19) составим характеристический определитель

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 0-p & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}-p \end{vmatrix}, \tag{20}$$

раскрывая который получим характеристический полином

$$\Delta(p) = p^2 - b_{22}p - b_{12}b_{21}. \tag{21}$$

Корни полинома (21) определяются следующими зависимостями

$$p_{1,2} = \frac{b_{22} \pm \sqrt{b_{22}^2 + 4b_{21}b_{12}}}{2}, \tag{22}$$

которые с учетом обозначений (18) примут вид

$$p_{1,2} = \frac{a_{22}}{2} + \frac{m_2 g(S) a_{12} k}{2a_{22}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(a_{22} + m_2 g(S) k \frac{a_{12}}{a_{22}}\right)^2 + 4\left(a_{21} - m_2 g(S) k\right) a_{12}}. \tag{23}$$

Принимая во внимание, что коэффициент a_{22} является отрицательным, первые два слагаемые выражения (23) тоже являются отрицательными. Сравнение суммы первых двух слагаемых с подкоренным выражением показывает, что корни (23) будут отрицательными вещественными при выполнении неравенства

$$\left(a_{22} + m_2 g(S) k \frac{a_{12}}{a_{22}}\right)^2 + 4\left(a_{21} - m_2 g(S) k\right) a_{12} \geq 0. \tag{24}$$

Выражение (23) и неравенство (24) показывает, что корни характеристического уравнения системы управления с иррациональной активационной функцией при разных значениях коэффициента $g(S)$ могут принимать различные значения как в вещественной, так и комплексной областях.

Неравенство (24) позволяет при известных параметрах ОУ и регулятора путем решения уравнения

$$m_2^2 a_{12}^2 g(S)^2 k^2/a_{22}^2 + (2m_2 a_{12}k - 4mka_{12})g + a_{22}^2 + 4a_{12}a_{21} = 0\,, \qquad (25)$$

которое получено из неравенства (24), определить значение коэффициента усиления $g(S)_b$, превращающего комплексно-сопряженные корни в вещественные:

$$g\,(S)_b = \frac{a_{22}\left(a_{22} \pm 2\sqrt{-a_{12}a_{21}}\right)}{m_2 a_{12} k}. \qquad (26)$$

Таким образом, при пуске системы корни ее характеристического уравнения будут комплексно-сопряженными, если эквивалентный коэффициент усиления регулятора

$$K_e = k \cdot g(S) \qquad (27)$$

меньше следующего значения

$$K_{eb} = \frac{a_{22}\left(a_{22} \pm 2\sqrt{-a_{12}a_{21}}\right)}{m_2 a_{12}}. \qquad (28)$$

В этом случае демпфирующие свойства замкнутой электромеханической системы снижаются, и происходит ее форсировка. При достижении коэффициентом $g(S)$ значения $g(S)_b$ корни становятся вещественными, и дальнейшее движение происходит по асимптотически устойчивым траекториям.

С учетом коэффициентов (5) выражение (26) примет вид

$$g(S)_b = \frac{T_m}{T_a k} \mp \frac{2}{k}\sqrt{\frac{T_m}{T_a}}\,. \qquad (29)$$

Выражение (29) имеет физический смысл только при положительном втором слагаемом, поэтому будем рассматривать значения $g(S)_b$, вычисленные в соответствии с выражением

$$g(S)_b = \frac{T_m}{T_a k} + \frac{2}{k}\sqrt{\frac{T_m}{T_a}}\,. \qquad (30)$$

Координата изображающей точки на линии равновесного состояния регулятора, при которой происходит переход от комплексно-сопряженных корней системы к вещественным, может быть найдена путем подстановки в выражение (30) зависимости (16) и решения получившегося уравнения относительно $|S|$:

$$|S|_b = \left(\frac{T_m}{T_a k} + \frac{2}{k}\sqrt{\frac{T_m}{T_a}}\right)^{1/\alpha - 1},\ \alpha \in (0{,}1). \qquad (31)$$

Как следует из полученного выражения, искомая координата изображающей точки определяется параметрами объекта управления и регулятора и не зависит от внешних воздействий.

В случае, когда движение изначально должно осуществляться по асимптотическим траекториям, на основании известного начального значения коэффициента $g(S)_0$ по зависимостям, аналогичным (26), можно определить минимально допустимое значение коэффициента усиления регулятора k_b:

$$k_b = \frac{a_{22}\left(a_{22} \pm 2\sqrt{-a_{12}a_{21}}\right)}{m_2 a_{12} g\left(S\right)_0}. \quad (32)$$

Физически реализуемыми являются значения коэффициента усиления k_b, вычисленные в соответствии с зависимостью

$$k_b = \frac{a_{22}\left(a_{22} - 2\sqrt{-a_{12}a_{21}}\right)}{m_2 a_{12} g\left(S\right)_0}. \quad (33)$$

Определим коэффициент k_b через параметры объекта управления. Для этого подставим в выражение (33) коэффициенты (5) и получим выражение

$$k_b = \frac{T_m}{T_a g(S)_0} + \frac{2}{g(S)_0}\sqrt{\frac{T_m}{T_a}}. \quad (34)$$

Подставив в выражение (34) значение коэффициента $g(S)_0$, определенное в соответствии с выражением (16), получим следующую зависимость:

$$k_b = \frac{T_m}{T_a}\left|S_0\right|^{1-\alpha} + 2\sqrt{\frac{T_m}{T_a}\left|S_0\right|^{1-\alpha}}, \quad (35)$$

где S_0 – положение изображающей точки в начальный момент времени.

Выводы. Приведенные выше выкладки позволяют сделать ряд выводов и заключений:

1. Использование переменного коэффициента $g(S)$, который является функцией координаты изображающей точки на линии равновесного состояния регулятора, позволяет описать динамику замкнутой электромеханической системы с иррациональной активационной функцией в виде дифференциальных уравнений свободного движения системы. Полученная система дифференциальных уравнений имеет вид, аналогичный системе линейных дифференциальных уравнений, и может исследоваться известными методами линейной теории динамических систем.

2. Корни характеристического уравнения замкнутой электромеханической системы с иррациональной активационной функцией (ЗЭМС ИАФ) зависят не только от параметров, но и от координат возмущенного движения этой системы. Указанное свойство ЗЭМС ИАФ создает предпосылки для формирования такой активационной функции, которая при движении системы будет обеспечивать желаемое распределение ее корней и тем самым формировать требуемый переходной процесс.

3. При значениях коэффициента усиления регулятора меньше определенного в соответствии с зависимостью (35) и при больших отклонениях регулируемой переменной корни характеристического уравнения ЗЭМС ИАФ могут быть комплексно-сопряженными. В этом случае снижается запас устойчивости системы при одновременном повышении ее быстродействия. Это заключение позволяет сформулировать следующую рекомендацию: пуск произвольной динамической системы с иррациональной активационной функцией следует осуществлять таким образом, чтобы при больших отклонениях ее корни были комплексно-сопряженными, а при приближении к заданному значению регулируемой координаты становились отрицательными вещественными.

4. Эквивалентный коэффициент усиления регулятора, при котором происходит переход от комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения ЗЭМС ИАФ к вещественным, не зависит от координат возмущенного движения системы и определяется ее параметрами. Это заключение позволяет утверждать о том, что смена ти-

па корней будет происходить при любых начальных отклонениях в системе, давая тем самым возможность прогнозировать ее движение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 5 т. / под ред. К.А.Пупкова, Н.Д.Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. – Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления. – 2004. – 656с.
2. Андриевский Б.Р. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б.Р.Андриевский, А.Л.Фрадков. – СПб.: Наука, 2000. – 475с.
3. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы / И.В.Мирошник. – СПб.: Питер, 2005. – 336с.
4. А.В.Садовой. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами / Садовой А.В., Сухинин Б.В., Сохина Ю.В. – К.:ИСИМО, 1996. – 298с.

Поступила в редколлегию 13.06.2012.

УДК 62-83

ДЕРЕЦ А.Л., к.т.н., доцент
САДОВОЙ А.В., д.т.н., профессор

Днепродзержинский государственный технический университет

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СКОЛЬЗЯЩЕГО РЕЖИМА ОПТИМАЛЬНОЙ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМЫ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Введение. Синтез N-контурных релейных систем управления методом N-i переключений обеспечивает реализацию ими расчётной оптимальной по быстродействию переходной траектории. Сходимость такой траектории не является достаточным условием существования скользящих режимов регуляторов, что делает актуальной задачу проверки устойчивости релейных систем, оптимизированных по быстродействию данным методом. Его математический аппарат устанавливает однозначную аналитическую взаимосвязь настроек релейной системы пятого порядка с параметрами расчётной траектории оптимального по быстродействию переходного процесса. Это позволяет выполнить в общем виде исследование устойчивости синтезируемых методом N-i переключений систем для случая N = 5, избегая численного решения их характеристических уравнений.

Постановка задачи. Дифференциальные уравнения динамики позиционной двухмассовой электромеханической системы (ЭМС) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &p\Phi = \Omega; \\ &p\Omega = \frac{M_у - M_c}{J}; \\ &pM_у = C_ж\left(k_p\omega_{дв} - \Omega\right); \\ &p\omega_{дв} = \frac{M_{дв} - M_у k_p}{J_{дв}}; \\ &pM_{дв} = c\cdot\frac{u - R\cdot M_{дв}/c - c\cdot\omega_{дв}}{L} \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$