

Нежинский агротехнический институт, Нежин, Украина
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ДИСКРЕТНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКЕ

В работе рассмотрен геометрически нелинейный вариант постановки задач о динамическом поведении дискретно подкрепленных продольными ребрами эллипсоидальных оболочек. Численно решены задачи и проведен анализ результатов исследования динамического поведения продольно подкрепленных эллипсоидальных оболочек при нестационарной нагрузке.

The statement of problems of forced nonaxisymmetric vibrations of longitudinal supported ellipsoidal shells under nonstationary loads with using geometrically nonlinear theory is presented. A numerical algorithm of solving is constructed and an analysis of obtained results is given.

Введение. Исследование вынужденных колебаний упругих элементов занимает важное место в динамике деформируемых систем, в частности в динамике оболочек и оболочечных конструкций. В основном рассмотрены осесимметричные и неосесимметричные гармонические колебания подкрепленных оболочек простой геометрии (цилиндрические, конические и сферические подкрепленные оболочки) [1 – 3]. Результаты по вынужденным колебаниям подкрепленных оболочек при импульсных нагрузках представлены в работах [4 – 6]. Сложность решения аналитическими методами задач для оболочек сложной формы, приводит к необходимости применения различных численных подходов. Вынужденные колебания гладких и подкрепленных оболочек канонической формы при нестационарных нагрузках с применением численных методов рассмотрены в работе [4].

Целью данной статьи является постановка и численное решение задач о вынужденных неосесимметричных колебаниях дискретно подкрепленных продольными ребрами эллипсоидальных оболочек при действии нестационарной распределенной нагрузки.

Постановка задачи. Геометрия срединной поверхности гладкой эллипсоидальной оболочки задается соотношениями [5]

$$x = R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2, \quad y = R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \quad z = kR \cos \alpha_1,$$

где параметры α_1, α_2 представляют собою гауссовы криволинейные координаты на поверхности оболочки, причем координата α_1 соответствует меридиальному направлению, а α_2 – окружному направлению; $k = b/a$ – параметр эллиптичности; a, b – полуоси эллипса.

При построении математической модели процесса динамического деформирования конструкции используется геометрически нелинейный вариант теории оболочек типа Тимошенко, в основу которого положены следующие предположения. Принимается, что деформированное состояние обшивки может быть определено через

компоненты обобщенного вектора перемещений $\bar{U} = (U_1, U_2, U_3, \varphi_1, \varphi_2)^T$. Изменение перемещений по толщине оболочки в системе координат (s_1, s_2, z) задается аппроксимацией вида

$$U_1^z(s_1, s_2, z) = U_1(s_1, s_2) + z\varphi_1(s_1, s_2), \quad U_2^z(s_1, s_2, z) = U_2(s_1, s_2) + z\varphi_2(s_1, s_2),$$

$$U_3^z(s_1, s_2, z) = U_3(s_1, s_2), \quad z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$$

где $s_1 = \alpha_1 A_1$, $s_2 = \alpha_2 A_2$, A_1, A_2 – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности эллипсоидальной оболочки, h – толщина оболочки.

Деформационные соотношения и соотношения между напряжениями и деформациями для гладкой оболочки принимаются согласно [5].

При построении математической модели деформирования i -го подкрепляющего ребра направляемого вдоль оси α_1 будем исходить из гипотезы недеформируемости поперечного сечения подкрепляющего элемента в рамках геометрически нелинейной теории стержней Тимошенко. Деформированное состояние i -го подкрепляющего ребра определяется через компоненты обобщенного вектора перемещений $\bar{U}_i = (U_{1i}, U_{2i}, U_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$. При этом, используется следующая аппроксимация перемещений по сечению i -го подкрепляющего ребра

$$U_{1i}^{yz}(s_1, y, z) = U_{1i}(s_1) + z\varphi_{1i}(s_1), \quad U_{2i}^{yz}(s_1, y, z) = U_{2i}(s_1) + z\varphi_{2i}(s_1),$$

$$U_{3i}^{yz}(s_1, y, z) = U_{3i}(s_1),$$

где $U_{1i}, U_{2i}, U_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}$ – компоненты обобщенного вектора перемещений центра тяжести поперечного сечения i -го ребра.

Деформационные соотношения и соотношения между напряжениями и деформациями для i -го ребра принимаются согласно [5].

Условия контакта между компонентами вектора перемещений центра тяжести поперечного сечения i -го ребра и компонентами обобщенного вектора перемещения исходной срединной поверхности записывается в виде

$$U_{1i}(s_1) = U_1(s_1, s_{2i}) \pm h_{ci}\varphi_1(s_1, s_{2i}), \quad U_{2i}(s_1) = U_2(s_1, s_{2i}) \pm h_{ci}\varphi_2(s_1, s_{2i}), \quad (1)$$

$$U_{3i}(s_1) = U_3(s_1, s_{2i}), \quad \varphi_{1i}(s_1) = \varphi_1(s_1, s_{2i}), \quad \varphi_{2i}(s_1) = \varphi_2(s_1, s_{2i}),$$

где $h_{ci} = 0,5(h + h_i)$ – расстояние от срединной поверхности к линии центра тяжести поперечного сечения i -го ребра; h_i – высота i -го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси α_1 ; s_{2i} – координата линии проектирования центра тяжести поперечного сечения i -го ребра на координатную срединную поверхность обшивки.

Уравнения колебания. Для вывода уравнений колебания дискретно подкрепленной структуры используются вариационный принцип Гамильтона-Остроградского. После стандартного выполнения операций варьирования и интегрирования с учетом условий контакта (1) получаем две группы уравнений:

– уравнения колебаний оболочки в гладкой области

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} T_{22} \right] + k_1 \bar{T}_{13} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 T_{21}) &= \rho h \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}, \quad (2) \\ \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{12}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} T_{21} \right] + k_2 \bar{T}_{23} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 T_{22}) &= \rho h \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 \bar{T}_{13}) - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + P_3 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 \bar{T}_{23}) &= \rho h \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_{22} \right] - T_{13} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 M_{21}) &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{12}) + \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_{21} \right] + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 M_{22}) - T_{23} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

– уравнения колебания i -го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси α_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} + k_{1i} \bar{T}_{13i} + [S]_{i=1} &= \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \quad (3) \\ \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial s_1} + [T_{22}]_{i=1} &= \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right), \quad \frac{\partial \bar{T}_{13i}}{\partial s_1} - k_{1i} T_{11i} + [\bar{T}_{23}]_{i=1} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{11i}}{\partial s_1} - T_{13i} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} &+ k_{1i} \bar{T}_{13i} + [H]_i = \rho_i F_i \left(\pm h_{ci} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial M_{12i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial s_1} &+ [M_{22}]_i = \rho_i F_i \left(\pm h_{ci} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{cri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right), \end{aligned}$$

Обозначения величин и соответствующие выражения усилий – моментов для гладкой оболочки и подкрепляющих ребер введены согласно [5].

Уравнения колебаний (2), (3) дополняются соответствующими естественными граничными и начальными условиями.

Численный алгоритм. Уравнения (2), (3) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по переменным s_1, s_2, t при наличии пространственных разрывов по координате s_2 . Исходя из этого фактора, численный алгоритм решения исходной задачи строится следующим образом: ищется решение в гладкой области эллипсоидальной оболочки (2) и на линиях пространственных разрывов (3) [5]. Разностный алгоритм основан на применении интегро-интерполяционного метода построения разностных схем по пространственным координатам и явной конечно-разностной аппроксимации по временной координате [7].

Анализ результатов численных исследований. В качестве числового примера рассматривалась задача вынужденных колебаний продольно подкрепленной части эллипсоидальной оболочки с жестко защемленными краями в области

$D = \{\alpha_{10} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1N}, \alpha_{20} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{2N}\}$ при действии распределенной нормальной нагрузки $P_3(\alpha_1, \alpha_2, t)$, которая имеет вид

$$P_3(\alpha_1, \alpha_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где A – амплитуда нагрузки, T – длительность нагрузки. В расчетах полагалось $A = 10^6 \text{ Па}$; $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$.

Краевые условия при этом имеют вид

$$\bar{U}(\alpha_{10}, \alpha_2) = \bar{U}(\alpha_{1N}, \alpha_2) = 0, \quad \bar{U}(\alpha_1, \alpha_{20}) = \bar{U}(\alpha_1, \alpha_{2N}) = 0.$$

Начальные условия для всех компонент обобщенного вектора перемещений нулевые при $t = 0$.

Задача рассматривалась при следующих геометрических и физико-механических параметрах исходной конструкции (случай изотропной оболочки):

$$\alpha_{10} = \frac{\pi}{12}; \quad \alpha_{1N} = \pi - \frac{\pi}{12}; \quad \alpha_{20} = -\frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{2N} = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{a}{h} = 60; \quad \frac{b}{a} = 1,5;$$

$$E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \nu = 0,33; \quad \rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Продольно подкрепляющие элементы располагались вдоль по координате α_1 в сечениях $\alpha_{2i} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}i$, $i = 0, 1, 2$.

Геометрические и физико-механические параметры подкрепляющих элементов:

$$h_i = 4 \cdot h; \quad F_i = 4 \cdot h^2; \quad E_i = E_1; \quad G_i = G_{12}; \quad \rho_i = \rho.$$

На рис. 1 – 2 приведены результаты расчетов. Расчеты проводились на временном интервале $t_N = 40T$. На рисунках приведены наиболее характерные кривые для величин u_3 , T_{11} (рассматривались времена достижения указанными величинами максимальных значений по модулю), которые позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния исследуемой структуры. На всех рисунках кривая с индексом 1 соответствует моменту времени $t_1 = 1T$, кривая 2 – $t_2 = 7T$ и кривая 3 – $t_3 = 9T$. В силу симметрии приводятся зависимости по координате α_2 в диапазоне $0 \leq \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$. Как следует с приведенного графического материала, можно визуально определить места размещения подкрепляющих ребер в сечениях α_{2i} и их характер влияния на напряженно-деформированное состояние подкрепленной оболочки.

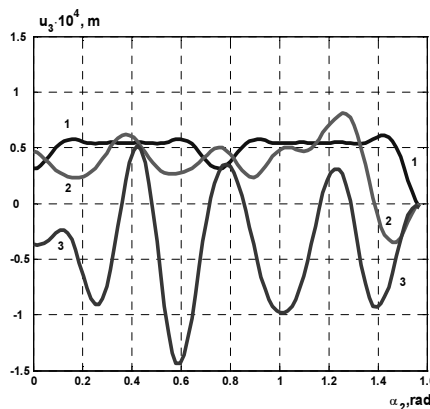


Рис. 1

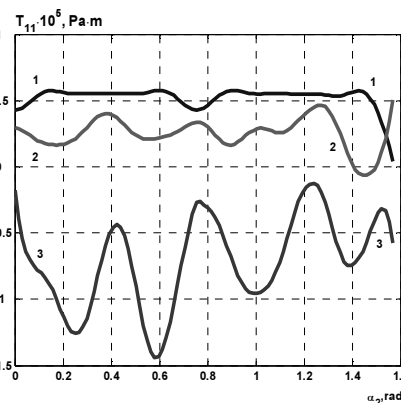


Рис. 2

На рис.1 приведены зависимости величины u_3 от пространственной координаты α_2 в сечении $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$. В области крепления ребер максимальный прогиб оболочки u_3 , в сравнении с прогибом в гладкой области, меньше приблизительно в три раза.

На рис.2 изображена зависимость величины T_{11} от пространственной координаты α_2 в сечении $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$. В области крепления ребер максимальное усилие оболочки T_{11} , в сравнении с усилием в гладкой области, меньше приблизительно в пять раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амиро И.Я.** Динамика ребристых оболочек / Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Паламарчук В.Г. – К.: Наук. думка, 1983. – 204с.
2. **Амиро И.Я.** Колебания ребристых оболочек вращения / Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Ревуцкий В.Н. – К.: Наук. думка, 1988. – 171 с.
3. **Амиро И.Я.** Учет дискретного размещения ребер при изучении напряженно – деформированного состояния, колебаний и устойчивости ребристых оболочек (обзор) / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 3 – 22.
4. **Луговой П.З.** Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. – К.: Издательско-полиграфический центр “Киевский университет”, 2005. – 536 с.
5. **Мейш В.Ф.** Исследование напряженно-деформированного состояния дискретно подкрепленных продольными ребрами эллипсоидальных оболочек при нестационарных распределенных нагрузках / В.Ф. Мейш, Н.В. Майбородина // Теоретическая и прикладная механика – 2007. – Вып. 43. – С. 150 – 155.
6. **Мейш В.Ф.** К расчету неосесимметричных колебаний дискретно подкрепленных поперечными ребрами гибких эллипсоидальных оболочек при нестационарных нагрузках/В.Ф.Мейш, Н.В. Майбородина // Прикл. механика. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 63 – 73.
7. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656с.

УДК 621.771.01

МАКСИМЕНКО О. П., д-р техн.наук, профессор
НИКУЛИН А. А., инженер
НИКУЛИН А. В., к-т техн.наук, доцент

Днепродзержинский государственный технический университет
ПАО «ДМКД»

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ПРОКАТКИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Результаты теоретического анализа устойчивости прокатки с помощью теоремы об изменении кинетической энергии и по методу наименьшего сопротивления дают обоснование выведенного с помощью