

РОЗДІЛ «МЕХАНІКА ДЕФОРМОВАНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА, МЕХАНІКА РІДИНИ, ГАЗУ ТА ПЛАЗМИ»

УДК 539.3

ГАЛИШИН А.З., д-р техн. наук¹⁾
СТЕБЛЯНКО П.А., д-р физ.-мат. наук²⁾
ШЕВЧЕНКО Ю.Н., академик НАНУ¹⁾

¹⁾Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины
²⁾Днепродзержинский государственный технический университет

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ТОНКИХ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРЕВЕ

Разработана методика определения осесимметричных нестационарных температурных полей в тонких слоистых оболочках вращения со слоями переменной толщины. Учитывается зависимость теплофизических свойств материала от температуры. В основу методики положен метод конечных разностей и явная разностная схема по времени. Эффективность методики подтверждается решением тестового примера. Для иллюстрации определено температурное поле гофрированной оболочки.

The method of determination of axisymmetric unsteady temperature fields in thin layered shells of rotation with layers of variable thickness. The procedure is based on the method of finite differences and an explicit finite difference scheme in time. The effectiveness of the solution method is confirmed by a test case. To illustrate the temperature field is determined by a corrugated shell.

Введение. В технике находят широкое применение тонкостенные конструкции, выполненные в виде слоистых оболочек вращения и работающие в условиях неизотермического нагружения. К ним относятся сопла ракетных двигателей, элементы паро- и газотурбинных установок, элементы трубопроводов и др. При интенсивном нагреве в начальные моменты времени в этих конструкциях возникают большие градиенты температуры, которые могут вызвать возникновение пластических деформаций и разрушение конструкции. Поэтому для оценки прочности конструкций необходимо наиболее точно определять во времени возникающее в них распределение температуры. В настоящее время разработаны аналитические и численные методы определения нестационарных температурных полей в слоистых оболочках. Обзор этих методов можно найти, например, в работе [1]. С практической точки зрения последние являются более предпочтительными, т.к. они предназначены для расчета оболочек сложного меридионального сечения. Для тонких слоистых оболочек использование трехмерного уравнения теплопроводности является крайне неэффективным, поэтому для расчетов многие авторы используют упрощающие предположения, связанные с тонкостенностью оболочки и законами распределения температуры по ее толщине. В работе [2] принята гипотеза о линейном распределении температуры по толщине каждого слоя. Однако эта гипотеза не позволяет описывать нестационарное распределение температуры по толщине оболочки, и применима лишь для решения стационарных задач. В работе [3] предлагается итерационный метод построения нелинейной зависимости стационарного распределения температуры по толщине многослойных пластин и оболочек, основанный на последовательном решении уравнения теплопроводности для произвольного k -го слоя при соответствующих граничных условиях и условиях контакта. В качестве первого приближения выбирается

решение задачи теплопроводности только поперек пакета слоев. В итерационном процессе авторы ограничились кубическим распределением температуры. Численные результаты не приводятся. В работах [4, 5] температура по толщине каждого слоя пластин и оболочек аппроксимировалась полиномами Лежандра. В работах [6, 7] рассматриваются оболочки со слоями постоянной толщины, теплофизические свойства которых не зависят от температуры. Температура по толщине каждого слоя может аппроксимироваться полиномом n -й степени, однако в рассмотренных примерах авторы ограничиваются линейным ее распределением. Применительно к однослойным оболочкам переменной толщины полиномиальное распределение температуры по толщине использовалось в работе [8], а вдоль меридиональной координаты использовался метод конечных разностей (МКР) [13]. Теплофизические характеристики материала также предполагались независимыми от температуры. В отличие от этого в настоящей работе излагается методика решения осесимметричной нестационарной задачи теплопроводности для тонких оболочек со слоями переменной толщины, теплофизические свойства которых зависят от температуры. Для решения задачи используется МКР, позволяющий получить значения температуры в той же системе координат и в тех же узлах разностной сетки, что и при решении задачи о напряженно-деформированном состоянии (НДС) оболочки.

Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим тонкую оболочку вращения, составленную из последовательно соединенных звеньев с различной формой меридиана. В пределах одного звена оболочка состоит из q изотропных слоев с переменной вдоль меридиана толщиной и теплофизическими свойствами, зависящими от температуры. Предположим, что между слоями выполняется условие идеального теплового контакта. Положение произвольной точки оболочки определим в системе криволинейных ортогональных координат s, φ, ζ , где s ($s_0 \leq s \leq s_n$) – длина дуги координатного меридиана; φ – окружная координата; ζ ($\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_q$) – расстояние точки от координатной поверхности. Координаты ζ_0 и ζ_q соответствуют внутренней и наружной поверхностям, а координаты ζ_p ($p = 1, \dots, q-1$) – поверхностям контакта смежных слоев. Координатный меридиан оболочки будем аппроксимировать прямолинейными участками либо криволинейными в форме дуг окружности. В качестве координатной поверхности выберем либо срединную поверхность оболочки либо линию контакта p -го и $(p+1)$ -го слоя. В пределах l -го звена ($l=1, \dots, m$) толщина p -го слоя вдоль меридиана меняется по линейному закону. Будем рассматривать тонкие оболочки, для которых можно пренебречь величинами ζk_s и ζk_φ по сравнению с единицей, где k_s и k_φ – главные кривизны координатной поверхности оболочки [8].

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ оболочка находится в установившемся температурном поле $T = T_0(s, \zeta)$, а затем подвергается конвективному теплообмену с окружающей средой. В выбранной системе координат уравнение теплопроводности имеет вид [8]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(F^{(s)} + F^{(\zeta)} \right), \quad (1)$$

$$F^{(s)} = \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial s} + \rho \right) \frac{\partial T}{\partial s}, \quad F^{(\zeta)} = \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} + k \right) \frac{\partial T}{\partial \zeta}, \quad (2)$$

где $a = a(T)$, $\lambda = \lambda(T)$ – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности;
 $k = k_s + k_\varphi = \frac{d\theta}{ds} + \frac{\sin\theta}{r}$ – сумма главных кривизн координатной поверхности;
 $\rho = \frac{\cos\theta}{r}$; $r = r(s)$ – радиус координатной поверхности; $(\pi - \theta)$ – угол между нормалью к координатной поверхности и осью вращения z .

Решение уравнения (1) должно удовлетворять граничным условиям на поверхностях оболочки [8]

$$1) \text{ при } \zeta = \zeta_0: \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{\alpha_1}{\lambda(\zeta_0)} S(\zeta_0)(T - \Theta_1) - \frac{d\zeta_0}{ds} \frac{\partial T}{\partial s}; \quad (3)$$

$$2) \text{ при } \zeta = \zeta_q: \frac{\partial T}{\partial \zeta} = -\frac{\alpha_2}{\lambda(\zeta_q)} S(\zeta_q)(T - \Theta_2) + \frac{d\zeta_q}{ds} \frac{\partial T}{\partial s}; \quad (4)$$

$$3) \text{ при } s = s_0: \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\alpha_3}{\lambda} (T - \Theta_3); \quad (5)$$

$$4) \text{ при } s = s_n: \frac{\partial T}{\partial s} = -\frac{\alpha_4}{\lambda} (T - \Theta_4), \quad (6)$$

где $S(\zeta) = \sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2}$; $\Theta_i = \Theta_i(s, \zeta, t)$, $\alpha_i = \alpha_i(s, \zeta, t)$ ($i = 1, \dots, 4$) – температуры омывающих оболочку сред и коэффициенты теплоотдачи.

Условия контакта p -го и $(p+1)$ -го смежных слоев имеют вид

$$T^{(p)} = T^{(p+1)}; \quad \lambda^{(p)} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^{(p)} = \lambda^{(p+1)} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^{(p+1)}, \quad (7)$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности контакта $\zeta = \zeta_c$. Производная $\frac{\partial T}{\partial n}$ представляется в виде [8]

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \text{grad}T \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial T}{\partial s} \vec{e}_s + \frac{\partial T}{\partial \zeta} \vec{e}_\zeta \right) \cdot \vec{n}, \quad (8)$$

где \vec{e}_s, \vec{e}_ζ – единичные векторы касательной и нормали к координатной поверхности $\zeta = 0$. Вектор \vec{n} представляется в виде [8]

$$\vec{n} = \frac{1}{S(\zeta_c)} \left(\vec{e}_\zeta - \frac{\partial \zeta_c}{\partial s} \vec{e}_s \right), \quad (9)$$

тогда из (8) получим

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1}{S(\zeta_c)} \left(\frac{\partial T}{\partial \zeta} - \frac{d\zeta_c}{ds} \frac{\partial T}{\partial s} \right). \quad (10)$$

Метод рішення. Рішення уравнения (1) будем искать с использованием МКР и явной разностной схемы по времени. Для этого на меридиональное сечение каждого звена нанесем равномерную сетку вдоль меридиана и по толщине отдельного слоя.

Узлы по координате s обозначим индексом i $\left(i = 1, \dots, n; n = \sum_l n_l \right)$, а по координате ζ –

индексом j $\left(j = 1, \dots, k; k = \sum_p k_p \right)$, где n_l и k_p – количество узлов разбивки вдоль меридиана l -го звена и толщине p -го слоя. Шаги по соответствующим координатам обозначим через Δs_l и $\Delta \zeta_{pi}$.

Производную по времени в (1) представим в виде $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}$, тогда

$$\tilde{T} = T(t + \Delta t) = T(t) + a\Delta t \left[F^{(s)}(t) + F^{(\zeta)}(t) \right] \quad (11)$$

Производные в равенствах (2) будем аппроксимировать конечными разностями второго порядка точности. Операторы $F^{(s)}$ и $F^{(\zeta)}$ внутри каждого слоя (за исключением точек контакта смежных слоев, точек контакта смежных звеньев и граничных точек) представим в виде

$$F_{i,j}^{(s)} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta s_l^2} + \left(\frac{1}{\lambda_{i,j}} \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i-1,j}}{2\Delta s_l} + \rho_i \right) \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta s_l}; \quad (12)$$

$$F_{i,j}^{(\zeta)} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta \zeta_{pi}^2} + \left(\frac{1}{\lambda_{i,j}} \frac{\lambda_{i,j+1} - \lambda_{i,j-1}}{2\Delta \zeta_{pi}} + k_i \right) \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta \zeta_{pi}}. \quad (13)$$

В сечении сопряжения l -го и $(l+1)$ -го звеньев оператор $F^{(s)}$ представляется в виде

$$F_{n_l,j}^{(s)} = 2 \frac{\left(T_{2,j}^{(l+1)} - T_{n_l,j}^{(l)} \right) \Delta s_l - \left(T_{n_l,j}^{(l)} - T_{n_l-1,j}^{(l)} \right) \Delta s_{l+1}}{\Delta s_l \Delta s_{l+1} (\Delta s_l + \Delta s_{l+1})} + \left(\frac{1}{\lambda_{n_l,j}^{(l)}} \frac{\lambda_{2,j}^{(l+1)} - \lambda_{n_l-1,j}^{(l)}}{\Delta s_l + \Delta s_{l+1}} - \frac{\rho_{n_l}^{(l)} + \rho_1^{(l+1)}}{2} \right) \frac{T_{2,j}^{(l+1)} - T_{n_l-1,j}^{(l)}}{\Delta s_l + \Delta s_{l+1}}, \quad (14)$$

при этом $T_{1,j}^{(l+1)} = T_{n_l,j}^{(l)}$, а оператор $F_{n_l,j}^{(\zeta)}$ определяется равенством (13) при $i = n_l$;

$$k_i = 0,5 \left(k_{n_l}^{(l)} + k_1^{(l+1)} \right).$$

На границе оболочки за исключением угловых точек $(i = 1, j = 1)$, $(i = 1, j = k)$, $(i = n, j = 1)$, $(i = n, j = k)$ операторы $F^{(s)}$ и $F^{(\zeta)}$ имеют вид:

1) при $\zeta = \zeta_0$: $F_{i,1}^{(s)}$ – определяется равенством (12) при $j = 1$;

$$F_{i,1}^{(\zeta)} = \frac{T_{i,2} - 2T_{i,1} + T_{i,0}}{\Delta\zeta_{1i}^2} + \left(\frac{1}{\lambda_{i,1}} \frac{-3\lambda_{i,1} + 4\lambda_{i,2} - \lambda_{i,3}}{2\Delta\zeta_{1i}} + k_i \right) \frac{T_{i,2} - T_{i,0}}{2\Delta\zeta_{1i}}; \quad (15)$$

2) при $\zeta = \zeta_q$: $F_{i,k}^{(s)}$ – определяется равенством (12) при $j = k$;

$$F_{i,k}^{(\zeta)} = \frac{T_{i,k+1} - 2T_{i,k} + T_{i,k-1}}{\Delta\zeta_{qi}^2} + \left(\frac{1}{\lambda_{i,k}} \frac{\lambda_{i,k-2} - 4\lambda_{i,k-1} + 3\lambda_{i,k}}{2\Delta\zeta_{qi}} + k_i \right) \frac{T_{i,k+1} - T_{i,k-1}}{2\Delta\zeta_{qi}}; \quad (16)$$

3) при $s = s_0$:

$$F_{1,j}^{(s)} = \frac{T_{2,j} - 2T_{1,j} + T_{0,j}}{\Delta s_1^2} + \left(\frac{1}{\lambda_{1,j}} \frac{-3\lambda_{1,j} + 4\lambda_{2,j} - \lambda_{3,j}}{2\Delta s_1} + \rho_1 \right) \frac{T_{2,j} - T_{0,j}}{2\Delta s_1}; \quad (17)$$

$F_{1,j}^{(\zeta)}$ – определяется равенством (13) при $i = 1$;

4) при $s = s_n$:

$$F_{n,j}^{(s)} = \frac{T_{n+1,j} - 2T_{n,j} + T_{n-1,j}}{\Delta s_m^2} + \left(\frac{1}{\lambda_{n,j}} \frac{\lambda_{n-2,j} - 4\lambda_{n-1,j} + 3\lambda_{n,j}}{2\Delta s_m} + \rho_n \right) \frac{T_{n+1,j} - T_{n-1,j}}{2\Delta s_m}; \quad (18)$$

$F_{n,j}^{(\zeta)}$ – определяется равенством (13) при $i = n$.

В угловых точках операторы $F^{(s)}$ и $F^{(\zeta)}$ определяются номерами формул, приведенными в табл. 1

Таблица 1

Точка	$F^{(s)}$	$F^{(\zeta)}$
(1,1)	(17) при $j = 1$	(15) при $i = 1$
(1,k)	(17) при $j = k$	(16) при $i = 1$
(n,1)	(18) при $j = 1$	(15) при $i = n$
(n,k)	(18) при $j = k$	(16) при $i = n$

Из граничных условий (3) – (6) получим значения температуры в законтурных точках

$$1) \text{ при } \zeta = \zeta_0: T_{i,0} = T_{i,2} - 2\Delta\zeta_{1i} \left[\frac{\alpha_{1i}}{\lambda_{i,1}} S(\zeta_0) (T_{i,1} - \Theta_{1i}) - \frac{d\zeta_0}{ds} \frac{T_{i+1,1} - T_{i-1,1}}{2\Delta s_l} \right]; \quad (19)$$

$$2) \text{ при } \zeta = \zeta_q: T_{i,k+1} = T_{i,k-1} - 2\Delta\zeta_{qi} \left[\frac{\alpha_{2i}}{\lambda_{i,k}} S(\zeta_q) (T_{i,k} - \Theta_{2i}) - \frac{d\zeta_q}{ds} \frac{T_{i+1,k} - T_{i-1,k}}{2\Delta s_l} \right]; \quad (20)$$

$$3) \text{ при } s = s_0: T_{0,j} = T_{2,j} - 2\Delta s_1 \frac{\alpha_{3j}}{\lambda_{1,j}} (T_{1,j} - \Theta_{3j}); \quad (21)$$

$$4) \text{ при } s = s_n: T_{n+1,j} = T_{n-1,j} - 2\Delta s_m \frac{\alpha_{4j}}{\lambda_{n,j}} (T_{n,j} - \Theta_{4j}). \quad (22)$$

На линии сопряжения l -го и $(l+1)$ -го звеньев производные $\frac{d\zeta_0}{ds}$ и $\frac{d\zeta_q}{ds}$ могут иметь разрыв. Поэтому величины (19), (20) будем вычислять для каждого звена, а затем усреднять.

Условия контакта (7) позволяют найти температуру на границе контакта p -го и $(p+1)$ -го слоев. Обозначим температуру в точке контакта $T_{i,c} = T_{i,k_p}^{(p)} = T_{i,1}^{(p+1)}$, тогда из (7), (10) получим

$$\tilde{T}_{i,c} = \frac{\frac{\lambda_{i,1}^{(p+1)}}{\Delta\zeta_i^{(p+1)}} \left(4\tilde{T}_{i,2}^{(p+1)} - \tilde{T}_{i,3}^{(p+1)} \right) + \frac{\lambda_{i,k_p}^{(p)}}{\Delta\zeta_i^{(p)}} \left(4\tilde{T}_{i,k_p-1}^{(p)} - \tilde{T}_{i,k_p-2}^{(p)} \right) - 2A_i}{3 \left(\frac{\lambda_{i,1}^{(p+1)}}{\Delta\zeta_i^{(p+1)}} + \frac{\lambda_{i,k_p}^{(p)}}{\Delta\zeta_i^{(p)}} \right)}, \quad (23)$$

$$\text{где } A_i = \frac{d\zeta_c}{ds} \frac{\tilde{T}_{i+1,c} - \tilde{T}_{i-1,c}}{2\Delta s_i} \left(\lambda_{i,1}^{(p+1)} - \lambda_{i,k_p}^{(p)} \right).$$

Равенства (1) – (23) позволяют в итерационном процессе найти распределение температуры в слоистой оболочке в произвольный момент времени $t + \Delta t$. Алгоритм решения задачи состоит в следующем. Пусть в момент t известно распределение температуры $T(s, \zeta, t)$. Сначала в соответствии с (19) – (22) определяются значения температуры в законтурных точках. Далее вычисляются значения операторов (12) – (18) внутри каждого слоя и на границе оболочки. Затем по формуле (23) определяются значения температуры в точках контакта смежных слоев. И, наконец, по формуле (11) определяются значения температура \tilde{T} в каждой точке принятого разбиения оболочки.

Как известно, использование явной разностной схемы по времени накладывает ограничения сверху на шаг Δt . Для получения устойчивых результатов по приведенным выше формулам необходимо выполнение условия положительности коэффициента при $T_{i,j}$ в правой части уравнения (11) после подстановки в него условий (19) – (22) для граничных точек [9]. Это приводит к следующему ограничению на шаг по времени

$$\Delta t < \min(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4); \quad (24)$$

$$\tau_1 = a_{i,1}^{-1} \left[\frac{2}{\Delta s_l^2} + \frac{2}{\Delta \zeta_1^2} + \frac{\alpha_{1i}}{\lambda_{i,1}} S_l(\zeta_0) \left(\frac{7\lambda_{i,1} - 4\lambda_{i,2} + \lambda_{i,3}}{2\Delta \zeta_1 \lambda_{i,1}} - k_i \right) \right]^{-1}; \quad (25)$$

$$\tau_2 = a_{i,k}^{-1} \left[\frac{2}{\Delta s_l^2} + \frac{2}{\Delta \zeta_q^2} + \frac{\alpha_{2i}}{\lambda_{i,k}} S_l(\zeta_N) \left(\frac{7\lambda_{i,k} - 4\lambda_{i,k-1} + \lambda_{i,k-2}}{2\Delta \zeta_q \lambda_{i,k}} + k_i \right) \right]^{-1}; \quad (26)$$

$$\tau_3 = a_{1,j}^{-1} \left[\frac{2}{\Delta s_1^2} + \frac{2}{\Delta \zeta_p^2} + \frac{\alpha_{3j}}{\lambda_{1,j}} \left(\frac{7\lambda_{1,j} - 4\lambda_{2,j} + \lambda_{3,j}}{2\Delta s_1 \lambda_{1,j}} - \rho_1 \right) \right]^{-1}; \quad (27)$$

$$\tau_4 = a_{n,j}^{-1} \left[\frac{2}{\Delta s_m^2} + \frac{2}{\Delta \zeta_p^2} + \frac{\alpha_{4j}}{\lambda_{n,j}} \left(\frac{7\lambda_{n,j} - 4\lambda_{n-1,j} + \lambda_{n-2,j}}{2\Delta s_m \lambda_{n,j}} + \rho_n \right) \right]^{-1}. \quad (28)$$

Условие (24) является необходимым, но не достаточным. Для получения более точных результатов шаг Δt (как и шаги Δs , $\Delta \zeta$) нужно варьировать.

Численные результаты. В качестве тестового примера определим температурное поле двухслойной цилиндрической оболочки со слоями линейно-переменной толщины. Результаты сопоставим с решением по методу конечных элементов (МКЭ) в осесимметричной пространственной постановке, полученным по методике, изложенной в работе [10]. Геометрические размеры оболочки следующие: радиус срединной поверхности $r=20$ см; длина образующей $L=10$ см; толщины слоев $h_1(s_0) = h_2(s_0) = 1$ см; $h_1(s_n) = h_2(s_n) = 0,5$ см. Начальная температура $T_0 = 20$ С. Коэффициенты теплоотдачи и температуры омывающих оболочку сред $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = 0,3 \frac{\text{кал}}{\text{с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{С}}$, $\Theta_1 = 600$, $\Theta_2 = 200$ С. На торцах оболочки температура и коэффициенты теплоотдачи по толщине меняются по линейному закону.

Коэффициенты теплопроводности $\lambda \left[\frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{С}} \right]$ и температуропроводности $a \left[\frac{\text{см}^2}{\text{с}} \right]$ линейно зависят от температуры. Их значения для двух значений температуры приведены в табл. 2.

Таблица 2

	$T=0$	$T=1000\text{С}$
λ_1	0,282	0,206
λ_2	0,141	0,103
a_1	0,405	0,286
a_2	0,2025	0,143

При решении задачи по предложенной методике количество узлов разбиения вдоль меридиана принималось $n=201$, а по толщине каждого слоя $k_1 = k_2 = 11$. При использовании МКЭ меридиональное сечение оболочки аппроксимировалось четырехугольниками, каждый из которых диагоналями делился на четыре треугольных конечных элемента с линейным распределением температуры внутри каждого из них. В итоге меридиональное сечение оболочки покрывалось сеткой, состоящей из $K_e = 2000$ конечных элементов и $K_u = 1061$ узловых точек.

В результате решения задачи установлено, что температурное поле оболочки практически устанавливается к моменту времени $t=30$ с. Некоторые результаты расчета приведены на рис. 1 – 4, на которых сплошными линиями показаны результаты, полученные по МКР, а точками – по МКЭ. На рис. 1 – 3 изображены графики изменения температуры на внутренней (кривая 1), срединной (кривая 2) и наружной (кривая 3) поверхностях оболочки в моменты времени $t=0,5$ с (рис. 1), $t=1$ с (рис. 2) и

$t=5\text{с}$ (рис. 3). На рис. 4 приведены графики изменения температуры по толщине h оболочки вдоль относительной координаты $\zeta^* = \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{h}$ в сечении $s=5\text{см}$. Кривые 1 – 4 соответствуют моментам времени $t=0,5; 1; 5; 10\text{с}$. Из приведенных рисунков видно, что, в начальные моменты времени распределение температуры по толщине далеко от линейного. Несмотря на то, что рассматриваемая оболочка не тонкая $\left(\frac{h(s_0)}{r} = 0,1\right)$, результаты расчета по МКР и МКЭ практически совпали. Это свидетельствует о высокой точности разработанной методики.

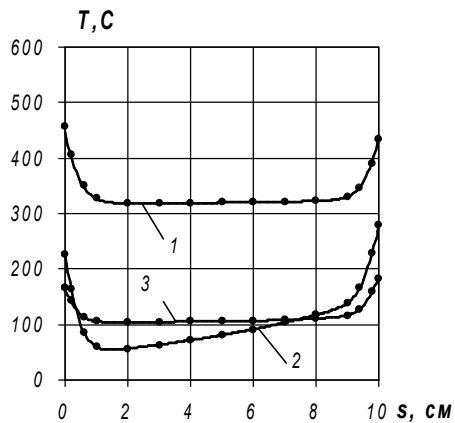


Рис. 1

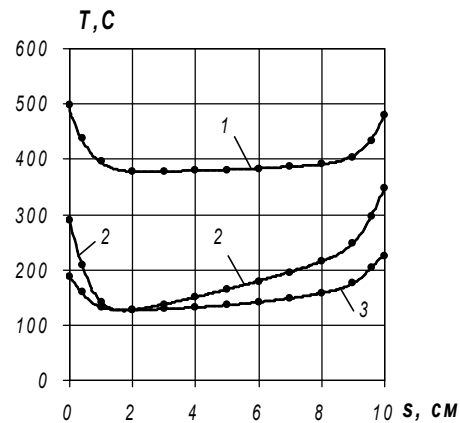


Рис. 2

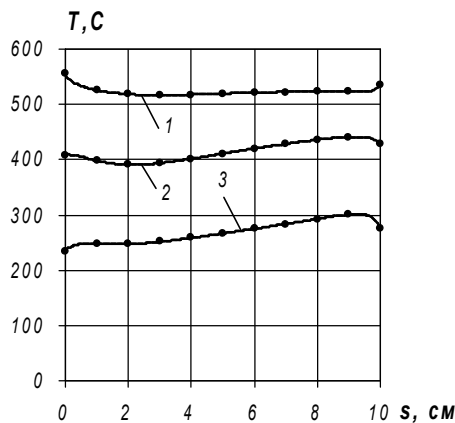


Рис. 3

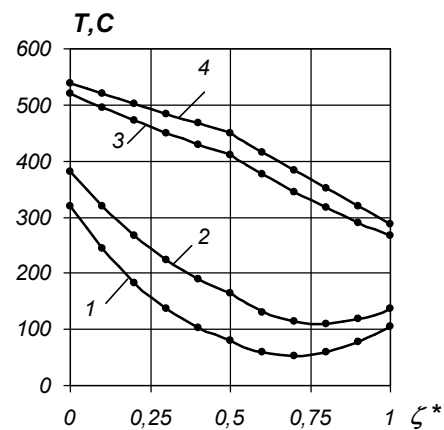


Рис. 4

Во втором примере определим температурное поле двухслойной оболочки, координатный меридиан которой изображен на рис. 5. Геометрические размеры имеют следующие значения: $R=14\text{см}$, $r=4\text{см}$; толщина внутреннего слоя $h_1=0,4\text{см}$, наружного $h_2=0,2\text{см}$. Оболочка состоит из цилиндрического звена с длиной образующей $L = \frac{r\pi}{2}$ и двух тороидальных звеньев, каждое из которых имеет длину дуги L . Звенья обозначены на рисунке римскими цифрами I – III и плавно соединены между собою без разрыва производной $\frac{d\theta}{ds}$. Температуры окружающей среды $\Theta_1=350$,

$\Theta_2 = 20\text{C}$. Начальная температура $T_0 = 20\text{C}$. Коэффициент теплоотдачи α_1 линейно меняется вдоль меридиана оболочки, принимая на границах звеньев следующие значения: $\alpha_1 = 0,01; 0,01; 0,009; 0,008$. Коэффициент $\alpha_2 = 0,0001$ (здесь принята та же система единиц, что и в предыдущем примере). Торцы s_0 и s_n теплоизолированы ($\alpha_3 = \alpha_4 = 0$).

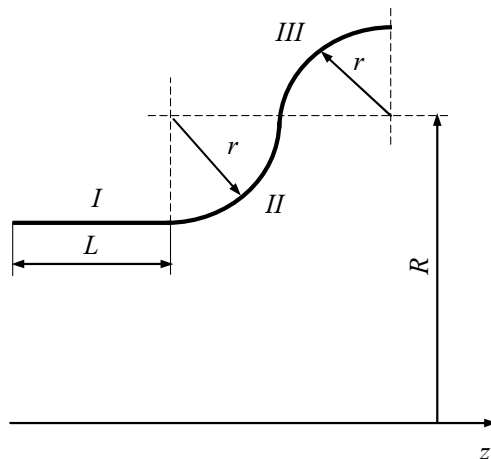


Рис. 5

Материал внутреннего слоя – сталь 12Х1МФ [11], коэффициент температуропроводности которого для значений температуры $T = 0; 200; 400\text{C}$ принимает значения $a_1 = 0,1225; 0,1233; 0,1131$. Коэффициент теплопроводности принят независимым от температуры $\lambda_1 = 0,1051$. Материал наружного слоя – Изоллат-4 [12], теплофизические характеристики которого определяются значениями $a_2 = 0,0812; \lambda_2 = 4,78 \cdot 10^{-6}$. При решении задачи количество узлов разбиения вдоль меридиана каждого звена принималось $n_l = 201$, а по толщине слоев $k_1 = 11, k_2 = 6$.

В результате решения задачи установлено, что в каждом слое оболочки распределение температуры по толщине близко к линейному и во времени этот характер не меняется. Температура устанавливается к моменту времени $t = 300\text{c}$. Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 6, 7.

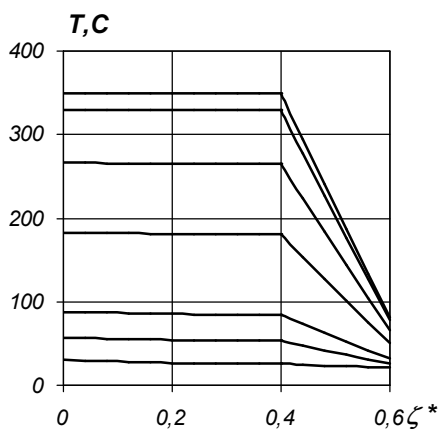


Рис. 6

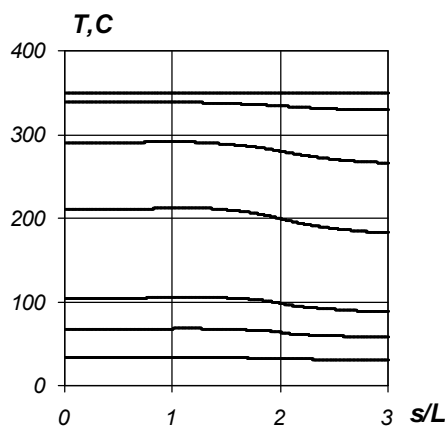


Рис. 7

На рис. 6 показаны графики изменения температуры вдоль координаты $\zeta^* = \zeta + h_1$ в сечении $s = s_n$. Возрастающие линии на рисунке соответствуют моментам времени $t=1; 5; 10; 30; 60; 120; 300$ с. На рис. 7 для тех же моментов времени изображены графики изменения температуры вдоль меридиана оболочки при $\zeta^* = 0$. Из рисунка видно, что при $t=300$ с температура практически не меняется вдоль меридиана.

Выводы. Таким образом, в настоящей статье разработана методика определения осесимметричных нестационарных температурных полей в тонких слоистых оболочках вращения со слоями переменной толщины. Учитывается зависимость теплофизических свойств материала от температуры. В основу методики положен метод конечных разностей и явная разностная схема по времени. Эффективность методики подтверждается решением тестового примера. Для иллюстрации определено температурное поле гофрированной оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков: Міськдрук, 2011. – 376с.
2. Конюхов А.В. Определение температурных полей в слоистых оболочках и пластинах с учетом дефектов межслоевых контактов. – Казань, 1996. – 11с. – Деп. в ВИНТИ 10.01.96, № 74-В96.
3. Пискунов В.Г., Сипетов В.С. Уточненная модель распределения температурного поля для решения задач термоупругости слоистых систем // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1987. – №5. – С. 49 – 52.
4. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 376с.
5. Чибириков В.К. Об уравнениях теплопроводности для пластин при конвективном теплообмене с боковых поверхностей // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1971. – Вып. 15. – С. 60 – 64.
6. Панкратова Н.Д., Рассказов А.О., Бондарь А.Г., Бондарский А.Г. К расчету термонапряженного состояния податливых на сдвиг многослойных ортотропных оболочек и пластин // Прикл. механика – 1987. – **23**, №7. – С. 55 – 61.
7. Бондарь А.Г. Термоупругое равновесие многослойных ортотропных оболочек // Механика композитных материалов. – 1988. – №4. – С. 691 – 697.
8. Шевченко Ю.Н., Прохоренко И.В. Теория упругопластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. – Киев: Наук. думка, 1981. – 296с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.3).
9. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 418с.
10. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Пискун В.В., Савченко В.Г. Пространственные задачи термопластичности. – Киев: Наук. думка, 1980 – 262с.
11. http://www.splav.kharkov.com/mat_start.php?name_id=3.
12. <http://www.penetrion.odessa.ua/catalogue/14>
13. Шевченко Ю.Н., Стеблянюк П.А. Вычислительные методы в стационарных и нестационарных задачах теории термопластичности/ Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць.- Випуск 18.- Дніпропетровськ, 2012.- С. 211-226.