Выводы. Зная закономерности износа деталей автотранспорта во времени, можно прогнозировать ресурс их работы и разрабатывать пути по обеспечению их сохранности. Основными причинами коррозионных разрушений являются агрессивные загрязнения автомобильных дорог, промышленные отработанные газы, химические средства, применяемые для борьбы с обледенением дорог в зимнее время и т.п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов В.С., Рязанов В.Е., Фадеев И.В. Влияние составляющих загрязнений полотна автомобильных дорог на коррозию деталей автомобилей //Актуальные проблемы эксплуатации автотранспортных средств. Международная научно-практическая конференция, посвящ. 80-летию И.Н. Аринину, 20 - 22 ноября 2007. -Владимир, 2007.-с. 142 - 143.
2. Рязанов В.Е., Фадеев И.В., Павлов В.С. Коррозионная активность загрязнений полотна автомобильных дорог // Проблемы и перспективы развития инновационной деятельности в агропромышленном производстве. Уфимский гос. аграрный университет. - Уфа: 2007. - с.92-93.

Поступила в редколлегию 08.02.2013

УДК 539.3

БОГДАНОВ С.Ю., к.физ.-мат.н.

Институт механики им.С.П. Тимошенко НАН Украины

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ПОДКРЕПЛЁННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Введение. Теория обобщённых функций находит всё большее применение при решении задач динамики подкреплённых цилиндрических оболочек. В данной статье выведены и проанализированы уравнения движения и граничные условия для подкреплённых шпангоутами цилиндрических оболочек в классе обобщённых функций и показано, что данные уравнения позволяют решать задачи динамики подкреплённых цилиндрических оболочек с различными условиями контакта ребра с оболочкой.

1. Постановка задач динамики подкреплённых цилиндрических оболочек в пространстве обычных функций. Подкреплённая оболочка рассматривается как система, состоящая из оболочки (обшивки) и соединённых с нею ребер по линии контакта. Оболочка и подкрепляющие рёбра описываются по теории типа Тимошенко. Условия контакта оболочки и ребер могут быть самыми произвольными – либо жёсткими, либо подвижными. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что оболочка подкреплена одним ребром в некоторой точке $x = x_r$.В этой точке определённым образом заданы условия контакта. Оболочка имеет длину L,т.е. пространственная переменная x изменяется на отрезке $[0, L]$. Временная переменная изменяется на отрезке $t \in [0, T]$. В прямоугольнике $Q_{T=}[0, L] \times [0, T]$рассматривается следующая начально – краевая задача :определить тройку функций $\{u(x,t), w(x,t), \varphi(x,t)\}$ удовлетворяющих в Q_T системе уравнений в частных производных :

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - \frac{T_{yy}}{R} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P(t)$$
$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_{xz} = \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{1}$$

Соотношения для деформаций – перемещений имеют вид:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{w}{R}; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi, \quad \chi_{xx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{2}$$

Соотношения упругости для изотропного материала выражаются зависимостями:

$$T_{xx} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right), T_{yy} - \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\right), Q_{xz} = G_{xz} k' h \varepsilon_{xz},$$
$$M_{xx} = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\kappa_{xx} \tag{3}$$

где k' – коэффициент сдвига.

Начальные условия

$$u(x,0) = u_0, \quad w(x,0) = w_0, \quad \varphi(x,0) = \varphi_0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1, \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = w_1, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0) = \varphi_1 \tag{4}$$

где $u_{0,} w_{0,} \varphi_{0,} u_{1,} w_{1,} \varphi_1$ - известные функции координаты x .

Граничные условия предполагаются соответствующими для каждой конкретной задачи.

В точке $x = x_r$ заданы условия сопряжения ребра с оболочкой.

В соотношениях (1) - (4) введены общепринятые обозначения теории оболочек [2].

2. Постановка задач динамики подкреплённых цилиндрических оболочек в пространстве обобщённых функций. Уравнения движения. Граничные условия. Отличительной особенностью рассматриваемого класса задач есть разрывность производных от функций перемещений срединной поверхности $u(x,t), w(x,t), \varphi(x,t)$ в точке $x = x_r$. Поэтому имеет смысл рассмотреть поставленную выше задачу в классе обобщённых функций, привлечь для её решения аппарат теории обобщённых функций. Для этого используем правило обобщённого дифференцирования кусочно абсолютно непрерывной функции с кусочной абсолютно непрерывной производной, точкой разрыва $x = x_r$ и соответствующим скачком. Производную по пространственной координате заменяем на производную в смысле пространства распределений K' с исправленными слагаемыми, составленными из произведений скачков функции и её производных на δ -функцию и её производные. Обобщённая производная m - го порядка кусочно-непрерывной функции, имеющей скачок в точке $x = x_r$ имеет вид

$$f^{(m)}(x) = \{f^{(m)}(x)\} + [f]_{x=x_r}\delta^{(m-1)}(x - x_r) + \ldots + \left[\frac{\partial^{(m-1)} f}{\partial x^{(m-1)}}\right]_{x=x_r} \delta(x - x_r) \tag{5}$$

где $\{f^{(m)}(x)\}$ - производная m – го порядка функции $f(x)$ в классическом смысле, $\left[\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x^i}\right]$ i=0,…m-1 – скачки функции в точках установки рёбер. Расписав, учитывая соотношения (5) систему уравнений движения в перемещениях и собирая члены с одинаковым порядком производной от δ - функции, получаем систему уравнений движения подкреплённой цилиндрической оболочки в обобщённых функциях:

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x} - \left[T_{xx}\right]_{x=x_r} \delta(x - x_r) - \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[u\right]_{x=x_r} \delta'(x - x_r)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \widetilde{Q}_{xz}}{\partial x} - \frac{\widetilde{T}_{yy}}{R} - \left[Q_{xz}\right]_{x=x_r} \delta(x - x_r) - G_{xz} k' h \left[w\right]_{x=x_r} \delta'(x - x_r) -$$

$$- \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[u\right]_{x=x_r} \delta(x - x_r) + P(t);$$

$$\frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial \widetilde{M}_{xx}}{\partial x} - \left[M_{xx}\right]_{x=x_r} \delta(x - x_r) - \widetilde{Q}_{xz} - G_{xz} k' h \left[w\right]_{x=x_r} \delta(x - x_r) -$$

$$- \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left[\varphi\right]_{x=x_r} \delta'(x - x_r). \tag{6}$$

Начальные условия остаются без изменений в виде (4).

Вывод граничных условий. Задание нулевых граничных условий рассмотрено в [1]. Рассмотрим случай, когда в граничных условиях на торцах оболочки присутствуют производные. Это имеет место в задачах продольных или поперечных воздействий на торец оболочки. Допустим, что на левый торец оболочки действует продольное усилие при этом правый торец жёстко закреплён. Граничные условия в в пространстве обычных функций в данном случае имеют вид:

$$M_{xx}(0,t) = 0,\ T_{xx}(0,t) = P(t),\ Q_{xz}(0,t) = 0\ . \tag{7}$$

Рассмотрим два случая:

1) Торец оболочки не подкреплён шпангоутом. В этом случае граничные условия имеют вид (7);

2) Торец оболочки подкреплён шпангоутом. Тогда $x_r = 0, f(x_r) = f(0)$. Соотношение (5) принимает вид:

$$.f^{(m)}(0) = \left\{f^{(m)}(0)\right\} + \left[f\right]_{x=0} \delta^{(m-1)}(x) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=0} \delta^{(m-2)}(x) + \ldots + \left[\frac{\partial^{(m-1)} f}{\partial x^{(m-1)}}\right]_{x=0} \delta(x)$$

Расписывая, с учётом последнего соотношения граничные условия (7), и проводя выкладки аналогично тому, как при выводе уравнений (6), получаем граничные условия в обобщённых функциях:

$$\widetilde{M}_{xx} - \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left[\varphi\right]_{x=0} \delta(x) = 0,\ \widetilde{T}_{xx} - \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[u\right]_{x=0} \delta(x) = P(t)$$

$$.\widetilde{Q}_{xz} - G_{xz} h \left[w\right]_{x=0} \delta(x) = 0 \tag{8}$$

3. Корректность расширения на обобщённые функции задач динамики подкреплённых цилиндрических оболочек. В работе [1] была показана корректность расширения задач динамики цилиндрических оболочек в случае, когда на торцах оболочки заданы условия жёсткого закрепления. Покажем корректность данного расширения в случае произвольных граничных условий на примере граничных условий (7) или (8). Доказательство возможности данного расширения проведём согласно [3]. Система уравнений (1) в данном случае будет однородной, т.к. правая часть $P(t)$ входит в граничные условия (7). Запишем её в матричном виде:

$$\rho h \frac{\partial^2 \vec{U}(x,t)}{\partial t^2} = B\vec{U}(x,t), \tag{9}$$

где матрица B имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{Eh}{1-\nu^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\nu}{R}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\nu}{R}\frac{\partial}{\partial x} & G_{xz}h\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{Eh}{R^2\left(1-\nu^2\right)} & G_{xz}h\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & G_{xz}h\frac{\partial}{\partial x} & \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Вектор $\vec{U}(x,t) = (u(x,t), w(x,t), \varphi(x,t))^T$.

Система уравнений движения в обобщённых функциях в матричном виде:

$$\rho h \frac{\partial^2 \vec{U}(x,t)}{\partial t^2} = B_1\vec{U}(x,t) - S\vec{\delta}'(x - x_r) - S_1\vec{\delta}(x - x_r). \tag{11}$$

Элементами матриц S и S_1 являются скачки перемещений и усилий – моментов. Матрица S диагональная, S_1 недиагональная.

Входящие в матрицу B_1 производные понимаются в обобщённом смысле. Рассмотрим обобщённую вектор – функцию , равную нулю при $x < 0$ и решению системы (1)-(5) при $x > 0$.

Для обобщённой производной имеет место равенство (5) , т.е. можно записать:

$$B_1\vec{U}(x,t) = B\vec{U}(x,t) + \left[\vec{U}\right]_{x=x_r}\vec{\delta}'(x - x_r) + \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}\right]_{x=x_r}\vec{\delta}(x - x_r).$$

Выражая отсюда B и подставляя это выражение в (9) , получаем, что $\vec{U}(x,t)$ есть решение системы (11). Пусть $\vec{U}(x,t)$ есть решение системы (11) ,обращающейся в 0 при $x < 0$. Покажем, что $U(x,t)$ есть решение (9), удовлетворяющее начальным и граничным условиям (2), (3). Расписав в (11) $B_1\vec{U}(x,t)$ как обобщённую производную, имеющую разрыв в точке $x = x_r$,используя (5), получим (9). Т.е. $\vec{U}(x,t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в обычных функциях. Доказательство корректности представления граничных условий в классе обобщённых функций проводится аналогично.

4. Анализ системы уравнений движения подкреплённых цилиндрических оболочек в пространстве обобщённых функций. При анализе уравнений движения подкреплённых цилиндрических оболочек в обобщённых функциях необходимо рассмотреть два вида условий сопряжения ребра и оболочки : 1) Жёсткий контакт; 2) Нежёсткий (подвижный) контакт. В случае жёсткого контакта имеем:

$$[u]_{x=x_r} = [w]_{x=x_r} = [\varphi]_{x=x_r} = 0.$$

В этом случае в системе уравнений (6) среди слагаемых, содержащих δ - функции, остаются лишь те, которые содержат скачки силовых характеристик получаем известную систему уравнений движения подкреплённых цилиндрических оболочек [2].

В случае подвижного контакта ребра и оболочки имеем:

$$[u]_{x=x_r} \neq 0, [w]_{x=x_r} \neq 0, [\varphi]_{x=x_r} \neq 0$$

Система уравнений движения в этом случае не упрощается и представляется в виде (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов С.Ю. Расширение на обобщённые функции классической задачи динамики для подкреплённой цилиндрической оболочки // Системні технології 4(45) 2006. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Дніпропетровськ.2006. с.134-138.
2. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. К.:, 2005. – 536с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. Москва, Наука, 1965. 312с.

Поступила в редколлегию 15.02.2013

УДК 539.3

БАЩУК Е.Ю., к.физ.-мат.н.

Институт механики им.С.П. Тимошенко НАН Украины

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТРЕХМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ

Введение. В настоящее время решения задач устойчивости материалов и элементов конструкций с трещинами осуществляется, в основном, с использованием прикладных подходов, позволяющих свести трехмерные уравнения к одномерным или двумерным. Используемые гипотезы приводят к тому, что механические процессы, происходящие в материале, отражаются сугубо приближенно, в результате наличия неустранимых погрешностей. В настоящее время для получения более достоверной информации о критических параметрах нагружения необходимо применять к исследованию устойчивости упругих сред и элементов конструкций трехмерный подход. Под трехмерным подходом, следуя [1], понимается подход исследования задач, в котором используются все гипотезы механики твердого тела, за исключением гипотез, позволяющих уменьшить размерность исследуемой задачи

Рассматриваемая в статье задача исследуется в рамках точного подхода. Для получения значений критических параметров наиболее соответствующих механическим процессам, происходящим в упругих средах, в настоящее время, применяются уравнений трехмерной линеаризированной теории устойчивости. Здесь используется второй вариант теории, для случая малых деформаций и линейной связи между напряжениями и деформациями [1,4].

Постановка задачи. Рассмотрим линейно упругую изотропную прямоугольную пластину, находящуюся в условиях плоской деформации в плоскости $x_1 0 x_2$ и сжимаемую в направлении $0x_2$ нагрузкой $\overset{\circ}{p}_{22}$ постоянной интенсивности. Пластина имеет размеры $2l_1 \times 2l_2$ и ослаблена в направлении действия нагрузки центральной трещиной длины $2t$ с берегами свободными от нагружения. Пластина жестко защемлена и в ней реализуется неоднородное докритическое состояние, компоненты которого отмечаются сверху индексом "o" (рис.1, а). К решению задачи устойчивости применяются уравнения ТЛТУДТ и используется второй вариант теории [1,6]. С учетом симметрии решения рассматривается половина пластины (рис.1, б). Для нахождения критических параметров пластины требуется определить из решения