Система уравнений движения в этом случае не упрощается и представляется в виде (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов С.Ю. Расширение на обобщённые функции классической задачи динамики для подкреплённой цилиндрической оболочки // Системні технології 4(45) 2006. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Дніпропетровськ.2006. с.134-138.
2. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. К.:, 2005. – 536с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. Москва, Наука, 1965. 312с.

Поступила в редколлегию 15.02.2013

УДК 539.3

БАЩУК Е.Ю., к.физ.-мат.н.

Институт механики им.С.П. Тимошенко НАН Украины

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТРЕХМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ

Введение. В настоящее время решения задач устойчивости материалов и элементов конструкций с трещинами осуществляется, в основном, с использованием прикладных подходов, позволяющих свести трехмерные уравнения к одномерным или двумерным. Используемые гипотезы приводят к тому, что механические процессы, происходящие в материале, отражаются сугубо приближенно, в результате наличия неустранимых погрешностей. В настоящее время для получения более достоверной информации о критических параметрах нагружения необходимо применять к исследованию устойчивости упругих сред и элементов конструкций трехмерный подход. Под трехмерным подходом, следуя [1], понимается подход исследования задач, в котором используются все гипотезы механики твердого тела, за исключением гипотез, позволяющих уменьшить размерность исследуемой задачи

Рассматриваемая в статье задача исследуется в рамках точного подхода. Для получения значений критических параметров наиболее соответствующих механическим процессам, происходящим в упругих средах, в настоящее время, применяются уравнений трехмерной линеаризированной теории устойчивости. Здесь используется второй вариант теории, для случая малых деформаций и линейной связи между напряжениями и деформациями [1,4].

Постановка задачи. Рассмотрим линейно упругую изотропную прямоугольную пластину, находящуюся в условиях плоской деформации в плоскости $x_1 0 x_2$ и сжимаемую в направлении $0x_2$ нагрузкой $\overset{\circ}{p}_{22}$ постоянной интенсивности. Пластина имеет размеры $2l_1 \times 2l_2$ и ослаблена в направлении действия нагрузки центральной трещиной длины $2t$ с берегами свободными от нагружения. Пластина жестко защемлена и в ней реализуется неоднородное докритическое состояние, компоненты которого отмечаются сверху индексом "o" (рис.1, а). К решению задачи устойчивости применяются уравнения ТЛТУДТ и используется второй вариант теории [1,6]. С учетом симметрии решения рассматривается половина пластины (рис.1, б). Для нахождения критических параметров пластины требуется определить из решения задачи упругости начальные напряжения $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$ основного состояния, а затем из решения уравнений (ТЛТУДТ) определить критические характеристики устойчивости пластины.

Сформулируем задачу теории упругости.

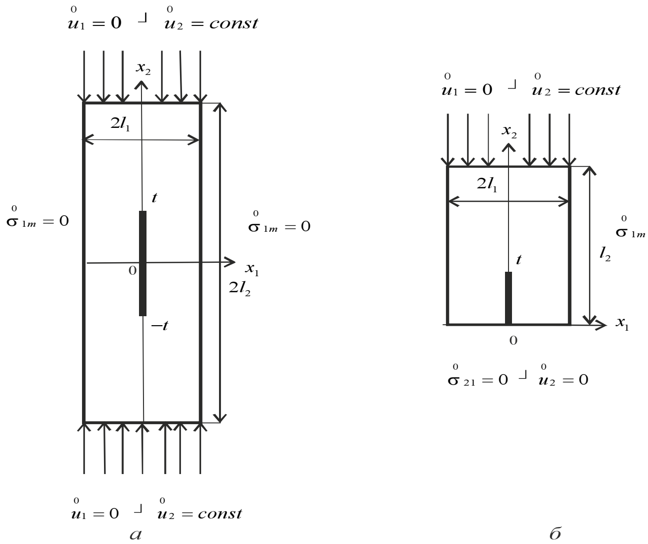

Рисунок 1

Отыскивается функция $\overset{\circ}{\boldsymbol{u}} = (\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2)$, удовлетворяющая следующие соотношения: уравнение равновесия

$$-\frac{\partial \overset{\circ}{\sigma}_{im}}{\partial \boldsymbol{x}_i} = \overset{\circ}{\boldsymbol{F}}_m; \quad \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}, \tag{1}$$

граничные условия

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{\sigma}_{1m} = 0; \ |x_1| = l_1 \wedge 0 \le x_2 \le l_2; \\ &\overset{\circ}{u}_1 = 0 \wedge \overset{\circ}{u}_2 = const; \ |x_1| \le l_1 \wedge x_2 = l_2; \\ &\overset{\circ}{\sigma}_{21} = \overset{\circ}{u}_2 = 0; \ |x_1| \le l_1 \wedge x_2 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

условия на трещине

$$\overset{\circ}{\sigma}_{1m} = 0; \ x_1 = \pm 0 \wedge 0 \le x_2 \le t. \tag{3}$$

Закон Гука для изотропного тела имеет вид:

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{\sigma}_{ii} = A_{im}\overset{\circ}{\varepsilon}_{mm}; \ \overset{\circ}{\sigma}_{12} = 2G\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \ A_{ii} = \lambda + 2G; A_{12} = \lambda; \\ &\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{\circ}{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overset{\circ}{u}_j}{\partial x_i}\right); \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \ G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\overline{\Omega}$ – расчетная область; $\overset{\circ}{F}_m$ – компонента массовой силы; $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ – точка на расчетной схеме; A_{ij} – упругие постоянные (коэффициенты жесткости); G – модуль сдвига, λ – коэффициент Ламе. В (3) $x = -0$ соответствует левому берегу трещины.

Для приближенного решения задачи теории упругости используется метод Холецкого и метод сопряженных градиентов [5].

Для нахождения критических параметров в задаче устойчивости требуется определить минимальное по модулю и отличное от нуля собственное решение $(\overset{*}{\boldsymbol{p}},\overset{*}{\boldsymbol{u}})$, удовлетворяющее следующие соотношения:

уравнения в возмущениях

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{im} + p\overset{o}{\sigma}_{im}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right) = 0;\ \boldsymbol{x}\in\overline{\Omega} \tag{5}$$

граничные условия

$$\begin{aligned}
&\sigma_{1m} = 0;\ |x_1| = l_1 \wedge 0 \le x_2 \le l_2;\\
&\sigma_{21} + p\overset{o}{\sigma}_{22}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \wedge \overset{o}{u}_2 = 0;\ |x_1| \le l_1 \wedge x_2 = 0;\\
&u_1 = 0 \wedge u_2 = 0;\ |x_1| \le l_1 \wedge x_2 = l_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

условия на сторонах трещины

$$\sigma_{1m} = 0; x_1 = \pm 0 \wedge 0 \le x_2 \le t\ . \tag{7}$$

Закон Гука определяется соотношением (4), где следует опустить индекс $\cdot o$.

Критические параметры определяются из равенства

$$\boldsymbol{p}^{kp} = \overset{*}{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}_1;\ \boldsymbol{u}^{kp} = \overset{*}{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}_1 \tag{8}$$

Для приближенного решения уравнений ТЛТУДТ используется метод итерирования подпространства и градиентный метод [4].

Результаты и анализ расчетов. Целью расчетов является исследования влияния механических и геометрических характеристик пластины с трещиной на характер поведения критических параметров.

Рассматривается изотропная пластина, механические и геометрические характеристики которой варьируются в следующих пределах: $0{,}25\,ГПа \le E \le 250\,ГПа$, $0 \le v \le 0{,}4$, $0{,}1 \le \alpha \le 0{,}3$, где $\alpha = l_1/l_2$ – параметр тонкостенности.

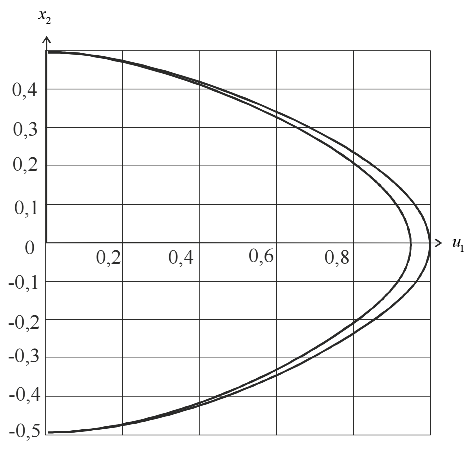

Рисунок 2

На рис.2 изображены графики функций $u_1(x_1 = const, x_2)$, представляющие форму потери устойчивости пластины в различных вертикальных сечениях пластины. Видно, что формы потери устойчивости пластины близки к функции $u_1(x_1,x_2) = A(x_1)\cos(\pi x)$, где

$A(x_1)$– амплитуда косинусоиды в сечении $x_1 = const$. Горизонтальное возмущение берегов трещины описывается одной функцией $u_1(\pm 0, x_2) = A(0)\cos(\pi x)$. Это означает, что в возмущенном состоянии отсутствует раскрытие или надавливание берегов трещины.

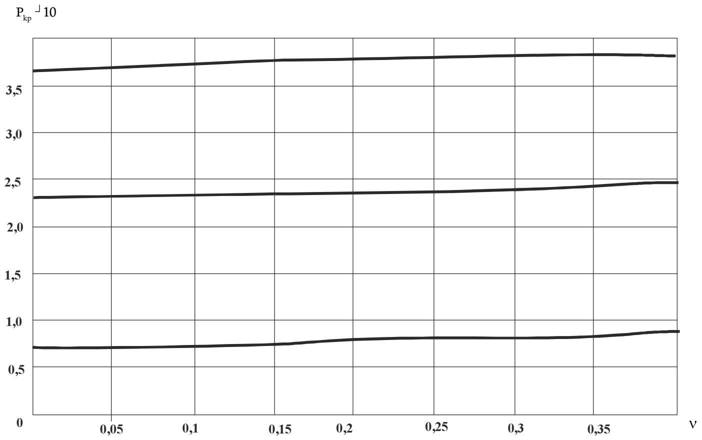

Рисунок 3

На рис. 3 показана зависимость критической нагрузки от величины коэффициента Пуассона при фиксированных параметрах тонкостенности и модулях Юнга. Из рисунка видно, что изменение коэффициента Пуассона незначительно влияет на величину критической нагрузки (в пределах 7% при $\alpha \le 0{,}25$ и в пределах 10% $0{,}25 < \alpha \le 0{,}3$), а форма потери устойчивости практически не изменяется. Подобные результаты (незначительное влияние коэффициента Пуассона на значение критической нагрузки) получены для слабоармированных волокнистых материалов и для прямоугольных пластин [2,3]

При анализе влияния модуля Юнга на критические параметры установлено, что для произвольных фиксированных значениях α, t, ν критическая нагрузка изменяется прямо пропорционально модулю Юнга E. Такой результат является механически непротиворечивым. Поведение функции $\mathbf{u}$, возмущения смещений, в этом случаи практически не зависит от величины E.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1971. –276 с.
2. Гузь А. Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии.– К.: Наук. думка, 1990.–630 с.
3. Гузь А. Н., Гладун Е.Ю. О трехмерной устойчивости пластины с трещиной // Прикл. механика.–2001.–37, № 10. – С. 53–62.
4. Коханенко Ю.В. Численное исследование краевых эффектов в слоистых композитах при одноосном нагружении // Прикл. механика.–2010.–46, № 5. – С. 29–45.
5. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы: Пер. с англ.– М: Мир.– 1983.– 384 с.
6. Guz A.N. Fundamentals of Three–Dimensional Theory of stability of Deformable Bodies. – Berlin, Heidelberg. Springer – Verlag, 1999.– 555 p.

Поступила в редколлегию 15.02.2013