УДК 519.6

ХУДА Ж.В., к-т фіз.-мат.наук
ТОНКОНОГ Є.А., асистент
ВОЛОСОВА Н.М., к-т техн.наук

Дніпродзержинський державний технічний університет

ВИКОРИСТАННЯ L-СПЛАЙНІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Розроблено метод розв'язання крайової задачі, реалізований за допомогою побудованих раніше узагальнених L-сплайнів порядка два, який надає можливість отримати розв'язок в аналітичному вигляді на всій області визначення задачі з більш високою точністю в порівнянні зі звичайними колокаційними методами. Отриманий майже інтерполяційний сплайн враховує особливості шуканого розв'язку.

The method of solving boundary-value problem, implemented using the previously constructed generalized L-splines of the order of two, which allows you to get the solution in analytical form for the entire region of definition of the problem with higher accuracy than conventional methods kolokatsiynymy. The resulting spline interpolation about specific features of the desired solution.

Вступ. Актуальним питанням є побудова схем, які мали б більш високу точність у порівнянні зі стандартними кусочно-поліноміальними схемами, і при цьому враховували особливості конкретного рівняння, яке розв'язується. Найбільш ефективними є методи побудовані на основі сплайнів. Незважаючи на зручність цих методів їх точність є недостатньою. Дослідженнями шляхів підвищення точності сплайн-схем розв'зання крайових задач присвячено чимало робіт, серед них варто відзначити праці Ю.С. Зав'ялова, В.Л. Мірошниченко, С.Б.Стечкина, Ю.М.Субботіна, А.О. Лигуна, Т.В. Крилової. Як правило, засновані ці схеми на поліноміальних сплайнах. Новим напрямком у вирішенні питання про підвищення точності наближеного розв'язку крайових задач і задач Коші стало використання різних узагальнень сплайнів, зокрема L-сплайнів. Ці функції були розглянуті К. Де Бором, М.П. Корнійчуком, А.І.Гребенніковим, А.О Лигуном. Розвиток теорії L-сплайнів був багато в чому обумовлений потребами обчислювальної математики, зокрема при відшуканні розв'язку диференційних рівнянь. Побудова узагальнених майже інтерполяційних L-сплайнів, точність їх відхилення від точного розв'язку розглянута в роботах Ж.В.Худої [2], [3].

Постановка задачі. Дана робота присвячена питанням відшукання наближеного розв'язку крайової задачі виду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)\,; \tag{1}$$

$$y(a) = y_a\,,\; y(b) = y_b\,, \tag{2}$$

де $p(x), q(x), f(x)$ - двічі неперервно диференційовані функції. Цей розв'язок потрібно знайти з більш високою точністю в порівнянні з розв'язками знайденими існуючими методами. Для вирішення цього питання розроблена сплайн-коллокаціонная схема, яка базується на використанні L- сплайнів порядку два, що дозволяє підвищити точність наближеного розв'язку.

Результати роботи. Пропонується шукати наближений розв'язок задачі (1) - (2) за допомогою коллокаціонной схеми, а в якості наближеного рішення можна використовувати сплайни виду

$$\widetilde{S}_2(y,x) = \sum_{i=-1}^{N+1} \widetilde{C}_i B_{2,i}(x-(i-1/2)h) \qquad (i=0,1,...,N), \tag{3}$$

які, в свою чергу, на кожному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ є розв'язками рівнянь виду

$$\widetilde{S}_2^{(3)} + P_i \widetilde{S}_2'' + Q_i \widetilde{S}_2' = 0, \qquad (i=0,1,...,N). \tag{4}$$

В якості коефіцієнтів $P_i; Q_i$ можуть бути обрані значення функцій $p(x)$, $q(x)$ в точках розбиття $\Delta_{N[a,b]}$. Сплайни (3) є узагальненими L-сплайнами порядка два.

Сплайни (3) можуть бути введені по рівномірному розбиттю $\Delta_N[a,b]$ відрізка $[a,b]$ на частини ($\Delta_N[a,b] = \{x_i | x_i = a + ih, h > 0, i = 0,1,...,N\}$), а $B_{2,i}(\bullet)-$ базисні функції з мінімальним носієм $[x_{i-2}, x_{i+1}]$, які також задовольняють рівнянню (4) і нормовані умовою: $B_{2,i}(x_{i+1/2}) + B_{2,i}(x_{i-1/2}) + B_{2,i}(x_{i-3/2}) = 1$. Узагальнені базисні функції $B_{2,i}(\bullet)$ побудовані та наведені в роботах $[2]-[3]$.

Оскільки підібрати єдине рівняння виду (4), яке найкращим чином описує наближений розв'язок задачі (1) - (2) на кожному проміжку дуже складно, то доводиться вдатися до рівняння, коефіцієнти якого змінюються від відрізка до відрізка. При цьому в якості коефіцієнтів P_i, Q_i можуть бути обрані значення функцій $p(x), q(x)$ в точках разбиття $\Delta_N[a,b]$. Таким чином, ми можемо підбирати вид сплайна $\widetilde{S}_2(x)$ для кожного конкретного рівняння виду (1). Побудувавши один раз базисні функції, а потім, змінюючи тільки вид $p(x)$, $q(x)$, можна очікувати, що отримаємо сплайн (3), параметри якого підібрані таким чином, що цей сплайн, краще (в сенсі мінімізації ухилення від точного рішення) описує поведінку шуканого розв'язку моделі, ніж поліноміальні сплайни.

Наближений розв'язок задачі (1) – (2) будуємо у вигляді сплайну (3), де параметри сплайну вибираються на підставі умов

$$\begin{cases} \widetilde{S}(a) = y_a, \\ \widetilde{S}(b) = y_b, \qquad\qquad (i=\overline{0,N}) \\ \widetilde{S}_i'' + p_i \widetilde{S}_i' + q_i \widetilde{S}_i = f_i, \end{cases} \tag{5}$$

де $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$ $(i=\overline{-1,N+1})$ на кожному інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$; $\widetilde{S}_i = \widetilde{S}(x_{i-1/2})$.

Використовуючи явний вигляд базисних функцій $B_{2,i}(x)$ $(i=\overline{-1,N+1})$ і значення цих функцій та їх похідних у вузлах колокації, отримаємо систему з трьохдіагональною матрицею відносно коефіцієнтів сплайна (3) $\widetilde{C}_{2,i}$ $(i=\overline{-1,N+1})$

$$\begin{cases} \widetilde{C}_{-1}\alpha_0 + \widetilde{C}_0\alpha_0 + \widetilde{C}_1\alpha_1 = y_\alpha, \\ \widetilde{C}_{i-1}(\theta_{i-1} + p_i\beta_{i-1} + q_i\alpha_{i-1}) + \widetilde{C}_i(q_i\alpha_i + p_i\beta_i + \theta_i) + \\ + \widetilde{C}_{i+1}(\theta_{i+1} + p_i\beta_{i+1} + q_i\alpha_{i+1}) = f_i, \\ \widetilde{C}_{N-1}\alpha_{N-1} + \widetilde{C}_N\alpha_N + \widetilde{C}_{N+1}\alpha_N = y_b, \qquad (i=1,\, N-1) \end{cases} \tag{6}$$

де $\alpha_i = B_{2,i}(x_{i-1/2})$, $\beta_i = B'_{2,i}(x_{i-1/2})$, $\theta_i = B''_{2,i}(x_{i-1/2})$, $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$, а $B_{2,i}(x)-$ базисні функції, що задовольняють рівнянню (4).

Доведемо, що порядок точності такої схеми складає $O(h^3)$ в довільній точці розбиття для сплайнів виду (3).

Теорема. Нехай $q(x)$, $f(x) \in L^4_\infty[a,b]$, $p(x) \in L^5_\infty[a,b]$, $q(x) < 0$ для $x \in [a,b]$ і h таке, що для $x \in [x_{i-1}, x_i]$ виконуються умови

$$\frac{2}{h^2} - \frac{5q_i}{6} - \frac{p^2{}_i}{12} > 0,$$

$$\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h} - \frac{p_i^2}{6} + \frac{q_i}{12} + \frac{h}{24}\left(q'_i - p_i q_i - p'_i p_i\right) > 0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h} + \frac{p_i^2}{12} + \frac{q_i}{12} - \frac{h}{24}\left(q'_i - p_i q_i - p'_i p_i\right) > 0,$$

$$q_i - h^2\left(\frac{(p'_i)^2}{12} - \frac{p'_i q_i}{24} + \frac{p_i^4}{192} + \frac{q''_i}{24} - \frac{p''_i p_i}{24} - \frac{p^2{}_i q_i}{96}\right) < 0,$$

якщо $y_*(x) \in L^6_\infty[a,b]$ - точний розв'язок задачи (1) – (2), а $\widetilde{S}_2(x)-$ сплайн вигляду (3), який задовольняє умовам (4), де $\widetilde{C}_i (i = \overline{0, N+1})$ - розв'язки системи (6) , тоді при $h \to 0$ виконується нерівність

$$\left\| y_* - \widetilde{S}_2 \right\|_{C[a,b]} \le Ah^3 , \tag{8}$$

де $A = \dfrac{1}{24}\max\limits_{1\le i \le N}\left| y'''_{i-1/2} + p_i y''_{i-1/2} + q_i y'_{i-1/2} + q'_i y_{i-1/2} + p''_i y_{i-1/2} + 2p'_i y'_{i-1/2} \right|$.

Доведення теореми. Для отримання оцінки точності сплайн-розв'язку (3), коефіцієнти якого знайдені з системи (6) використовуємо нерівність

$$\left|\widetilde{S}_2(x) - y_*\right| \le \left|\widetilde{S}_2(x) - S_2(x, y_*)\right| + \left|S_2(x, y_*) - y_*\right|, \tag{9}$$

де y_* - точний розв'язок задачі (1)-(2), $S_2(x, y_*)$ - узагальнений майже інтерполяційний сплайн. Сплайни $S_2(x, y_*)$ побудовані і наведені в роботі $[2]$.

Такі сплайни мають вигляд

$$S_2(x, y_*) = \sum_{i=-1}^{N+1} C_i B_{2,i}(x - (i - 1/2)h) . \tag{10}$$

При цьому коефіцієнти C_i розраховані таким чином, що значення сплайна у вузлі майже збігаються зі значеннями інтерпольованої функції y_*, яка в свою чергу є розв'язком задачі (1)-(2). Коефіцієнти C_i мають вигляд

$$C_i = y_{i-1/2}\left(1 - \frac{1}{12}p'_i h^2\right) - \frac{1}{24}\Delta y_i p_i h - \frac{1}{8}\Delta^2 y_i , \tag{11}$$

де $y_{i-1/2} = y((i-1/2)h)$, $p_i = p(ih)$, $\Delta y_i = y_{i+3/2} - y_{i-1/2}$, $\Delta^2 y_i = y_{i+1/2} - 2y_{i-1/2} + y_{i-3/2}$, $(i = \overline{-1, N+1})$.

В роботі $[2]$ доведено, що на кожному з проміжків $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=\overline{0,N})$ рівномірно по *i* та по *x* буде виконано співвідношення

$$|y(x)-S_2(x,y)| = \left|\frac{u}{6}\left(\frac{h^2}{4}-u^2\right)(y'''_{i-1/2}+p_i y''_{i-1/2}+q_i y'_{i-1/2}+\right.$$
$$\left.+q'_i y_{i-1/2}+p''_i y_{i-1/2}+2p'_i y'_{i-1/2})\right|+O(h^4)\ , \qquad (12)$$

де $u = x-(i-1/2)h$. Тобто відхилення майже інтерполяційного сплайну від точного розв'язку задачі (1)-(2) не перевищує $O(h^3)$ в довільній точці. Тобто для доведення теореми нам залишається оцінити різницю $\left|\widetilde{S}_2(x)-S_2(x,y_*)\right|$.

Оскільки обидва сплайни побудовані на основі узагальнених базисних функцій $B_{2,i}(x)$, то питання оцінки відхилення $\widetilde{S}_2(x)-S_2(x,y_*)$ може бути зведено до оцінки різниці $\delta_i=\widetilde{C}_i-C_i$. Доведемо, що це відхилення порядку $O(h^4)$.

Позначимо оператор

$$L_i(\widetilde{C}_i)=\widetilde{C}_{i-1}(\theta_{i-1}+p_i\beta_{i-1}+q_i\alpha_{i-1})+\widetilde{C}_i(q_i\alpha_i+p_i\beta_i+\theta_i)+\widetilde{C}_{i+1}(\theta_{i+1}+p_i\beta_{i+1}+q_i\alpha_{i+1})$$

Підставимо значення δ_i в оператор L_i.

$$L_i(\delta_i)=L(C_i)-L(y_i)\left(1-\frac{p'_i}{12}h^2\right)+\frac{1}{24}p_i h L_i(\Delta y_i)+\frac{1}{8}L\left(\Delta^2 y_i\right), \qquad (13)$$

де

$$L(y_i)=y_{i-3/2}(\theta_{i-1}+p_i\beta_{i-1}+q_i\alpha_{i-1})+y_{i-1/2}(q_i\alpha_i+p_i\beta_i+\theta_i)+y_{i+1/2}(\theta_{i+1}+p_i\beta_{i+1}+q_i\alpha_{i+1})$$

$$L(\Delta y_i)=\left(y_{i-1/2}-y_{i-5/2}\right)(\theta_{i-1}+p_i\beta_{i-1}+q_i\alpha_{i-1})+\left(y_{i+1/2}-y_{i-3/2}\right)(q_i\alpha_i+p_i\beta_i+\theta_i)+$$
$$+\left(y_{i+3/2}-y_{i-1/2}\right)(\theta_{i+1}+p_i\beta_{i+1}+q_i\alpha_{i+1}),$$

(14)

$$L(\Delta^2 y_i)=\left(y_{i-1/2}-2y_{i-3/2}+y_{i-5/2}\right)(\theta_{i-1}+p_i\beta_{i-1}+q_i\alpha_{i-1})+$$
$$+\left(y_{i+1/2}-2y_{i-1/2}+y_{i-3/2}\right)(q_i\alpha_i+p_i\beta_i+\theta_i)+$$
$$+\left(y_{i+3/2}-2y_{i+1/2}-y_{i-1/2}\right)(\theta_{i+1}+p_i\beta_{i+1}+q_i\alpha_{i+1}).$$

Використовуючи в формулах (14) розклад $y_{i-3/2}, y_{i+1/2}, y_{i-5/2}, y_{i+3/2}$, за формулою Тейлора в точці $x=\left(i-\frac{1}{2}\right)h$, отримаємо наступні розвинення

$$L(y_i)=\left(\frac{q_i}{12}y''_{i-1/2}-\frac{q''_i}{24}y_{i-1/2}+\frac{q_i^{(4)}}{12}y_{i-1/2}+\frac{p_i^2}{12}y''_{i-1/2}-\frac{q'_i}{12}y'_{i-1/2}+\frac{p''_ip_i}{24}y''_{i-1/2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(p'_i)^2}{12}y_{i-1/2}+\frac{p'_ip_i}{12}y'_{i-\frac{1}{2}}+\frac{p_i}{6}y^{(3)}_{i-\frac{1}{2}}+\frac{p'_iq_i}{24}y_{i-\frac{1}{2}}+\frac{p'_iq_i}{24}y_{i-\frac{1}{2}}+\frac{p_iq_i}{12}y'_{i-\frac{1}{2}}\right)h^2+$$

$$+y''_{i-\frac{1}{2}}+p_iy'_{i-\frac{1}{2}}+q_iy_{i-\frac{1}{2}}+O(h^4),$$

$$L(\Delta y_i)=\left(-\frac{q'_i}{6}y''_{i-1/2}+\frac{p_i^2}{6}y^{(3)}_{i-1/2}-\frac{(p'_i)^2}{6}y'_{i-1/2}+\frac{p'_ip_i}{6}y''_{i-1/2}+\frac{p'_iq_i}{12}y'_{i-1/2}+\right.$$

$$\left.+\frac{p''_ip_i}{12}y'_{i-1/2}-\frac{q''_i}{12}y'_{i-1/2}+\frac{2p_i}{3}y^{(4)}_{i-1/2}+\frac{p_iq_i}{6}y''_{i-1/2}+\frac{q_i}{2}y^{(3)}_{1/2i}\right)h^3+ \quad (15)$$

$$+2h\left(y^{(3)}_{i-1/2}+p_iy^{(2)}_{i-1/2}+q_iy'_{i-1/2}\right)+O(h^4),$$

$$L(\Delta^2y_i)=\left(y^{(4)}_{i-1/2}+q_iy''_{i-1/2}+p_iy^{(3)}_{i-1/2}\right)h^2+O(h^4).$$

Враховуючи, що $L(C_i)=f_i$, а також те, що $y''_{i-\frac{1}{2}}+p_iy'_{i-\frac{1}{2}}+q_iy_{i-\frac{1}{2}}=f_i$ після підстановки рівностей (15) у формулу (13) отримаємо, що рівномірно по i $(i=\overline{1,N})$ $L_i(\delta_i)=O(h^4)$, тобто

$$\delta_{i-1}(\theta_{i-1}+p_i\beta_{i-1}+q_i\alpha_{i-1})+\delta_i(q_i\alpha_i+p_i\beta_i+\theta_i)+\delta_{i+1}(\theta_{i+1}+p_i\beta_{i+1}+q_i\alpha_{i+1})=d_i, \quad (16)$$

де $d_i=O(h^4)$.

Таким чином ми отримали систему (16) з трьохдіагональною матрицею. Скористаємось лемою Адамара. Якщо система $AX=D$ де $A=\{a_{ij}\}_1^N$ -матриця з діагональним переважанням, $D=(d_1,d_2,...,d_N)$ має єдиний розв'язок, то справедлива оцінка [1] :

$$\max_{1\le i\le N}|x_i|\le\max_{1\le i\le N}\frac{|d_i|}{\gamma_i},\qquad \text{де}\quad \gamma_i=|a_{ii}|-\sum_{j\ne i}|a_{ij}|>0\quad (i,j=\overline{1,N}). \quad (17)$$

Доведемо, що матриця системи (16) є матрицею з діагональним переважанням. Для цього розглянемо різницю

$$|q_i\alpha_i+p_i\beta_i+\theta_i|-|\theta_{i+1}+p_i\beta_{i+1}+q_i\alpha_{i+1}|-|\theta_{i-1}+p_i\beta_{i-1}+q_i\alpha_{i-1}|=\gamma_i\ (i,j=\overline{1,N}). \quad (18)$$

Після підстановки явного вигляду значень базисних сплайнів та їх похідних [2] $\alpha_i=B_{2,i}(x_{i-1/2})$, $\beta_i=B'_{2,i}(x_{i-1/2})$, $\theta_i=B''_{2,i}(x_{i-1/2})$ в рівність (18) з урахуванням умов (7) отримаємо

$$\gamma_i=-q_i+h^2\left(\frac{(p'_i)^2}{12}-\frac{p'_iq_i}{24}+\frac{p_i^4}{192}+\frac{q''_i}{24}-\frac{p''_ip_i}{24}-\frac{p^2_iq_i}{96}\right).>0 \quad (19)$$

Нерівність (19) доводить, що умова (17) виконана і матриця системи (16) є матрицею з діагональним переважанням. Тоді за лемою Адамара для розв'язків системи (16) справедлива оцінка

$$\max_{1\le i\le N}\left|\delta_i\right| \le \max_{1\le i\le N}\frac{\left|d_i\right|}{\gamma_i},$$

тобто $\max\limits_{1\le i\le N}\left|\widetilde{C}_i - C_i\right| \le O(h^4)$, звідки випливає $\left\|\widetilde{S}_2(x) - S_2(x, y_*)\right\|_C = O(h^4)$.

Враховуючи отриману рівність, а також рівність (12), якщо покласти, що

$$A = \frac{1}{24}\max_{1\le i\le N}\left|y'''_{i-1/2} + p_i y''_{i-1/2} + q_i y'_{i-1/2} + q'_i y_{i-1/2} + p''_i y_{i-1/2} + 2p'_i y'_{i-1/2}\right|$$

з урахуванням нерівності (9) отримаємо нерівність (8). Таким чином теорему доведено.

Висновки. Розроблено метод розв'язання крайової задачі, реалізований за допомогою побудованих раніше узагальнених L-сплайнів порядка два. Наведений метод є ефективними та зручним в застосуванні. Він надає можливість отримати розв'язок в аналітичному вигляді на всій області визначення задачі з більш високою точністю в порівнянні зі звичайними колокаційними методами. До того ж отриманий майже інтерполяційний сплайн враховує особливості шуканого розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
2. Худая Ж.В. Об одном свойстве L–сплайнов с переменными коэффициентами. / Худая Ж.В. // Питання прикладної математики та математичного моделювання. –Д.: ДНУ.–2006.–С.250-260.
3. Худая Ж.В. Об асимптотике приближения функции L –сплайнами в зависимости от положения точки. / Худая Ж.В. // Питання прикладної математики та математичного моделювання.–Д.: ДНУ.–2007.–С .317-327.