4.Савченко В.Г. Численное исследование неосесимметричного деформирования тел вращения с учетом вида напряженного состояния// Регіональний міжвузівський збірник "Системні технології", вип. 4(51), Дніпропетровськ, 2007, с.59-64.

5.Савченко В.Г. Метод исследования неосесимметричного неупругого деформирования тел вращения с учетом вида напряженного состоянии//Прикл. механика.-2008, № 44(54), № 9-с.26-35.

6. Механика композитов: В 12-ти т. / Под общ. ред. А.Н.Гузя. Т.11. Численные методы / Я.М.Григоренко, Ю.Н.Шевченко,…, В.Г.Савченко и др. – К.: «А.С.К.», 2002. – 448с.

7. Успехи механики: В 6-ти томах. / Под общей редакцией А.Н. Гузя. Т.1.- Киев: "АСК", 2005.-776с. Савченко В.Г., Шевченко Ю.Н. Пространственные задачи термовязкопластичности. С.625-660.

УДК 539.3

САВЧЕНКО В.Г., д-р техн.наук, профессор

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

О СПОСОБАХ ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦЫ ПОДАТЛИВОСТЕЙ ДЛЯ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Исследовано влияние способа построения матрицы податливостей в задачах термоупругости для тел вращения из разномодульных композитных ортотропных материалов на результаты решения краевой задачи.

Influence of the construction ways of a compliance matrix in thermoelasticity problems for solid of revolutions from composite orthotropic materials with different moduli on results of the decision of a boundary value problem is investigated.

Введение. Анализ поведения композитных материалов показывает, что наряду с анизотропией эти материалы обладают разномодульностью, т.е. при растягивающих или сжимающих нагрузках их механические характеристики различные [1,2]. Так для эпоксидной смолы, армированной однонаправленными стекловолокнами, модули при сжатии на 20-25% меньше модулей при растяжении, в то время как для композита, состоящего из эпоксидной смолы со слоями однонаправленных волокон бора, модули при сжатии примерно на 15-20% больше модулей при растяжении. С другой стороны для композита из эпоксидной смолы, армированной слоями однонаправленных углеродных волокон, модули при растяжении могут превышать модули при сжатии на 40% и больше. У других волокнистых композитов, таких как материалы из углерода, армированного углеродными волокнами, модули при растяжении в 2-5 раз больше модулей при сжатии. Для зернистых композитов наблюдается аналогичная картина. Поэтому для оценки прочности элементов конструкций из них необходимо в расчетах учитывать не толька анизотропию механических свойств материала, но и различие его прочностных характеристик в зависимости от вида напряженного состояния.

Постановка задачи. Исследуем в цилиндрической системе координат z,r,φ напряженное состояние неравномерно нагретых составных тел вращения, состоящих из разномодульных при растяжении и сжатии упругих прямолинейно ортотропных материалов, при нагружении объемными $\vec{K}(K_z, K_r, K_\varphi)$ и поверхностными $\vec{t}_n(t_{nz}, t_{nr}, t_{n\varphi})$ силами. В качестве ортотропных материалов рассмотрим материалы, в которых главные оси анизотропии теплофизических и механических характеристик совпадают с направлениями осей декартовой системы координат, одна из осей которой совпадает с осью вращения тела. Для такого материала связь между компонентами деформаций и напряжений можно записать следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^T \\ \varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^T \\ \ldots\ldots \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_1} & -\dfrac{\nu_{21}}{E_2} & -\dfrac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\nu_{12}}{E_1} & \dfrac{1}{E_2} & -\dfrac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2G_{23}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \ldots.. \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}, \qquad (1)$$

где E_i - модуль упругости в направлении главных осей анизотропии, совпадающих с выбранной системой координат; G_{ij} – модуль сдвига в соответствующей координатной плоскости; ν_{ij} – коэффициент Пуассона, характеризующей сжатие элемента в направлении X_j при растяжении его в направлении X_i; $\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ii}^T (T - T_0)$, α_{ii}^T – коэффициент линейного теплового расширения материала вдоль соответствующего главного направления анизотропии. Здесь X_i обозначает декартовую систему координат z, x, y.

Известно, что в случае разномодульности материала матрица податливости, связывающая компоненты деформаций с компонентами напряжений, является несимметричной. Для пребразования несимметричной матрицы податливости в симметричную матрицу предполагается воспользоваться следующими способами.

1. Путем оценки знака среднего напряжения, т.е. первого инварианта компонентов напряжений в окрестности рассматриваемой точки. При этом в зависимости от знака этой величины используются механические характеристики материала, полученные или при растяжении или при сжатии соответствующих образцов.

2. Путем использования угла вида напряженного состояния [3], который определяется через отношение третьего и второго инвариантов девиатора напряжений.

3. С помощью весовых коэффициентов [4], характеризующих вклад конкретных компонентов напряжений в главных осях анизотропии в коэффициенты матрицы податливости.

Разрешив систему уравнений (3.11) с уже симметричной матрицей податливостей относительно компонентов напряжений, получим выражение для напряжений через компоненты деформаций в главных осях анизотропии механических характеристик материала, т.е. в декартовой системе координат z,x,y. Если теперь перейти по известным формулам преобразования от декартовой системы координат к цилиндрической, связь между компонентами напряжений и деформаций для таких материалов можно записать в виде [1,2]:

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{T}), \quad (i,j,k,l = z,r,\varphi) \tag{2}$$

Эти соотношения запишем в виде закона Гука для однородного материала. Для этого коэффициенты A_{ijkl} представим в виде $A_{ijkl} = A_{ijkl}^{0}(1-\omega_{ijkl})$, где A_{ijkl}^{0} – некоторые независимые от температуры осредненные значения соответствующих коэффициентов, а $A_{ijkl}^{0}\omega_{ijkl}$ – функции, характеризующие изменение A_{ijkl} и учитывающие их зависимость от температуры и разномодульность материала. Тогда они примут следующий вид:

$$\sigma_{ij} = A^{0}{}_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \sigma_{ij}^{*} \quad (i,j,k,l = z,r,\varphi). \tag{3}$$

Дополнительные слагаемые σ_{ij}^{*} учитывают тепловую деформацию, зависимость механических характеристик от температуры и вида напряженного состояния. Их выражения приведены в работах [1,2].

Поскольку свойства материала зависят от напряженного состояния, и наоборот, задача определения напряженно-деформированного состояния является задачей с неизвестными механическими характеристиками. Однако от этой неопределенности можно избавиться, воспользовавшись следующей итерационной процедурой. Сначала перемещения и напряжения определяются в цилиндрической системе координат с первоначально заданными в декартовой системе координат свойствами (например, средними значениями коэффициентов Пуассона и модулей при растяжении и сжатии). Затем определяются в декартовой системе координат соответствующие новые свойства материала с учетом знака напряжений, вычисленных на предыдущем шаге, и процесс вычислений повторяется, пока не будет достигнута требуемая точность.

При решении сформулированной задачи за основные неизвестные выберем компоненты перемещения u_z, u_r, u_φ и для их определения воспользуемся соответствующим вариационным уравнением Лагранжа [5]. Присоединив к вариационному уравнению Лагранжа соотношения Коши, кинематические граничные и начальные условия, получим полную систему уравнений, которая вместе с (3) позволяет поэтапно проследить весь процесс деформирования тела и определить перемещение, деформацию и напряжение.

Дискретизация вариационного уравнения непосредственно с использованием трехмерных конечных элементов является очень трудоемким. Существенно повысить эффективность метода конечных элементов при решении трехмерных задач для тел вращения позволяет полуаналитический метод конечных элементов, сводящий исходную трехмерную задачу к ряду двумерных в меридиональном сечении тела. Методика построения решения неосесимметричной задачи термоупругости с использованием соответствующего вариационного уравнения и полуаналитического метода конечных элементов при записи определяющих уравнений в форме закона Гука (3) для однородного материала подробно описана в работе [5] и здесь не приводится.

Результаты решения задачи. Была проведена оценка влияния различных способов преобразования несимметричной матрицы податливости (1) в симметричную при исследовании напряженного и деформированного состояния тел вращения из прямолинейно ортотропных упруго деформирующихся материалов. В качестве материала выбран композит углеродное волокно-углерод AVCO Mod3a [6] со следующими независящими от температуры механическими характеристиками:

$$E_z^{+} = 9.24 \cdot 10^4\, МПа, \qquad E_x^{+} = E_y^{+} = 1.17 \cdot 10^4\, МПа;$$

$$G_{zx}^{+} = G_{zy}^{+} = 0.2685 \cdot 10^4\, МПа; \qquad G_{xy}^{+} = 0.3989 \cdot 10^4\, МПа;$$

$$\nu_{zx}^{+} = \nu_{zy}^{+} = 0.395, \quad \nu_{xy}^{+} = 0.11;$$

$$E_z^{-} = 1.65 \cdot 10^4\, МПа, \quad E_x^{-} = E_y^{-} = 1.03 \cdot 10^4\, МПа;$$

$$G_{zx}^{-} = G_{zy}^{-} = 0.1734 \cdot 10^4\, МПа; \qquad G_{xy}^{-} = 0.3596 \cdot 10^4\, МПа;$$

$$\nu_{zx}^{-} = \nu_{zy}^{-} = 0.395, \quad \nu_{xy}^{-} = 0.11.$$

При вычислении тепловой деформации предполагалось, что $\alpha_{zz}^T = \alpha_{rr}^T = \alpha_{\varphi\varphi}^T = 1 \cdot 10^{-5} 1/K$

Было вычислено напряженное состояние сплошной тонкой прямолинейно ортотропной круглой пластинки, температура которой изменяется по радиусу по квадратичному закону $T(r) = T_0 + T_1\left(\dfrac{r^2}{R^2}\right)$ при T_1=450. При таком нагреве пластинки со свойствами материала одинаковыми при растяжении и сжатии в ней реализуется осесимметричное напряженное состояние, которое в цилиндрической системе координат определяется соотношениями [7]

$$\sigma_{rr} = \beta \frac{E_x \alpha_{xx}^T T_1}{\left(1 - \nu_{xy}\right)}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \beta \frac{E_x \alpha_{xx}^T T_1}{1 - \nu_{xy}}\left(1 - \frac{3r^2}{R^2}\right), \tag{4}$$

$$\beta = \left(1 - \nu_{xy}\right) / \left(3 - \nu_{xy} + \frac{E_x}{2G_{xy}}\right). \tag{5}$$

Расчеты были выполнены при значении радиуса $R = 0{,}3$ м и толщине 0,005м. Были проведены вычисления напряженного состояния и сравнение полученных результатов в следующих случаях:

- два расчета для случая, когда свойства материала одинаковы при растяжении и сжатии и равны или свойствам при растяжении (E_{ij}^{+}) или при сжатии (E_{ij}^{-});

- три варианта расчета для случая, когда материал диска разномодульный:

вариант 1 - его свойства определяются знаком первого инварианта тензора напряжений;

вариант 2 - его свойства определяются параметром вида напряженного состояния [3];

вариант 3 - его свойства определяются с помощью весовых коэффициентов, учитывающих знаки компонентов напряжений (4).

Анализ результатов расчетов, выполненных с использованием свойств материала только при растяжении, или только при сжатии отличаются между собой более чем на 15%, оставаясь постоянными в окружном направлении. При этом точные значения напряжений, вычисленные по формулам (4), (5), полностью совпадает с соответствующими результатами, полученными по предложенной методике. Учет в расчетах разномодульности материала приводит к изменению окружных напряжений до 10%. При этом результаты расчета в первом и втором вариантах отличаются между собой мало. Иная картина наблюдается для осевых напряжений. Если в первом и втором вариантах расчетов осевые напряжения равны нулю для всех значений радиуса и окружной координаты, то в третьем варианте расчета при приближении к контуру пластинки они появляются и достигают значений по абсолютной величине равных значениям окружных напряжений. Это происходит за счет того, что в третьем варианте расчета для определения свойств материала учитываются знаки соответствующих компонентов напряжений (а напряжения $\sigma_{r\varphi}$ знакопеременные в окружном направлении). Это приводит к тому, что диск оказывается составным в окружном направлении из материалов с различными свойствами.

Таблица 1 – Распределение напряжений в неравномерно нагретой пластинке

r, см.	E_{ij}^{+}		E_{ij}^{-}		φ, Град.	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
	σ_{rr}	$\sigma_{\varphi\varphi}$	σ_{rr}	$\sigma_{\varphi\varphi}$		σ_{rr}	$\sigma_{\varphi\varphi}$	σ_{rr}	$\sigma_{\varphi\varphi}$	σ_{rr}	$\sigma_{\varphi\varphi}$
2,5	144	142	128	126	0	140	138	133	131	137	136
					15	140	138	133	131	138	135
					30	140	138	133	131	138	134
					45	140	138	133	131	139	134
					90	140	138	133	131	138	135
16,5	101	13	90	12	0	97	9	94	13	96	9
					15	97	9	94	14	97	9
					30	97	9	95	15	95	11
					45	97	9	95	15	93	12
					90	97	9	94	13	98	8
29,5	5	-276	4	-244	0	5	-258	4	-255	6	-234
					15	4	-257	4	-255	6	-244
					30	4	-256	4	-254	4	-248
					45	4	-255	4	-254	7	-288
					90	5	-258	4	-255	3	-289

Выводы. Таким образом, учет разномодульности ортотропного материала при исследовании напряженно-деформированого состояния составных тел вращения при предложенных подходах для оценки состояния материала дает при решении задачи по разработанной методике несколько отличающиеся результати. При этом результаты в первом и третьем варианте определения состояния материала в рассматриваемом элементе отличаются между собой меньше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савченко В.Г. Неосесимметричное деформирование тел вращения из упругих ортотропних материалов с разными модулями при растяжении и сжатии// Прикл. механика.- 2005, **41**, N7- С.47-57.

2. Савченко В.Г. Неосесимметричное термонапряженное состяние тел вращения из прямолинейно ортотропных материалов с учетом разномодульности при растяжении и сжатии // Регіональний міжвузівський збірник "Системні технології", вип. 4(57), Днепропетровск, 2008, с.9-14.

3. Савченко В.Г. Метод исследования неосесимметричного неупругого деформирования тел вращения с учетом вида напряженного состояния // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 9. – С.26-35.

4. Jones R.M. Stress – Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression // AIAA Journal. – 1977. -V.15, N 1. – P.16-23.

5. Механика композитов: В 12-ти т. // Под общ. ред. А.Н.Гузя. Т.11. Численные методы / Я.М.Григоренко, Ю.Н.Шевченко, В.Г.Савченко и др. – К.: «А.С.К.», 2002. – 448с.

6. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials // AIAA Journal. – 1980. -V.18, N 8. – P.995 - 1001.

7. Pardoen G.C. Improved structural analysis technique for orthogonal weave carbon-carbon materials // AIAA Jornal.-1975.-Vol.13, N6.-P.756-761.

УДК 539.3

БАБЕШКО М.Е., д-р техн.наук, проф.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ТРЕТЬЕГО ИНВАРИАНТА ДЕВИАТОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Предложена методика численного исследования осесимметричного термовязкоупругопластического напряженно-деформированного состояния тонких оболочек. Использованы определяющие уравнения, описывающие неупругое деформирование изотропных материалов с учетом третього инварианта девиатора напряжений.

The procedure of numerical investigation of the axisymmetric thermoviscoelastoplastic stress-strain state of thin shells is offered. The constitutive equations describing the non-elastic deformation of isotropic material with allowance for the stress deviator third invariant are used.

Введение. Методика решения осесимметричных краевых задач пластичности для оболочек вращения, основанная на использовании определяющих уравнений [1,2], изложена в работах [3,4]. Определяющие уравнения [1,2] обобщены [5] на описание процессов, сопровождающихся возникновением деформаций ползучести. Эти уравнения описывают процессы термовязкопластического деформирования изотропных материалов по траекториям малой кривизны (ТМК) с учетом зависимости их свойств от вида напряженного состояния (ВНС), который в [1,2,5] характеризуется углом ВНС [6] и вычисляется через второй и третий инварианты девиатора напряжений. Эти уравнения связывают компоненты тензоров напряжений и линейных частей деформаций, которые в дальнейшем тексте будем называть деформациями. Они записаны в предположении, что деформации состоят из упругих и неупругих составляющих, а девиаторы напряжений и дифференциалов неупругих деформаций соосны. Уравнения содержат две нелинейные зависимости, вычисляемые по результатам экспериментов. Одна из них выражает связь между первыми инвариантами