

Институт механики НАН Украины

УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ОДНООСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассматривается устойчивость композитного материала слоистой структуры при одноосном сжатии. Критические параметры определяются с учетом различных геометрических характеристиках внутренней структуры при различных граничных условиях. Для решения задачи применен статический метод трехмерной линеаризованной теории устойчивости.

Stability of composite material of a laminate structure under the monoaxial pressing is considered. Critical parameters are defined under various boundary conditions. The statical method of three-dimensional linearized stability theories is applied to the problem decision.

Введение. В настоящее время результаты исследования устойчивости композитных материалов, полученные с использованием общих уравнений трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) [1] и модели кусочно- однородной среды являются наиболее точными. В работе [2] впервые предложен подход к исследованию устойчивости однонаправленного волокнистого материала при одноосном сжатии, при этом теория развита для модели кусочно- однородной среды, когда для описания устойчивости наполнителя (волокон) и связующего (матрицы) применяются основные соотношения ТЛТУДТ и удовлетворяются уравнения непрерывности векторов напряжений и перемещений на границах раздела наполнителя и связующего. Указанный подход является наиболее строгим и позволяет оценить точность результатов, полученных с применением различных приближенных теорий и расчетных схем. В рамках такого подхода в работе [3] приведен сравнительный анализ различных моделей в трехмерной теории устойчивости композитных материалов и дан краткий исторический очерк по теориям и подходам в механике слоистых и волокнистых материалов. Аналитические решения общих трехмерных уравнений отсутствуют и критические параметры определяются путем приближенного решения задач трехмерной устойчивости с использованием численных методов. С применением численных методов выполнены работы [5,8,9], в которых исследовано влияние геометрических параметров на критическую нагрузку для изотропных и анизотропных пластин. Приближенное решение применено в работах [6, 7], в которых исследована устойчивость горных выработок в трехмерной постановке. В настоящей работе с использованием трехмерной линеаризованной теории устойчивости (ТЛТУДТ) исследуются критические параметры при различных геометрических характеристиках внутренней структуры в плоской задаче устойчивости матричного слоистого двухкомпонентного композитного материала с изотропными слоями регулярной структуры, нагруженных одноосной нагрузкой с учетом различных граничных условий.

Постановка задачі. Рассматривается слоистый композит регулярной структуры. Изотропные компоненты композита бесконечны в направлении оси Ox_3 и размещены параллельно плоскости $x_1 = const$. Композит занимает верхнюю полуплоскость $x_2 \geq 0$ и сжимается на торце $x_2 = 0$ параметра структуры периодической нагрузкой $P = const$, обеспечивающей в материале плоскую деформацию в плоскости $x_1 O x_2$ (рис.1а).

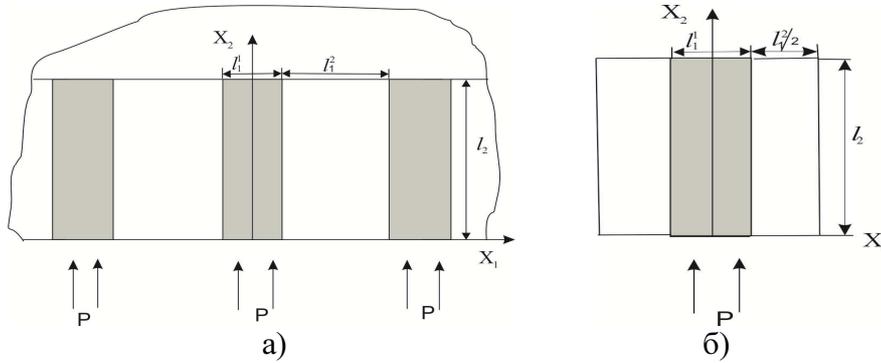


Рис. 1

Задача устойчивости формулируется на параметре структуры композита $S = (l_1^1 + l_1^2)l_2$. Начало координат выбирается по середине одной из компонент и тогда с учетом геометрической и силовой симметрии задачу можно рассматривать на части параметра структуры $S = ((l_1^1 + l_1^2)l_2) / 4$ (рис.2). Следует отметить, что расчетная схема, представленная на рис.2 для параметра структуры композита ориентирована на исследование устойчивости как композита, так и элемента конструкции из композитного материала, в котором под действием нагрузки находится армирующий элемент (рис. 1б).

Предполагается, что композит находится в состоянии простого нагружения. В этом случае задачу устойчивости будем исследовать в области Ω (рис.2), для которой уравнения и граничные условия трехмерной линеаризованной теории устойчивости запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{im} + \lambda \sigma_{ik}^0 u_{m,k})_{,i} &= 0, x \in \Omega, \\
 (\sigma_{21} + \lambda \sigma_{2k}^0 u_{1,k}) &= 0 \wedge u_2 = 0, x \in S_1, \\
 (\sigma_{12} + \lambda \sigma_{1k}^0 u_{2,k}) &= 0 \wedge u_1 = 0 \vee (\sigma_{im} + \lambda \sigma_{ik}^0 u_{m,k}) = 0, x \in S_2, \\
 (\sigma_{im} + \lambda \sigma_{ik}^0 u_{m,k}) &= 0, x \in S_3, \\
 (\sigma_{22} + \lambda \sigma_{22}^0 u_{2,2}) &= 0, x \in S_4, \\
 (\sigma_{12} + \lambda \sigma_{1k}^0 u_{2,k}) &= 0 \wedge u_1 = 0, x \in S_5
 \end{aligned} \tag{1}$$

Условия на контакте между слоями:

$$[\sigma_{ij}] = 0, [u_i] = 0 \tag{2}$$

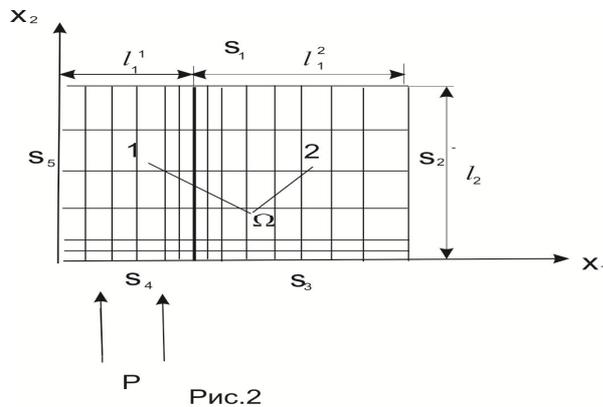
Критическая нагрузка определяется из условия $P_{kp} = \min |\lambda| P$, где λ – минимальное собственное число задачи (1), (2). Компоненты докритического состояния определяются из уравнений линейной теории упругости, которые вместе с граничными условиями и основными соотношениями имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}^0 &= 0, x \in \Omega, \\
 \sigma_{21} &= 0 \wedge u_2^0 = 0, x \in S_1, \\
 \sigma_{12} &= 0 \wedge u_1^0 = 0 \vee \sigma_{ij}^0 = 0, x \in S_2, \\
 \sigma_{ij}^0 &= 0, x \in S_3,
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^0 &= P, \sigma_{21}^0 = 0, x \in S_4, \\ \sigma_{12}^0 &= 0 \wedge u_1^0 = 0, x \in S_5, \\ \sigma_{ii}^0 &= A_{ik} \varepsilon_{ik} \quad \sigma_{ij}^0 = 2G \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i \neq j, \\ A_{ii} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad A_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{aligned}$$

Обозначения в (1) – (3) общепринятые и индексы изменяются от 1 до 2. \wedge, \vee - знаки логического умножения и сложения. На рис.2 обозначено:

$$\begin{aligned} S_1 &\in (x_2 = l_2 \wedge 0 \leq x_1 \leq l_1^1 + l_1^2), \quad S_2 \in (0 \leq x_2 \leq l_2 \wedge 0 \wedge x_1 \leq l_1^1 + l_1^2) \\ S_3 &\in (x_2 = 0 \wedge l_1^1 \leq x_1 \leq l_1^2), \quad S_4 \in (x_2 = 0 \wedge 0 \leq x_1 \leq l_1^1), \quad S_5 \in (x_1 = 0 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2). \end{aligned}$$



В расчетной области Ω вводится по каждому из направлений Ox_1 и Ox_2 неравномерная разностная сетка $\bar{\omega} = \omega + \gamma$, состоящая из множества ω внутренних узлов и множества γ граничных узлов. Граница γ , в свою очередь, состоит из участков $\gamma_{\tau_i} \gamma_{y_i}$, на которых по m -ой составляющей заданы, соответственно, разностные аналоги граничных условий в напряжениях и перемещениях. Сетка $\bar{\omega}$ разбивает расчетную область на M прямоугольных ячеек, (рис.1) и содержит N узлов, нумерация которых осуществляется слева направо и снизу-вверх. Для m -ой ячейки определены номера узлов $n^m, (n^m = \overline{1, N})$. В каждом узле строится дискретная аппроксимация дифференциальных уравнений задач (1)-(2),(3) Дифференциальной задачам (1)-(2),(3) на сетке $\bar{\omega}$ ставится в соответствие разностные задачи:

$$Ay = \Phi \text{ или } A_m y = \Phi_m, \quad x \in \bar{\omega}, \quad (4)$$

$$Ay = \mu By \text{ или } A_m y = \mu B_m y, \quad x \in \bar{\omega}. \quad (5)$$

Составляющие A_m, B_m разностных операторов A и B и оставляющие Φ_m вектора правой части определяются из соотношений:

$$A_m y = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} a_i(\xi) y & x \in \bar{\omega} \setminus \gamma_{y_i} \\ \sum y_i & x \in \gamma_{y_i} \end{cases}, \quad B_m y = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} b_i(\xi) y & x \in \bar{\omega} \setminus \gamma_{y_i} \\ \sum y_i & x \in \gamma_{y_i} \end{cases}, \quad (6)$$

$$\Phi_m = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} \varphi_i(\xi) & x \in \bar{\omega} \setminus \gamma_{y_i} \\ 0 & x \in \gamma_{y_i} \end{cases},$$

где $a_m(\xi)$, $b_m(\xi)$ – базовые операторы, $\varphi_m(\xi)$ – базовая функция, $\xi=(\xi_1, \xi_2)$ – мультииндекс, идентифицирующий узлы произвольной ячейки сетки. Построение базовых операторов и базовой функции осуществляется в соответствии с методикой, изложенной в работе [6]. Знак $\sum_{\xi \in x}$ означает суммирование по всем ячейным узлам ξ ,

принадлежащим сеточному узлу x , причем, если узел принадлежит границе сеточной области ($x \in \gamma$), то по m – ой компоненте в этом узле должно быть задано естественное граничное условие. Разностным операторам A , B , действующим в пространстве размерности $2N$ соответствует матрицы $A=\{A_{ij}\}$, $B=\{B_{ij}\}$ размерности $2N \times 2N$. В силу этого задачам (5), 6) на сетке $\bar{\omega}$ поставим в соответствие алгебраические задачи:

$$Ay = \Phi, \quad (7)$$

$$Ay = \mu By, \quad (8)$$

где $A=\{A_{ij}\}$, $B=\{B_{ij}\}$ представляют собою блочные матрицы порядка $2N$, блоки которых получаются как суммы блоков a_{ij} , b_{ij} базовых матриц a и b по всем ячейкам сетки $\bar{\omega}$, а составляющая Φ_m вектора Φ представляет сумму составляющих φ_m базового вектора φ . Разностные задачи (4,5) самосопряженные и положительно-определенные ($A=A^* > 0$), ($B=B^* > 0$). Для решения задач (4) и (5) применялись эффективные численные методы (прямые и итерационные) в соответствии с методикой работы [10]. В рассматриваемом случае алгебраическая задача (7) решалась прямым методом- методом Холецкого [4], а после сгущения разностной сетки применялся итерационный метод сопряженных градиентов [4]. При этом, решение полученное методом Холецкого интерполировалось и принималось в качестве начального приближения для решения задачи (8) итерационным методом.

В качестве примера рассмотрено решение задачи устойчивости для двух матричных композитных материалов со следующими механическими характеристиками:

1. $E^1 = 520$ ГПа, $E^2 = 52$ ГПа, $G^1 = 200$ ГПа, $G^2 = 2$ ГПа, $\nu^1 = 0.3$, $\nu^2 = 0.3$
2. $E^1 = 52$ ГПа, $E^2 = 5.2$ ГПа, $G^1 = 20$ ГПа, $G^2 = 2$ ГПа, $\nu^1 = 0.3$, $\nu^2 = 0.3$.

С учетом изменения геометрических параметров внутренней структуры, на которых действует нагрузка, на рис.3 приведена зависимость P_u / P_c от отношения l_1^1 / l_1^2 .

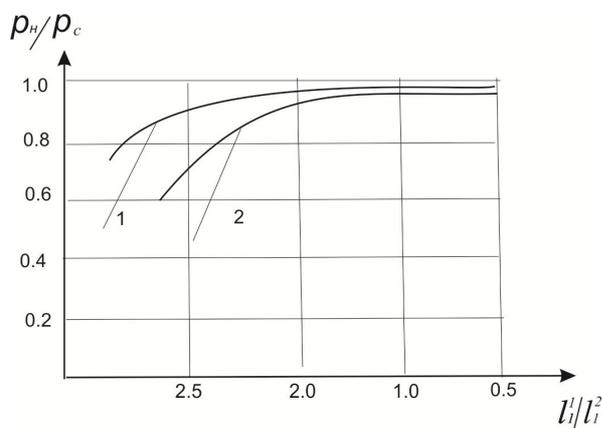


Рис.3

Где P_n – критическая нагрузка, полученная когда на участке границы S_2 расчетной области заданы условия в напряжениях, P_c – критическая нагрузка, полученная для смешанных граничных условий на участке S_2 . Кривая 1 соответствует отношению $E^1/E^2 = 100$, а кривая 2 отношению $E^1/E^2 = 10$. Отношение l_1^1/l_1^2 изменялось в пределах 0.25 - 2.5. Как видно из рис.3 для всех рассмотренных значений, отношения l_1^1/l_1^2 $P_n < P_c$, причем с уменьшением l_1^1/l_1^2 отношение P_n/P_c увеличивается и максимальная граница изменения величины относительной погрешности $\delta = 100(P_n - P_c)/P_n$ для всех рассмотренных геометрических параметров внутренней структуры не превышает 10%.

В исследованном диапазоне изменения геометрических и механических характеристик компонент материала критическая нагрузка, которая соответствует смешанным граничным условиям (элемент структуры слоистого материала) характеризуется меньшим значением, чем в случае граничных условий в напряжениях (слоистый элемент конструкции).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гузь А. Н.** Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел.- К: Вища шк., 1986. – 512 с.
2. **Гузь А. Н.** О построении теории устойчивости однонаправленных волокнистых материалов// Прикл. Механика. – 1969. – №2. – с. 62-70.
3. **Гузь А. Н., Декрет В. А.** О двух моделях в трехмерной теории устойчивости композитных материалов.// Прикл. Механика. – 2008. – №8. – с. 3-31.
4. **Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельнов С. М.** Численные методы. – М.: Наука. 1987, - 598 с.
5. **Зеленский В.С.** Зависимость критической нагрузки от геометрических параметров в задачах трехмерной устойчивости прямоугольных анизотропных пластин. // Доп. НАН України. – 2003. – №11. – с.37-39.
6. **Зеленский В. С.** Трехмерная устойчивость горного массива в окрестности параллельных горных выработок прямоугольного сечения. // Доп. НАН України. – 2006.-№6. – с.38-41.
7. **Зеленский В. С., Быстров В. М.,** Трехмерная устойчивость горного массива в окрестности прямоугольной горной выработки, ослабленной геологической трещиной. – Проблемы вычислительной механики и устойчивости конструкций. – Днепропетр. Ун-тет им. О. Гончара. – 2011, №17. – с.153-158.
8. **Коханенко Ю. В., Зеленский В. С.,** Влияние длины прямоугольной пластины на величину критической нагрузки при одноосном сжатии (трехмерная теория устойчивости). // Доп. НАН України. – 2003. – №4.-с.48-51.
9. **Коханенко Ю. В., Зеленский В. С.,** Влияние геометрических параметров на критическую нагрузку в задачах трехмерной устойчивости прямоугольных пластин и стержней. – Прикл. механика, № 6, 2003. – с.74-78.
10. Статика материалов/ Под ред. А. Н. Гузя.- Киев: Наук. думка, 1993. – 453 с. – (Механика композитов: в 12 т., Т. 3).