КРЫЛОВА Т.В., д-р пед.наук, профессор

Днепродзержинский государственный технический университет

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Предложена методика отыскания зависимости между собственными значениями и параметрами многопараметрической задачи, состоящей в определении области расположения кривой, поверхности или гиперповерхности собственных значений и использования двухэтапного метода сплайн-коллокации для дифференциальных уравнений четных порядков.

The technique of finding the relationship between the eigenvalues and the parameters of multiparameter problem consisting in determining the location of the curve, surface, or hypersurface the eigenvalues and the use of a two-step method of spline-collocation method for partial differential equations of even orders.

Введение. Исследования проблем теории колебаний во многих случаях сводятся к определению собственных значений и собственных функций граничных и краевых задач для дифференциальных уравнений четных порядков.

Одну из первых задач на собственные значения еще в 1744 году исследовал Леонард Эйлер при определении критической нагрузки для гибкого стержня, работающего на сжатие и подверженного опасности потери устойчивости.

Для определения собственных значений непрерывных граничных задач теории колебаний используются различные вариационные методы, метод сеток и методы интегральных уравнений. Серьезные трудности численной реализации вариационных методов связаны с тем, что процесс счета может оказаться неустойчивым при увеличении числа координатных функций. Недостатком вариационного метода является трудность построения координатных функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Основной недостаток метода сеток – трудоемкость решения систем высоких порядков. Из-за трудности построения функций Грина интегральные методы не нашли широкого практического применения.

В настоящее время разработано большое число приближенных методов нахождения собственных значений. Однако все они довольно трудоемки и позволяют находить только первые собственные значения. Поэтому определение собственных значений является одной из наиболее важных и наиболее трудных задач.

Особое внимание математиков в связи с проблемой оптимизации привлекают многопараметрические задачи на собственные значения, к которым относятся задачи о колебаниях динамических систем. К таким системам относятся стержневые системы, несущие поверхности летательных аппаратов, корпуса судов, канатные дороги, различные системы электрических линий и другие.

Многопараметрические краевые или граничные задачи на собственные значения – это задачи, в которых исследуется влияние некоторых величин (параметров), входящих в уравнение, на собственное значение.

Постановка задачи. Найти зависимость собственных значений от параметров краевой задачи для дифференциальных уравнений четных порядков.

Метод решения. Полученные результаты.

При исследовании многопараметрических задач было выяснено, что для упрощения процесса нахождения собственных значений нужно сначала определить область изменения собственных значений. Нами было доказано несколько теорем [1,2].

Теорема 1. Если $h = \pi/(b-a)$ и $y = B\sin h(x-a)$ не является собственной функцией задачи

$$\begin{cases} y'' + \mu p(x) y' + \lambda q(x) y = 0, \ x \in [a,b], & (1) \\ y(a) = y(b) = 0, & (2) \end{cases}$$

где $p(x) \in C^1_{[a,b]}$, $q(x) \in C_{[a,b]}$,

то кривая собственных значений располагается вне области $Д = \{(\lambda,\mu): \lambda q(x) - \mu p'(x)/2 < h^2$ для $x \in [a,b]\}$, т.е. вне области $Д_{++} U Д_{+-} U Д_{-+} U Д_{--}$,

где
$$Д_{++} = \{(\lambda,\mu): \lambda > 0,\ \mu > 0,\ \lambda q_+ - \mu p'_- /2 < h^2\},$$
$$Д_{+-} = \{(\lambda,\mu): \lambda < 0,\ \mu > 0,\ \lambda q_- - \mu p'_- /2 < h^2\},$$
$$Д_{-+} = \{(\lambda,\mu): \lambda > 0,\ \mu < 0,\ \lambda q_+ - \mu p'_+ /2 < h^2\},$$
$$Д_{--} = \{(\lambda,\mu): \lambda < 0,\ \mu < 0,\ \lambda q_- - \mu p'_+ /2 < h^2\},$$
$$p'_{\pm} = \max_{x\in[a,b]}\left(\pm p'(x)\right),\ q_{\pm} = \max_{x\in[a,b]}\left(\pm q(x)\right).$$

Теорема 2. Пусть $h = \pi/(b-a)$ и $1 + h^2 p(x) > 0$ для $x \in [a,b]$. Тогда, если $y = B\sin h(x-a)$ не является собственной функцией задачи

$$\begin{cases} y^{IV} + p(x)y'' - \lambda q(x) y + \mu \int_a^b y dx = 0, \\ y(a) = y(b) = y''(a) = y''(b) = 0, \end{cases} \qquad (3)$$

где $p(x) \in L^2_{1[a,b]}$, $q(x) \in C_{[a,b]}$,

то кривая собственных значений задачи (3) располагается вне области $Д = Д_+ U Д_-$,

где
$$Д_+ = \{(\lambda,\mu): \mu > 0,\ h^4 + h^2 p(x) - (p'(x))^2/(4(1+h^2 p(x))) - \lambda q(x) \ge 0 \text{ для } x \in [a,b]\},$$
$$Д_- = \{(\lambda,\mu): \mu < 0,\ h^4 + h^2 p(x) - (p'(x))^2/(4(1+h^2 p(x))) - \lambda q(x) - \mu\pi h \ge 0 \text{ для } x \in [a,b]\}$$

Теорема 3. Пусть $h = \pi/(b-a)$, $h_* = 2\lambda_*/(b-a)$, λ_* – наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{th}\lambda + \operatorname{tg}\lambda = 0,$$

$p = \frac{3}{2}P' - Q$, $q = \frac{1}{2}(-P''' + Q'' - R')$ и $p \ge 0$ для $x \in [a,b]$. Тогда кривая собственных значений задачи

$$\begin{cases} y^{IV} + P(x)y''' + Q(x)y'' + R(x)y' - \lambda F(x) y + \mu \int_a^b \Phi(x)\Phi(t) y(t) dt = 0, \\ y(a) = y(b) = y'(a) = y'(b) = 0, \end{cases}$$

где $P(x)\in C^3_{[a,b]}$, $Q(x)\in C^2_{[a,b]}$, $R(x)\in C^1_{[a,b]}$, $F(x),\Phi(x)\in C_{[a,b]}$,

лежит вне области $Д = Д_+ U Д_-$,

где

$$Д_+ = \left\{(\lambda,\mu):\ \mu>0,\ \ h_*^{-4} + h^2 p + p''/2 - (p')^2/(4p) + q - \lambda F \ge 0 \ \text{ для } x\in[a,b]\right\},$$

$$Д_- = \left\{(\lambda,\mu):\ \mu<0,\ \ h_*^{-4} + h^2 p + p''/2 - (p')^2/(4p) + q - \lambda F\int_a^b \Phi^2(x)dx \ge 0 \ \text{ для } x\in[a,b]\right\}$$

Теорема 4. Кривая собственных значений двупараметрической краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + \mu p(x) y' + \lambda q(x) y = 0, \ x\in[0;1], \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $p(x),\ q(x)\in C_{[0,1]}$,

располагается в области $P(\mu) + Q(\lambda) \ge 2$,

где $P = \max\limits_{x\in[0;1]}\left\{(2x^2-2x+1)|p(x)|\right\}$, $\qquad Q = \max\limits_{x\in[0;1]}\left\{x(1-x)|q(x)|\right\}$.

Теорема 5. Кривая собственных значений двупараметрической задачи (4) располагается в области

$$c_1^2\left(a_1\mu^2 + a_2\mu\lambda + a_3\lambda^2\right) + c_1c_2\left(a_4\mu^3 + a_5\lambda\mu^2 + a_6\lambda^2\mu + a_7\lambda^3\right) + \\ + c_2^2\left(a_8\mu^4 + a_9\lambda\mu^3 + a_{10}\lambda^2\mu^2 + a_{11}\mu\lambda^3 + a_{12}\lambda^4\right) \ge 1,$$

где

$a_1 = p^2/6;\quad a_2 = (PQ - pq)/48;$

$a_3 = Q^2/90;\quad a_4 = 31(P^3 - p^3)/12;$

$a_5 = 779P^2Q/180 - 155p^2q/36,$

$a_6 = 77(PQ^2 - pq^2)/30,$

$a_7 = 33Q^3/70 - 887q^3/1890,$

$a_8 = 149P^4/180 - 7p^2q^2/15 - 31p^4,$

$a_9 = 59P^3Q/18 - 217P^2pq/240 + 133Pp^2Q/144 - 383p^3q/120,$

$a_{10} = 211P^2Q^2/90 - 691P^2q^2/1440 - 11PpQq/90 + 493p^2Q^2/1080 - 37273p^2q^2/15120,$

$a_{11} = 235PQ^3/224 - 11PQq^2/567 + 47pQ^2q/2268 - 6353pq^3/6048,$

$a_{12} = 547Q^4/4536 + 37Q^2q^2/525 - 187q^4/945,$

$c_1 + c_2 = 1;\ c_1, c_2 \in R;$

$P = \max\limits_{x\in[0;1]} p(x),\qquad p = \min\limits_{x\in[0;1]} p(x),$

$Q = \max\limits_{x\in[0;1]} p(x),\qquad q = \min\limits_{x\in[0;1]} p(x).$

Теорема 6. Кривая собственных значений задачи

$$\begin{cases} y^{IV} + \mu g(x) y'' + \lambda r(x) y = 0, \ x\in[0;1], \\ y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $g(x), r(x)\in C_{[0,1]}$, располагается в области $a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2 \ge 1$, где

$$a = 71\left(\max_{x\in[0;1]} r^2(x)\right)/1746300,$$

$$b = -\left(\max_{x\in[0;1]}\{g(x)r(x)\}\right)/9450,$$

$$c = -11\left(\max_{x\in[0;1]} g^2(x)\right)/2100).$$

В частном случае, когда $g(x) = 2, r(x) = -1$ кривая собственных значений двупараметрической краевой задачи (5) располагается в области $166320\mu^2 + 3696\lambda\mu - 13789\lambda^2 \geq 166320$.

Теорема 7. Поверхность собственных значений задачи

$$\begin{cases} y^{VI} + \lambda_1 p(x)y^{IV} + \lambda_2 q(x)y'' + \lambda_3 r(x)y = 0, \ x \in [0;1], \\ y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = y''(0) = y''(1) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $p(x), q(x), r(x) \in C_{[0;1]}$, располагается в области

$$4{,}1 \cdot |\lambda_1| \cdot P + 0{,}62\,|\lambda_2| \cdot Q + 4{,}17|\lambda_3| \cdot R \geq 1,$$

где $P = \max_{x\in[0;1]}|p(x)|, \quad Q = \max_{x\in[0;1]}|q(x)|, \quad R = \max_{x\in[0;1]}|r(x)|$.

Для доказательства теорем 4-7 использовали интегральное представление решения $y(x)$ задачи (1), (2), когда $a = 0$, $b = 1$, в виде

$$y(x) = -\int_0^1 K_x(t)y''(t)dt,$$

где $K_x(t) = t(t - x), \ t \in [0;x]$,

$K_x(t) = x(1 - t), \ t \in [x;1]$,

представление $y(x)$ задачи (4) в виде

$$y(x) = \int_0^1 M_x(t)y^{IV}(t)dt,$$

где $M_x(t) = (1 - x)^2(-(2x + 1)t^3 + 3t^2 - x)/6, \ t \in [0;x]$,

$M_x(t) = (t - x)^3/6 - t^3(1 - x)^2(2x + 1)/6 + t^2x(1 - x)^2/2, \ t \in [x;1]$,

представление решения $y(x)$ задачи (6) в виде

$$y(x) = \int_0^1 M_x(t)y^{IV}(t)dt,$$

где

$$M_x(t) = t^5(6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 1)/120 + t^4(-3x^5 + 8x^4 - 6x^3 + x)/24 + t^3(x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2)/12, \ t \in [0;x],$$

$$M_x(t) = t^5(6x^5 - 15x^4 + 10x^3)/120 + t^4(-3x^5 + 8x^4 - 6x^3)/24 + t^3(x^5 - 3x^4 + 3x^3)/12 - t^2x^3/12 +$$

$$+ tx^4/24 - x^5/120, \ t \in [x;1].$$

После установления областей изменения собственных значений и параметров краевых задач нужно найти уравнения кривых или поверхностей собственных значений краевых задач. С этой целью применяем разработанный нами двухэтапный метод сплайн-коллокации с оптимизацией узлов сплайна [3].

На первом этапе представляем приближенное решение $\bar{y}(x)$ краевой задачи в каком-нибудь виде с небольшим количеством N узлов, а на втором этапе определяем асимптотически оптимальные узлы x_k^*, $k = \overline{0, n}$, выбирая $n >> N$.

Например, для задачи (1), (2), когда $a = 0$, $b = 1$, приближенное решение $\bar{y}(x)$ можно представить в виде кубического сплайна

$$\bar{y}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{i=0}^{N-1} b_i (x - x_i)_+^3$$

по разбиению $\Delta_N = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = 1\}$,

причем разбиение удобнее взять равномерным, т.е. $x_i = ih$, $i = \overline{0, N}$, $h = 1/N$.

Для нахождения $N+3$ неизвестных коэффициентов a_0, a_1, a_2, b_i, $i = \overline{0, N-1}$ используем краевые условия (2) и осуществляем коллокацию в $N+1$ точке отрезка $[0;1]$. В качестве точек коллокации можно выбрать узлы x_i, $i = \overline{0, N}$ сплайна. В результате получим алгебраическую линейную однородную систему $N+3$ уравнений относительно $N+3$ неизвестных коэффициентов a_0, a_1, a_2, b_i, $i = \overline{0, N-1}$. Полученная система имеет ненулевое решение, если ее главный определитель равен нулю. Приравнивая этот определитель нулю, получим уравнение $f(\lambda, \mu) = 0$ кривой собственных значений двупараметрической краевой задачи (1), (2).

На втором этапе решения задачи (1), (2) для уточнения связи между собственным значением λ и параметром μ для выбранной совокупности точек (λ_k, μ_k), $k = 0,1,2,...$ кривой $f(\lambda, \mu) = 0$ определяем коэффициенты a_0, a_1, a_2, b_i, $i = \overline{0, N-1}$ и оптимизируем разбиение, построив более тонкую сетку

$$\Delta_n^* = \{0 = x_0^* < x_1^* < x_2^* < ... < x_n^* = 1\},$$

причем $n >> N$.

Асимптотически оптимальные узлы x_k^*, $k = \overline{1, n-1}$ определяем из равенств

$$\int_0^{x_k^*} \sqrt[4]{\left|\bar{y}^{(4)}(x)\right|}\, dx = \frac{k}{n} \int_0^1 \sqrt[4]{\left|\bar{y}^{(4)}(x)\right|}\, dx, \quad k = \overline{0, n},$$

где $\bar{y}^{(4)}(x_j) = \left(\bar{y}''(x_{j-1}) - 2\bar{y}''(x_j) + \bar{y}''(x_{j+1})\right)/h^2$, $j = \overline{1, N-1}$.

Приближенное решение $\bar{\bar{y}}(x)$ задачи (1), (2) представляем в виде интерполяционного напряженного сплайна по разбиению Δ_n^* [4, 5]

$$\bar{\bar{y}}(x) = \sum_{k=1}^{n} \Big(A_k (x - x_{k-1}^*)/h_k + B_k (x_k^* - x)/h_k + C_k (\mathrm{ch}\,\alpha(x - t_k^*) - \mathrm{ch}\,(\alpha h_k/2))\Big)/\alpha +$$

$$+ Д_k (\mathrm{sh}\,\alpha(x - t_k^*) - 2(x - t_k^*)\,\mathrm{sh}\,(\alpha h_k/2))/\alpha),$$

где $h_k = x_k^* - x_{k-1}^*$, $t_k^* = (x_k^* + x_{k-1}^*)/2$, $k = \overline{1, n}$.

Для нахождения $4n$ неизвестных коэффициентов A_k, B_k, C_k, $Д_k$, $k = \overline{1, n}$ и одного параметра α используем краевые условия (2) и осуществляем коллокацию в $4n-1$ точках. В качестве точек коллокации можно выбрать внутренние узлы x_k^*, $k = \overline{1, n-1}$ сплайна и $3n$ точек ξ_{km}, $k = \overline{0, n-1}$, $m = 1,2,3$: $x_k^* < \xi_{k1} < \xi_{k2} < \xi_{k3} < x_{k+1}^*$.

В результате получим алгебраическую линейную однородную систему $4n+1$ уравнений относительно $4n+1$ неизвестных α, A_k, B_k, C_k, $Д_k$, $k=\overline{1,n}$. Приравнивая нулю определитель этой системы, будем иметь уточненное уравнение кривой собственных значений задачи (1), (2).

Для отыскания уравнения кривой собственных значений задачи (5) и уравнения поверхности собственных значений задачи (6) поступаем аналогичным образом.

Для задачи (5) $\bar{y}$ ищем, например, в виде

$$\bar{y}=\sum_{j=0}^{5}a_j x^j+\sum_{k=1}^{N-1}b_k(x-x_k)_+^5$$

по разбиению

$$\Delta_N=\{0=x_0<x_1<x_2<...<x_N=1\}.$$

Для уточнения решения оптимизируем разбиение, использовав равенства

$$\int_0^{x_k^*}\sqrt[6]{\left|\bar{y}^{(6)}(x)\right|}\,dx=\frac{k}{n}\int_0^1\sqrt[6]{\bar{y}^{(6)}(x)}\,dx,\ k=\overline{0,n}$$

где $\bar{y}^{(6)}(x_i)=\left(\bar{y}^{(4)}(x_{i-1})-2\bar{y}^{(4)}(x_i)+\bar{y}^{(4)}(x_{i+1})\right)/h^2$, $i=\overline{1,N-1}$, $h=1/N$.

Приближенное решение $\bar{\bar{y}}(x)$ задачи (5) представляем или в виде интерполяционного тригонометрического сплайна [6-8], или в виде интерполяционного напряженного сплайна

$$\bar{\bar{y}}(x)=A_0+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k(x-x_{k-1}^*)_+ +B_k(x_k^*-x)_+ +C_k\varphi_k(x)+Д_k\psi_k(x)\right)$$

(для интерполяционного тригонометрического сплайна

$$\varphi_k(x)=\cos\gamma_k(x-t_k)_+,$$
$$\psi_k(x)=\sin\gamma_k(x-t_k)_+,$$

для интерполяционного напряженного сплайна

$$\varphi_k(x)=\mathrm{ch}\theta_k(x-t_k)_+,$$
$$\psi_k(x)=\mathrm{sh}\theta_k(x-t_k)_+,$$

где $\gamma_k=\sqrt{-\bar{y}^{(4)}(t_k)/\bar{y}^{(2)}(t_k)}$,

$$\theta_k=\sqrt{\bar{y}^{(4)}(t_k)/\bar{y}^{(2)}(t_k)},$$
$$t_k=\left(x_{k-1}^*+x_k^*\right)/2,\ k=\overline{1,n}).$$

Тригонометрический сплайн применяем, когда $\bar{y}^{(2)}(x)\cdot\bar{y}^{(4)}(x)>0$, а напряженный сплайн, когда $\bar{y}^{(2)}(x)\cdot\bar{y}^{(4)}(x)<0$.

Для задачи (6) $\bar{y}$ ищем, например, в виде

$$\bar{y}=\sum_{k=0}^{6}a_k x^k+\sum_{i=1}^{N-1}b_i(x-x_i)_+^7,$$

$x_i=ih$, $i=\overline{0,N-1}$, $h=1/N$.

Асимптотические оптимальные узлы x_k^*, $k=\overline{1,n-1}$, $n>>N$ определяем из равенств

$$\int_0^{x_k^*} \left| \overline{y}^{(8)}(x) \right|^{1/8} dx = \frac{k}{n} \int_0^1 \left| \overline{y}^{(8)}(x) \right|^{1/8} dx,\ k = \overline{0,n}$$

и уточненное решение $\overline{\overline{y}}(x)$ ищем либо в виде интерполяционного напряженного сплайна, либо в виде интерполяционного тригонометрического сплайна в зависимости от знака $\overline{y}^{(2)}(x) \cdot \overline{y}^{(4)}(x)$. Если нужно, еще раз уточняем решение.

Вывод. Методика отыскания зависимости между собственными значениями и параметрами многопараметрической задачи, состоящей в определении области расположения кривой, поверхности или гиперповерхности собственных значений и использования двухэтапного метода сплайн-коллокации, применима не только для приближенного решения непрерывных краевых задач, но и для приближенного решения стационарных и нестационарных, непрерывных и непрерывно-дискретных, линейных и нелинейных относительно параметра многопараметрических граничных задач на собственные значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылова Т.В. Начала математического моделирования. Специальный курс «Стационарные и нестационарные задачи теории колебаний» для студентов технических вузов. Ч.2: Учебник. – К.: Выща школа, 1998. – 177 с.
2. Крылова Т.В., Дерец Е.В. Теорема об области расположения поверхности собственных значений трехпараметрической краевой задачи для дифференциального уравнения шестого порядка // Материалы XV Международной научной конференции ученых Украины, Белоруссии, России «Прикладные задачи математики и механики», г. Севастополь, 17-21 сентября 2007 г. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007. – С. 235-237.
3. Крылова Т.В., Лигун А.А. О выборе узлов при приближенном решении краевых задач методом сплайн-коллокации // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т.20, № 9. – С. 1529-1534.
4. Крылова Т.В., Лигун А.А. Асимптотические оценки погрешности приближения функции интерполяционными напряженными сплайнами // Сборник научных трудов. – Днепродзержинск: Изд-во Днепродзержинского университета, 1995. – Вып. 1. – С.6-15.
5. Крылова Т.В. Приближенное решение краевой задачи с помощью напряженных сплайнов // Тезисы докладов международной конференции "Modelling and investigation of systems stability. Systems Investigation".– К: ІБЦ Мінстату України. – 1997. – С. 60.
6. Крылова Т.В. Применение тригонометрических сплайнов для приближенного решения краевых задач // Матеріали VI міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука. – К. : «ВІПОЛ». – 1997. – С. 228.
7. Крылова Т.В. Асимптотические оценки погрешности приближения функций интерполяционными тригонометрическими сплайнами // Матеріали Першої міжнародної конференції «Наука і освіта' 98». – Дніпропетровськ: «Наука і освіта». – 1998. – С. 1033.
8. Крилова Т.В. Використання напружено-тригонометричних сплайнів для наближеного розв'язання двопараметричних крайових задач на власні значення // Тези доповіді міжнародної конференції «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь».– К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2002. – С. 21.