

Липшица / Р. Н. Шарипов // Конструктивная теория функций и функцион. анализ. Казань, 1983. – Вып. 4. – С. 124 – 132.

12. Motornyi V. P. On the best interval quadrature formula in the class of functions with bounded r^{th} derivative // East journal of approximations. – 1998. - Vol. 4 , №4. – P. 459 – 478.

СКОСАРЕНКО Ю.В.

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ РЕБРИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ КРАТКОВРЕМЕННЫХ НАГРУЗОК

В работе рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния замкнутой ребристой цилиндрической оболочки, подверженной действию распределенных по ее поверхности кратковременных усилий. На торцах оболочки заданы граничные условия шарнирного опирания. В основу решения задачи положена классическая теория оболочек и стержней и энергетический метод.

The paper considers the problem of determining the stress-strain state of ribbed cylindrical shell closed, subject to the action distributed over the surface of short-term effort. At the ends of the shell are given simple support boundary conditions. The basis of decision laid the classical theory of shells and cores, and the energy method.

Введение. Рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния замкнутой ребристой цилиндрической оболочки, подверженной действию распределенных по ее поверхности кратковременных усилий. На торцах оболочки заданы граничные условия шарнирного опирания.

В основу решения задачи положена классическая теория оболочек и стержней и энергетический метод.

Перемещения точек срединной поверхности оболочки представлялись в виде двойных тригонометрических рядов по пространственным координатам

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N (u_{1mn}^1(\tau) \cos n\theta + u_{1mn}^2(\tau) \sin n\theta) \cos d_m \xi \\ v &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N (u_{2mn}^1(\tau) \sin n\theta + u_{2mn}^2(\tau) \cos n\theta) \sin d_m \xi \\ w &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N (u_{3mn}^1(\tau) \cos n\theta + u_{3mn}^2(\tau) \sin n\theta) \sin d_m \xi, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_{1mn}^1(\tau), u_{1mn}^2(\tau), \dots, u_{3mn}^2(\tau)$ - искомые функции времени, $d_m = m\pi r / l$.

Подставив представления (1) в вариационное уравнение, полученное из принципа стационарности действия, выполнив дифференцирование и интегрирование по координатам ξ, θ , на основе независимости и произвольности вариаций перемещений, получим следующие системы обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений

$$M^1 \frac{\partial^2 u^1}{\partial \tau^2} + S^1 u^1 = Q^1, \quad (2)$$

$$M^2 \frac{\partial^2 u^2}{\partial \tau^2} + S^2 u^2 = Q^2. \quad (3)$$

Здесь M^1, M^2, S^1, S^2 матрицы масс и матрицы жесткости, элементы которых зависят от параметров оболочки, продольных и кольцевых ребер, а также от параметров волнообразования m, n . Верхние индексы 1, 2 указывают на то, что при формировании матриц масс и жесткости использовались, соответственно, первые (индекс 1) и вторые (индекс 2) слагаемые в выражениях (1); u^1, u^2 - вектор-столбцы, составленные из искомых функций $u_{1mn}^1, u_{2mn}^1, u_{3mn}^1$ и $u_{1mn}^2, u_{2mn}^2, u_{3mn}^2$, соответственно; Q^1, Q^2 - вектор-столбцы, полученные после интегрирования компонент внешней нагрузки.

В общем случае системы (2), (3) связаны между собой, однако здесь эти системы независимы, так как рассматриваются оболочки, подкрепленные регулярно расположенными продольными ребрами с одинаковыми физическими и геометрическими параметрами.

Метод решения задачи. Для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочки, будем использовать метод разложения решения по формам собственных колебаний [1].

На первом этапе решается задача на собственные значения. Определяется диагональные матрицы $(p^1)^2, (p^2)^2$, элементами которых являются квадраты собственных значений, и матрицы форм собственных колебаний A^1, A^2 , элементами которых являются произвольные постоянные собственных форм $a_{k,l,i}^1, a_{k,l,i}^2$. Для решения задачи на собственные значения использовался метод вращений. В системах (2), (3) правые части приравнялись нулю, в рядах (1) переменные во времени неизвестные функции принимались в виде гармонической функции с постоянными коэффициентами.

Далее при решении задачи о напряженно-деформированном состоянии будем рассматривать оболочку, подверженную действию нагрузки, симметричной относительно начала окружной координаты. При этом динамическое поведение оболочки будет определяться только системой уравнений (2). Преобразуем данную систему, приведя ее к главным координатам

$$M_\Gamma \ddot{u}_\Gamma + S_\Gamma u_\Gamma = Q_\Gamma \quad (4)$$

Здесь u_Γ - вектор-столбец искомых функций в главных координатах,

$$M_\Gamma = (A^1)^T M^1 A^1, \quad S_\Gamma = (A^1)^T S^1 A^1, \quad Q_\Gamma = (A^1)^T Q^1. \quad (5)$$

Выполним нормировку матрицы форм собственных колебаний по отношению к матрице масс $\bar{a}_{k,l,i}^1 = a_{k,l,i}^1 / r_i$, где $r_i = [(a_{k,l,i}^1)^T M^1 a_{k,l,i}^1]^{1/2}$.

Используя нормированную таким образом матрицу форм собственных колебаний, получим выражения (5) в более простом виде

$$M_{\Gamma} = (\bar{A}^1)^T M^1 \bar{A}^1 = I, \quad S_{\Gamma} = (\bar{A}^1)^T S^1 \bar{A}^1 = (p^1)^2, \quad Q_{\Gamma} = (\bar{A}^1)^T Q^1, \quad (6)$$

где I - единичная матрица.

Так как в последнем случае матрица масс и матрица жесткости в главных координатах являются диагональными матрицами, вместо системы связанных уравнений (4) получим ряд независимых уравнений, число которых равно числу удерживаемых в решении форм собственных колебаний. Опуская далее верхний индекс 1, для каждой i -й формы колебаний запишем уравнение

$$\ddot{u}_{\Gamma,i}(t) + p_i^2 u_{\Gamma,i}(t) = q_{\Gamma,i}(t) \quad (7)$$

где $q_{\Gamma,i}(t)$ - компоненты вектора Q_{Γ} из (6), p_i - собственное значение, соответствующее i -й форме колебаний.

Уравнения (7) получены без учета рассеяния энергии при движении рассматриваемой механической системы. Если предположить, что эта система обладает слабым демпфированием и матрица форм собственных колебаний ортогональна также и к матрице демпфирования C , т.е. $(a_{k,l,m}^1)^T C a_{k,l,n}^1 = (a_{k,l,n}^1)^T C a_{k,l,m}^1 = 0$ при $n \neq m$, можно вместо уравнений (7) использовать уравнения вида

$$\ddot{u}_{\Gamma,i}(t) + 2c_{\Gamma,i} \dot{u}_{\Gamma,i}(t) + p_i^2 u_{\Gamma,i}(t) = q_{\Gamma,i}(t), \quad (8)$$

которые позволяют учесть рассеяние энергии при возмущенном движении оболочки.

В (8) принято: $c_{\Gamma,i} = \gamma_i p_i$ - постоянная демпфирования по i -й форме собственных колебаний, γ_i - соответствующий коэффициент демпфирования.

Получив решение уравнений (8) или (7), делаем обратный переход к исходной системе координат

$$u^1 = \bar{A}^1 u_{\Gamma}. \quad (9)$$

Далее с помощью рядов (1) и известных соотношений теории оболочек и теории стержней в заданный момент времени определяем перемещения, внутренние усилия и изгибающие моменты в точках срединной поверхности оболочки и ребер.

Будем определять напряженно-деформированное состояние оболочки при действии на нее равномерно распределенной нагрузки: $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = q_{\max} q_{3\tau}(\tau)$, которая на заданном промежутке времени $[0, \tau_n]$ изменяется по ступенчатому закону: $q_{3\tau}(\tau) = \alpha_1 + \alpha_2 \tau$ при $0 \leq \tau \leq \tau_n$, $q_{3\tau}(\tau) = 0$ при $\tau \geq \tau_n$. Здесь τ_n - время действия нагрузки, α_1, α_2 - безразмерные коэффициенты.

До момента приложения внешней нагрузки оболочка находится в состоянии покоя.

Решение уравнений (8) находим с помощью интеграла Дюамеля [1]. При нулевых начальных условиях имеем

$$u_{\Gamma,i}(\tau) = \frac{e^{-\gamma_i p_i \tau}}{P_{d,i}} \int_0^{\tau} q_{\Gamma,i}(\tau') e^{\gamma_i p_i \tau'} \sin p_{d,i}(\tau - \tau') d\tau', \quad (10)$$

где $P_{d,i} = p_i \sqrt{(1 - \gamma_i^2)}$

Выполнив указанные выше преобразования, после интегрирования в (10) получим следующие выражения для компонент вектора искомых функций в главных координатах

$$u_{\Gamma,i}(\tau) = \frac{q_{\Gamma,i}}{P_i^2} \left\{ \alpha_1 + \left(\tau - \frac{2\gamma_i}{P_i} \right) \alpha_2 - e^{-\gamma_i P_i \tau} \left[\left(\frac{\gamma_i}{\sqrt{1-\gamma_i^2}} \alpha_1 + \frac{1-2\gamma_i^2}{\sqrt{1-\gamma_i^2}} \frac{\alpha_2}{P_i} \right) \sin p_{di} \tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\alpha_1 - 2\gamma_i \frac{\alpha_2}{P_i} \right) \cos p_{di} \tau \right] \right\} \quad \text{при } 0 \leq \tau \leq \tau_n \quad (11)$$

$$u_{\Gamma,i}(\tau) = \frac{q_{\Gamma,i}}{P_i^2} \left\{ -e^{-\gamma_i P_i \tau} \left[\left(\frac{\gamma_i}{\sqrt{1-\gamma_i^2}} \alpha_1 + \frac{1-2\gamma_i^2}{\sqrt{1-\gamma_i^2}} \frac{\alpha_2}{P_i} \right) \sin p_{di} \tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\alpha_1 - 2\gamma_i \frac{\alpha_2}{P_i} \right) \cos p_{di} \tau \right] + e^{-\gamma_i P_i (\tau - \tau_n)} \left[\left(\frac{\gamma_i}{\sqrt{1-\gamma_i^2}} (\alpha_1 + \alpha_2 \tau_n) + \frac{1-2\gamma_i^2}{\sqrt{1-\gamma_i^2}} \frac{\alpha_2}{P_i} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin p_{di} (\tau - \tau_n) + \left(\alpha_1 + \tau_n \alpha_2 - 2\gamma_i \frac{\alpha_2}{P_i} \right) \cos p_{di} (\tau - \tau_n) \right] \right\} \quad \text{при } \tau \geq \tau_n \quad (12)$$

Отметим, положив в (11), (12) $\gamma_i = 0$, получим решение уравнения (7). Коэффициент, стоящий перед фигурной скобкой в выражении (11), представляет собой решение задачи при действии на оболочку статической нагрузки.

Далее приведены некоторые результаты расчета динамического напряженно-деформированного состояния оболочки. Рассмотрена оболочка, подкреплённая восьмью продольными ребрами, со следующими параметрами: плотность материала оболочки $\rho_o = 8,23 \times 10^3 \text{ } \hat{e}\hat{a} / \hat{i}^3$, модуль упругости $E = 2,1 \times 10^{11} \hat{i} / \hat{i}^2$, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, толщина обшивки $h = 10^{-3} \hat{i}$, длина образующей и радиус оболочки $l = r = 0,25 \hat{i}$.

Подкрепляющие ребра, обладающие только жесткостью на изгиб, имеют одинаковый момент инерции поперечного сечения $I_{y\hat{i}} = I_y = 8,27 \times 10^{-11} \hat{i}^4$.

В работе [2] приведены результаты расчета статического напряженно-деформированного состояния оболочки с данными параметрами, которые использовались так же для апробации изложенной выше методики решения задачи. Расчеты выполнены для оболочки, подверженной действию равномерно распределенной по ее поверхности динамической нагрузки, изменяющейся во времени по ступенчатому закону при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$. Время действия нагрузки τ_i варьировалось. В рядах (1) по продольной координате удерживались члены от 1 до $m = 21$ с шагом 2. По окружной координате удерживались члены ряда от нуля до $n = 96$ с шагом 8 с учетом циклической симметрии рассматриваемой системы.

На рис. 1, 2 представлены результаты исследования влияния времени действия внешней нагрузки τ_i на прогиб и изгибающие моменты в оболочке. Приведены зависимости от времени относительного прогиба \bar{w} (рис. 1),

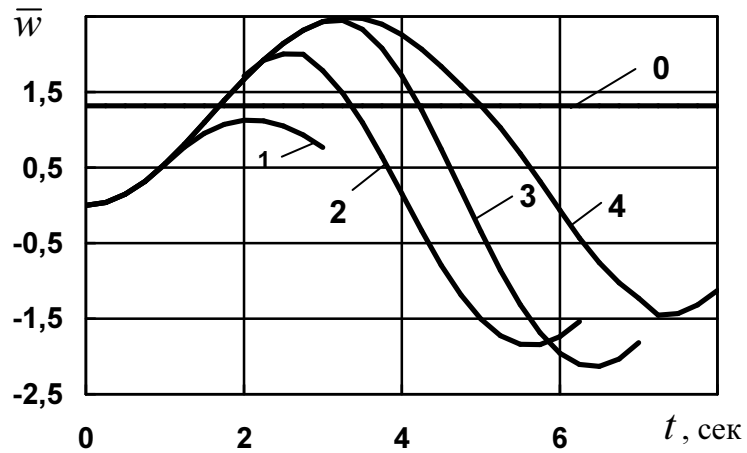
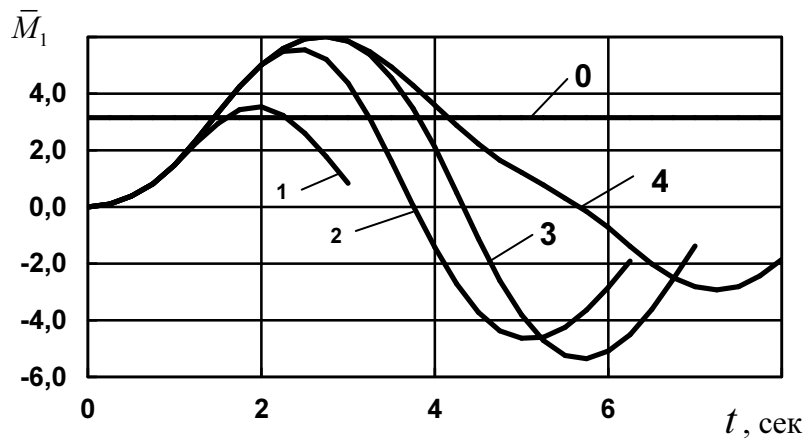
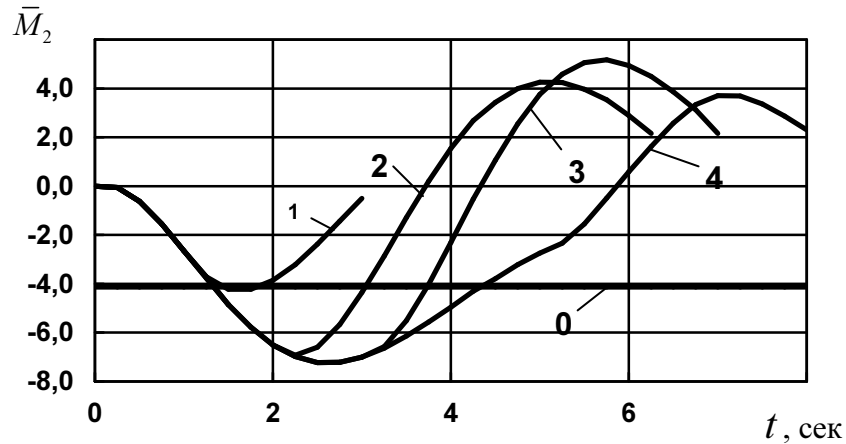


Рис.1

относительного изгибающего момента \bar{M}_1 (рис.2а) в точке $\xi = 0,1 \quad \theta = \pi/32$ и относительного изгибающего момента \bar{M}_2 (рис.2а) в точке $\xi = 0,1 \quad \theta = 0$, где они принимают наибольшие значения. Линии, обозначенные нулем, соответствуют статическому приложению внешней нагрузки. Кривые 1 получены при $\tau_i = 1$ сек, кривые 2 – при $\tau_i = 2$ сек, кривые 3 – при $\tau_i = 3$ сек, кривые 4 – при



а)



б)

Рис. 2

$\tau_i = 5$ сек.

Выводы. Из полученных результатов следует, что при заданных параметрах оболочки и времени действия нагрузки, не превышающем одной секунды, прогиб и изгибающие моменты в оболочке не превышают соответствующие значения, полученные при статическом нагружении. При времени действия нагрузки $\tau_i = 2,75-3,25$ сек прогибы и изгибающие моменты достигают наибольших значений, и при дальнейшем увеличении τ_i практически не возрастают.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер Колебания в инженерном деле, «Машиностроение», 1985, 472 с.
2. И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий, П.С. Поляков Ребристые цилиндрические оболочки, «Наукова думка», 1273, 248 с.