3. Савченко В.Г. Метод исследования неосесимметричного неупругого деформирования тел вращения с учетом вида напряженного состояния // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 9. – С.26-35.
4. Jones R.M. Stress – Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression // AIAA Journal. – 1977. -V.15, N 1. – P.16-23.
5. Механика композитов: В 12-ти т. // Под общ. ред. А.Н.Гузя. Т.11. Численные методы / Я.М.Григоренко, Ю.Н.Шевченко, В.Г.Савченко и др. – К.: «А.С.К.», 2002. – 448с.
6. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials // AIAA Journal. – 1980. -V.18, N 8. – P.995 - 1001.
7. Pardoen G.C. Improved structural analysis technique for orthogonal weave carbon-carbon materials // AIAA Jornal.-1975.-Vol.13, N6.-P.756-761.

УДК 539.3

БАБЕШКО М.Е., д-р техн.наук, проф.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ТРЕТЬЕГО ИНВАРИАНТА ДЕВИАТОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Предложена методика численного исследования осесимметричного термовязкоупругопластического напряженно-деформированного состояния тонких оболочек. Использованы определяющие уравнения, описывающие неупругое деформирование изотропных материалов с учетом третього инварианта девиатора напряжений.

The procedure of numerical investigation of the axisymmetric thermoviscoelastoplastic stress-strain state of thin shells is offered. The constitutive equations describing the non-elastic deformation of isotropic material with allowance for the stress deviator third invariant are used.

Введение. Методика решения осесимметричных краевых задач пластичности для оболочек вращения, основанная на использовании определяющих уравнений [1,2], изложена в работах [3,4]. Определяющие уравнения [1,2] обобщены [5] на описание процессов, сопровождающихся возникновением деформаций ползучести. Эти уравнения описывают процессы термовязкопластического деформирования изотропных материалов по траекториям малой кривизны (ТМК) с учетом зависимости их свойств от вида напряженного состояния (ВНС), который в [1,2,5] характеризуется углом ВНС [6] и вычисляется через второй и третий инварианты девиатора напряжений. Эти уравнения связывают компоненты тензоров напряжений и линейных частей деформаций, которые в дальнейшем тексте будем называть деформациями. Они записаны в предположении, что деформации состоят из упругих и неупругих составляющих, а девиаторы напряжений и дифференциалов неупругих деформаций соосны. Уравнения содержат две нелинейные зависимости, вычисляемые по результатам экспериментов. Одна из них выражает связь между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций, а вторая - связь между вторыми инвариантами соответствующих девиаторов. Для конкретизации этих зависимостей используются две серии базовых опытов на пропорциональное нагружение трубчатых образцов при различных постоянных значениях угла ВНС и нескольких значениях температуры. В первой серии проводятся опыты на мгновенное деформирование образцов, т. е. со скоростями нагружения, не влияющими на форму получаемых зависимостей. Во второй серии выполняются опыты на ползучесть, сопряженные с опытами первой серии по скоростям первоначального нагружения. В случае линейной связи между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций и независимости от ВНС связи между вторыми инвариантами соответствующих девиаторов рассматриваемые определяющие уравнения превращаются в широко используемые соотношения теории процессов деформирования по ТМК [7], которые совпадают с традиционными уравнениями теории пластического течения, ассоциированными с условием Мизеса. В развитие [3,4] в данной работе изложен метод решения осесимметричных задач термовязкопластичности для тонких оболочек с учетом зависимости свойств материалов от ВНС и температуры на основе определяющих уравнений [5].

Постановка задачи. Рассмотрим оболочку вращения из изотропного материала, находящуюся в начальный момент времени $t = t_0$ в ненапряженном и недеформированном состоянии при температуре Т = T_0, а затем подвергнутую осесимметричному неравномерному нагреву и воздействию силовых нагрузок, кроме крутящих. Оболочка отнесена к криволинейной ортогональной системе координат s, θ, ς, связанной с недеформированной непрерывной координатной поверхностью, где s ($s_a \le s \le s_b$) и $\theta \left(0 \le \theta \le 2\pi\right)$ - меридиональная и окружная координаты; а ς ($\varsigma_0 \le \varsigma \le \varsigma_l$) - координата, отсчитываемая по нормали к координатной поверхности, в качестве которой может быть выбрана срединная, внутренняя или наружная поверхность оболочки. Температурное поле оболочки предполагается известным. Предполагается, что в процессе нагружения оболочки ее материал деформируется в пределах и за пределами упругости; деформации ползучести соизмеримы с упругими и пластическими составляющими; в областях неупругих деформаций может происходить упругая разгрузка. При формулировке краевой задачи используем подход Коши [1,2], в соответствии с которым все уравнения записываем в вышеприведенной системе координат. Задачу о напряженно-деформированном состоянии (НДС) оболочки будем решать в геометрически линейной квазистатической постановке с использованием гипотез Кирхгофа – Лява. Для описания деформирования материала используем соотношения термовязкопластичности [5] с учетом ВНС, и теории процессов деформирования по ТМК [7], не учитывающей ВНС, линеаризированные методом дополнительных напряжений [7]. Задачу о НДС оболочки будем решать методом последовательных приближений.

Методика и результаты решения задачи. Для решения задачи процесс нагружения необходимо разбить на ряд малых этапов таким образом, чтобы моменты времени, разграничивающие этапы, как можно лучше совпадали с моментами начала разгрузки в элементах оболочки. На каждом этапе используем дифференциальные уравнения равновесия и геометрические соотношения в виде [8], и физические уравнения [5] в виде связи между компонентами тензоров напряжений σ_{ss}, $\sigma_{\theta\theta}$ и деформаций ε_{ss}, $\varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{\varsigma\varsigma}$. Эту связь в произвольной точке оболочки на k - м этапе нагружения представим в форме закона Гука с дополнительными напряжениями

$$\sigma_{ss} = A_{11}\varepsilon_{ss} + A_{12}\varepsilon_{\theta\theta} - A_{1D}, \qquad \sigma_{\theta\theta} = A_{12}\varepsilon_{ss} + A_{22}\varepsilon_{\theta\theta} - A_{2D}, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{\varsigma\varsigma} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\theta\theta}\right) - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\left(e_{ss}^{(n)} + e_{\theta\theta}^{(n)}\right) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_T + \varepsilon_0^{(p)} + \varepsilon_0^{(c)}\right),$$

$$A_{11} = A_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad A_{12} = \nu A_{11}, \tag{2}$$

$$A_{1D} = A_{11}\left[e_{ss}^{(n)} + \nu e_{\theta\theta}^{(n)} + (1+\nu)\left(\varepsilon_T + \varepsilon_0^{(p)} + \varepsilon_0^{(c)}\right)\right],$$

$$A_{2D} = A_{11}\left[e_{\theta\theta}^{(n)} + \nu e_{ss}^{(n)} + (1+\nu)\left(\varepsilon_T + \varepsilon_0^{(p)} + \varepsilon_0^{(c)}\right)\right], \tag{3}$$

где E и ν - зависящие от температуры модуль упругости и коэффициент Пуассона материала, $E = 2G(1+\nu)$, $\varepsilon_T = \alpha_T(T - T_0)$, G - модуль сдвига, α_T - коэффициент линейного теплового расширения материала, $\varepsilon_0^{(p)} = \left(\varepsilon_{ss}^{(p)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(p)} + \varepsilon_{\varsigma\varsigma}^{(p)}\right)/3$, $\varepsilon_0^{(c)} = \left(\varepsilon_{ss}^{(c)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(c)} + \varepsilon_{\varsigma\varsigma}^{(c)}\right)/3$,

$$e_{ss}^{(n)} = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i e_{ss}^{(n)} \quad (s \to \theta). \tag{4}$$

Для определения $\varepsilon_0^{(p)}$ и $\varepsilon_0^{(c)}$ используем зависимость между первыми инвариантами тензоров напряжений $\sigma_0 = \left(\sigma_{ss} + \sigma_{\theta\theta}\right)/3$ и деформаций $\varepsilon_0 = \left(\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varsigma\varsigma}\right)/3$

$$\sigma_0 = F_1\left(\varepsilon_0{}^*, T, \omega_\sigma\right), \tag{5}$$

$$\varepsilon_0^* = \varepsilon_0 - \varepsilon_T - \varepsilon_0^{(c)}, \qquad \varepsilon_0^{(c)} = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \varepsilon_0^{(c)}, \tag{6}$$

$$\omega_\sigma = \frac{1}{3} arc\cos\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{I_3(D_\sigma)}{S^3}\right] \quad \left(0 \le \omega_\sigma \le \frac{\pi}{3}\right); \tag{7}$$

$$\mathrm{S} = \left[\left(\sigma_{ss}{}^2 + \sigma_{\theta\theta}{}^2 - \sigma_{ss}\sigma_{\theta\theta}\right)/3\right]^{1/2}, \tag{8}$$

ω_σ - угол ВНС, $I_3(D_\sigma)$ – третий инвариант девиатора напряжений, S - интенсивность касательных напряжений. Приращение $\Delta_k e_{ss}^{(n)}$ на произвольном k-ом этапе нагружения определяется выражением

$$\Delta_k e_{ss}^{(n)} = \left\langle \frac{2\sigma_{ss} - \sigma_{\theta\theta}}{3S} \right\rangle_k \Delta_k \Gamma^{(n)} \qquad (s \to \theta), \tag{9}$$

где $\Delta_k\Gamma^{(n)}$ - приращение интенсивности неупругих деформаций сдвига,

$$\Delta_k\Gamma^{(n)} = \Delta_k\Gamma^{(p)} + \Delta_k\Gamma^{(c)}, \tag{10}$$

$\Delta_k\Gamma^{(p)}$ и $\Delta_k\Gamma^{(c)}$ - приращения интенсивностей мгновенных пластических деформаций и деформаций ползучести. Угловыми скобками в (9) обозначено среднее за этап значение заключенной в них величины.

Для определения $\Delta_k\Gamma^{(p)}$ используется предположение о существовании зависимости вида

$$S = F_2\left(\Gamma^*, T, \omega_\sigma\right), \tag{11}$$

где Γ^* - интенсивность мгновенных деформаций сдвига,

$$\Gamma^* = \frac{S}{2G} + \Gamma^{(p)}, \quad \Gamma^{(p)} = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \Gamma^{(p)} . \tag{12}$$

Функции F_1 (5) и F_2 (11) вычисляются по результатам первой серии вышеупомянутых базовых опытов, как описано в работах [1,2,5]. Для определения $\Delta_k \varepsilon_0^{(c)}$ и $\Delta_k \Gamma^{(c)}$ используются результаты второй серии базовых опытов на деформирование образцов в условиях ползучести. В [5] предлагается использовать аппроксимирующие выражения вида

$$\dot{\Gamma}^{(c)}(S,T,\omega_\sigma) = \exp\left(c_2 \ln(c_1 S) + c_3 + c_4 T + c_5 \omega_\sigma + c_6 \omega_\sigma{}^2\right), \tag{13}$$

$$\dot{\varepsilon}_0^{(c)}(\sigma_0,T,\omega_\sigma) = \exp\left(d_2 \ln(d_1 \sigma_0) + d_3 + d_4 T + d_5 \omega_\sigma + d_6 \omega_\sigma{}^2\right), \tag{14}$$

где c_i, d_i, $i = 1,...,6$ - числовые коэффициенты, вычисленные из условия наилучшей аппроксимации экпериментальных данных. Тогда

$$\Delta_k \varepsilon_0^{(c)} = \dot{\varepsilon}_0^{(c)} \Delta_k t, \ \Delta_k \Gamma^{(c)} = \dot{\Gamma}^{(c)} \Delta_k t, \quad \Delta_k t = t_k - t_{k-1} . \tag{15}$$

Соотношения (1)-(3) отличаются от аналогичных соотношений [7], не учитывающих ВНС, наличием слагаемых $\varepsilon_0^{(p)}$ и $\varepsilon_0^{(c)}$. В случае, когда F_1 (5) принимается в виде $\sigma_0 = K(\varepsilon_0 - \varepsilon_T)$, $\varepsilon_0^{(p)} = 0$ и $\varepsilon_0^{(c)} = 0$. В случае, когда F_2 (11) не зависит от ВНС и определяется по результатам опытов на одноосное мгновенное растяжение образцов и соответствующим диаграммам ползучести, уравнения (1)-(3) превращаются в соответствующие уравнения [7].

Используем (1) для получения связи между усилиями N_s, N_θ, моментами M_s, M_θ и деформациями $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \kappa_s, \kappa_\theta$ координатной поверхности оболочки. Получим

$$N_s = C_{11}^{(0)} \varepsilon_s + C_{12}^{(0)} \varepsilon_\theta + C_{11}^{(1)} \kappa_s + C_{12}^{(1)} \kappa_\theta - N_{1D}^{(0)},$$

$$N_\theta = C_{12}^{(0)} \varepsilon_s + C_{22}^{(0)} \varepsilon_\theta + C_{12}^{(1)} \kappa_s + C_{22}^{(1)} \kappa_\theta - N_{2D}^{(0)},$$

$$M_s = C_{11}^{(1)} \varepsilon_s + C_{12}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{11}^{(2)} \kappa_s + C_{12}^{(2)} \kappa_\theta - N_{1D}^{(1)}$$

$$M_\theta = C_{12}^{(1)} \varepsilon_s + C_{22}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{12}^{(2)} \kappa_s + C_{22}^{(2)} \kappa_\theta - N_{2D}^{(1)}, \tag{16}$$

где $$C_{mn}^{(j)} = \int_{\varsigma_0}^{\varsigma_l} A_{mn} \varsigma^j d\varsigma, \ N_{mD}^{(j)} = \int_{\varsigma_0}^{\varsigma_l} A_{mD} \varsigma^j d\varsigma \ (m,n = 1,2; \ j = 0,1,2). \tag{17}$$

Соотношения (16) вместе с уравнениями равновесия и геометрическими соотношениями образуют систему 12 уравнений, которая сводится к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{Y}}{ds} = P(s)\vec{Y} + \vec{f}(s) \tag{18}$$

при граничных условиях

$$B_1 \vec{Y}(s_a) = \vec{b}_1, \ B_2 \vec{Y}(s_b) = \vec{b}_2, \tag{19}$$

где $\vec{Y}$ - вектор-столбец разрешающих функций, $\vec{Y} = \{N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s\}$, $P(s)$ – матрица системы, $\vec{f}(s)$ - вектор-столбец дополнительных слагаемых, B_1, B_2 – заданные матрицы, $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ - заданные векторы-столбцы граничных условий. Элементы матрицы $P(s)$ и вектора $\vec{f}(s)$ вычисляются по формулам [3]. Компоненты вектора $\vec{f}(s)$ зависят от неупругих составляющих деформаций, уточняемых в процессе последовательных приближений.

При проведении вычислений для материала оболочки должны быть заданы функции F_1 (5) и F_2 (11) при нескольких значениях температуры и угла ω_σ, коэффициенты выражений (13), (14), а также ν и α_T. На первом этапе удобно выбрать уровень нагрузок так, чтобы оболочка деформировалось в пределах упругости. Тогда в (3) полагаем $e_{ss}^{(n)} = e_{\theta\theta}^{(n)} = 0, \varepsilon_0^{(p)} = \varepsilon_0^{(c)} = 0$ и решаем задачу термоупругости для рассматриваемой оболочки. Получим НДС оболочки на первом этапе. Начиная процесс последовательных приближений на втором или произвольном k – м этапе, используем $\left(e_{ss}^{(n)}\right)_{k-1}, \left(e_{\theta\theta}^{(n)}\right)_{k-1}$ и $\left(\varepsilon_0^{(p)}\right)_{k-1}$, $\left(\varepsilon_0^{(c)}\right)_{k-1}$, вычисляем A_{1D}, A_{2D} (3) и решаем краевую задачу (18), (19) при нагрузках и граничных условиях, соответствующих концу данного этапа. Имея значения компонент НДС, определим значения ε_0 и ω_σ(7) и найдем $\overset{*}{\varepsilon}_0$ (6). Используя линейную интерполяцию по температуре и углу ω_σ, найдем соответствующую кривую F_1, на которой определим σ_0, соответствующее $\overset{*}{\varepsilon}_0$, и вычислим $\varepsilon_0^{(p)} = \overset{*}{\varepsilon}_0 - \sigma_0 / K$. По значениям σ_0, ω_σ и температуры в конце этапа определим $\Delta\varepsilon_0^{(c)}$ (15) и $\varepsilon_0^{(c)} = \left(\varepsilon_0^{(c)}\right)_{k-1} + \Delta\varepsilon_0^{(c)}$. Затем вычислим $\Delta_k \Gamma^{(p)}$. Для этого путем линейной интерполяции по температуре и углу ω_σ найдем кривую F_2 и на ней определим значение $S^{(d)}$, соответствующее значению $\Gamma = \Gamma_{k-1}^{(p)} + \Delta_k \Gamma^{(p)} + \dfrac{S}{2G}$, $\Delta_k \Gamma^{(p)} = \sum_{m=1}^{M-1} \Delta_m \Gamma^{(p)}$, где S вычислено по формуле (8). В общем случае в M – том приближении на k – том этапе

$$\Delta_k \Gamma^{(p)} = \sum_{m=1}^{M-1} \Delta_m \Gamma^{(p)} + \frac{S - S^{(d)}}{2G}. \tag{20}$$

Найдем значение $\dot{\Gamma}^{(c)}$ (13) для значений $S^{(d)}$, ω_σ и температуры в конце этапа и определим $\Delta_k \Gamma^{(c)}$ (15). Далее вычисляем $\Delta_k \Gamma^{(n)}$ (10), а затем $\Delta_k e_{ss}^{(n)}$ (9) и $e_{ss}^{(n)}, e_{\theta\theta}^{(n)}$ (4) и уточняем A_{1D}, A_{2D} (3), после чего можно решить краевую задачу в новом приближении. Таким образом, в каждом новом приближении используются результаты решения задачи в предыдущем приближении и на предыдущем этапе. Процесс последовательных приближений на этапе продолжаем до выполнения условий

$$\left| \frac{\sigma_0 - F_1\left(\overset{*}{\varepsilon}_0, T, \omega_\sigma\right)}{K} \right| \le \delta_1, \quad \left| \frac{S - F_2\left(\Gamma^*, T, \omega_\sigma\right)}{2G} \right| \le \delta_2, \tag{21}$$

где δ_1 и δ_2 - заданные числа, характеризующие точность удовлетворения уравнений (5) и (11). Расчетная практика показала, что $\delta_1 < \delta_2$.

Описанный алгоритм реализуется в том случае, когда в элементах тела происходит процесс активного нагружения, критерием которого принято условие $\Delta\Gamma^{(p)} \geq 0$, проверяемое после решения задачи в первом приближении. Нарушение этого условия означает, что в данном элементе оболочки происходит разгрузка, и для ее учета необходимо положить $\Delta\Gamma^{(p)} = 0$, $\Delta\Gamma^{(c)} = 0$ и при определении A_{1D}, A_{2D} использовать значения $e_{ss}^{(n)}, e_{\theta\theta}^{(n)}$ и $\varepsilon_0^{(p)}$, $\varepsilon_0^{(c)}$, соответствующие концу предыдущего этапа. Правильность разбивки на этапы проверяется путем повторного расчета при уменьшении величины этапов. Дробление этапов необходимо выполнять до совпадения с заданной точностью результатов с разным количеством этапов.

Выводы. Изложенная методика апробирована на тестовых примерах. Установлено, что предложенный процесс последовательных приближений позволяет получить решение задачи с заданной точностью. Показано, что результаты, полученные с использованием уравнений термовязкопластичности [5] с учетом ВНС, адекватно описывают экспериментальные данные, а результаты, полученные с использованием уравнений [7] без учета ВНС, могут в 2 – 3 раза отличаться от экспериментальных данных. Получено решение ряда краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N. Constitutive Equations for Describing the Elastoplastic Deformation of Elements of a Body along Small-Curvature Paths in View of the Stress Mode // Int. Appl. Mech.- 2006. – **42**, N 4. – P. 421 –430.
2. Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N. Constitutive Equations of Thermoplasticity Including the Third Invariant// Int. Appl. Mech. – 2010. –**46**, N 6. – P. 613 –624.
3. Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N. Describing the Elastoplastic Deformation of Layered Shells under Axisymmetric Loading with Allowance for the Third Invariant of the Stress Deviator// Int. Appl. Mech. – 2010. –**46**, N 10. – P. 1101 –1110.
4. Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N. Describing the Thermoelastoplastic Deformation of Compound Shells under Axisymmetric Loading with Allowance for the Third Invariant of Stress Deviator//Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N12. – P.1362-1371.
5.Шевченко Ю.Н., Тормахов Н.Н. Описание термовязкопластического деформирования по траекториям малой кривизны с учетом вида напряженного состояния // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій / Дніпропетровський нац. ун-т. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – Вип. 17. –С. 306 - 313.
6. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. - М.: ГИТТЛ, 1956. – 324 с.
7.Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. - 328 с.
8.Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.