УДК 539.3 БАЩУК Е.Ю., к.физ.-мат. н.

Институт механики им.С.П. Тимошенко НАН Украины

ЗАВИСИМОСТЬ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ОТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Введение. Элементы тонкостенных конструкций в форме стержней, пластин и оболочек широко используются в различных отраслях народного хозяйства. Производство новых конструкций побуждает к углубленному исследованию широкого круга научных задач и научно–технических проблем, касающихся расчетов конструкций или их компонент. При оценке несущей способности конструкций необходимым этапом является расчет конструкции или ее элементов на устойчивость.

В настоящее время задачи устойчивости элементов конструкций исследованы, в основном, с использованием классических или уточненных прикладных теорий устойчивости. В этих теориях используются различного рода гипотезы, позволяющие уменьшить размерность задач и тем самым существенно упростить их решения. Однако решения задач устойчивости, полученные с использованием одномерных или двумерных уравнений, не всегда удовлетворяют потребностям инженерной практики. Имеется также ряд задач, которые не допускают использования одномерных или двумерных подходов для своего решения. К таким задачам относятся, например, задачи, характеризующиеся трехмерным основным напряженным состоянием [1,4]. Отметим, что вопросы устойчивости элементов конструкций с дефектами типа трещин также относится к области теории устойчивости, где применение одномерных или двумерных подходов нельзя считать достаточно корректным.

Получить достаточно точные значения критических параметров можно в результате применения к исследованию устойчивости упругих сред и элементов конструкций трехмерного подхода. Рассматриваемая в статье задача исследуется в рамках точного подхода с использованием уравнений трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) [1]. Здесь используется второй вариант теории, для случая малых деформаций и линейной связи между напряжениями и деформациями [1,4]. Для жестко защемленной пластины с трещиной исследована зависимость критических параметров от геометрических характеристик пластины.

Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная изотропная пластина, достаточно протяженная в направлении $0x_3$ и имеющая в этом направлении сквозную трещину длины $2t$. Вдоль оси $0x_2$ (в направлении трещины) пластина сжимается нагрузкой постоянной интенсивности $\mathring{p}_{22}$, обеспечивающей в теле пластины состояние плоской деформации в плоскости $x_1 0 x_2$, где пластина имеет размеры $2l_1 \times 2l_2$ (рис.1). К решению задачи устойчивости применяются уравнения ТЛТУДТ и используется второй вариант теории [1,4].

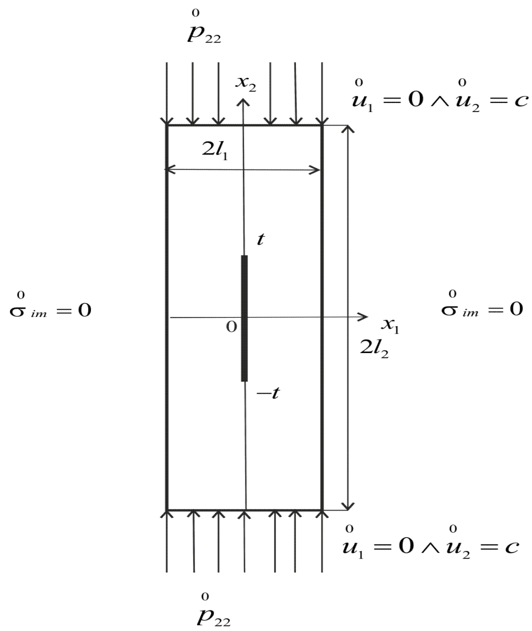

Рисунок 1

Для решения задачи уравнений ТЛТУДТ необходимо предварительно найти решение соответствующей задачи линейной теории упругости, из которой определяются начальные напряжения $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$ в теле пластины с трещиной. Сформулируем задачу упругости.

Постановка задачи упругости.

Отыскивается функция $\overset{\circ}{\boldsymbol{u}} = (\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2)$, удовлетворяющая следующие соотношения:

уравнение равновесия

$$-\frac{\partial \overset{\circ}{\sigma}_{im}}{\partial \boldsymbol{x}_i} = \overset{\circ}{\boldsymbol{F}}_m; \quad \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}, \tag{1}$$

граничные условия

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{\sigma}_{1m} = 0; \ |x_1| = l_1 \wedge |x_2| \le l_2; \\ &\overset{\circ}{u}_1 = 0 \wedge \overset{\circ}{u}_2 = const; \ |x_1| \le l_1 \wedge |x_2| = l_2, \end{aligned} \tag{2}$$

условия на трещине

$$\overset{\circ}{\sigma}_{1m} = 0; \ x_1 = \pm 0 \wedge \ |x_2| \le t. \tag{3}$$

Закон Гука для изотропного тела имеет вид:

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{\sigma}_{ii} = A_{im} \overset{\circ}{\varepsilon}_{mm}; \ \overset{\circ}{\sigma}_{12} = 2G \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \ A_{ii} = \lambda + 2G; A_{12} = \lambda; \\ &\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{\circ}{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overset{\circ}{u}_j}{\partial x_i}\right); \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \ G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\overline{\Omega}$ – расчетная область; $\overset{\circ}{F}_m$ – компонента массовой силы; $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ – точка на расчетной схеме; A_{ij} – упругие постоянные (коэффициенты жесткости); G – модуль сдвига, λ – коэффициент Ламе. В (3) $x = -0$ соответствует левому берегу трещины.

Постановка задачи устойчивости.

Для нахождения критических параметров требуется определить минимальное по модулю и отличное от нуля собственное решение $(\overset{*}{p},\overset{*}{u})$ спектральной задачи, удовлетворяющей следующим соотношениям:

уравнения в возмущениях

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{im} + p\overset{o}{\sigma}_{im}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right) = 0;\ x \in \overline{\Omega} \tag{5}$$

граничные условия

$$\begin{aligned} &\sigma_{1m} = 0;\ |x_1| = l_1 \wedge |x_2| \le l_2; \\ &u_1 = 0 \wedge u_2 = const;\ |x_1| \le l_1 \wedge |x_2| = l_2; \end{aligned} \tag{6}$$

условия на сторонах трещины

$$\sigma_{1m} = 0; x_1 = \pm 0 \wedge |x_2| \le t \tag{7}$$

Закон Гука определяется соотношением (4), где следует опустить индекс 'o'.

Критические параметры определяются из равенства

$$p^{kp} = \overset{*}{p} = p_1;\ u^{kp} = \overset{*}{u} = u_1 \tag{8}$$

Результаты и анализ расчетов. Для приближенного решения задачи теории упругости используется метод Холецкого и метод сопряженных градиентов [2], а для приближеного решения уравнений ТЛТУДТ используется метод итерирования подпространства и градиентный метод [3].

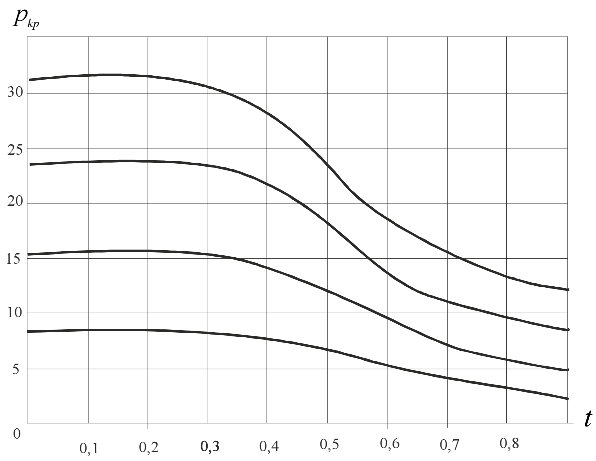

Рисунок 2

Рассматривается изотропная линейно-упругая пластина с техническими постоянными: $E = 250$ ГПа, $G = 100$ ГПа, $\nu = 0{,}25$. Параметр тонкостенности $\alpha = l_1/l_2$ изменяется в пределах $0{,}1 \le a \le 0{,}25$, а размер трещины в интервале $0 \le t < 1$. На рис.2 приведены графики зависимости критической нагрузки от длины трещины при определенном значении параметра тонкостенности. Из графиков видно, что зависимость критической нагрузки от длины трещины – нелинейная. Для интервала $|t| \le 0{,}3$ критическая нагрузка слабо зависит от длины трещины, то есть трещина небольших размеров (начальная) незначительно влияет на значение p_{kp}. Установлено, что изменение геометрических параметров α, t приводит к количественному изменению критических факторов и не изменяет качественной картины их поведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел.– К.: Наук. думка, 1971.–276 с.
2. Коханенко Ю.В. Численное исследование краевых эффектов в слоистых композитах при одноосном нагружении // Прикл. механика.–2010.–46, № 5. – С. 29–45.
3. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы: Пер. с англ.– М: Мир.– 1983.– 384 с.
4. Guz A.N. Fundamentals of Three–Dimensional Theory of stability of Deformable Bodies. – Berlin, Heidelberg. Springer – Verlag, 1999.– 555 p.

Поступила в редколлегию 15.02.2013

УДК 539.3

МАЙБОРОДИНА Н.В., к. физ.-мат.н.
МЕЙШ В.Ф., д. физ.-мат.н.
ГЕРАСИМЕНКО В.А.

Нежинский агротехнический институт, Нежин, Украина
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

ВЛИЯНИЕ МЕСТОРАСПОЛОЖЕНИЯ ПОДКРЕПЛЯЮЩИХ ПОПЕРЕЧНЫХ РЕБЕР НА НАПРЯЖЕННО - ДЕФОРМИРУЕМОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ

Введение. На сегодняшний день проблема вынужденных колебаний подкрепленных оболочек достаточно хорошо изучена. В основном рассмотрены гармонические колебания подкрепленных оболочек простой геометрии (цилиндрические, конические и сферические подкрепленные оболочки) [1-3]. Результаты по вынужденным колебаниям подкрепленных оболочек при импульсных нагрузках представлены в работах [4-6].

Целью данной работы является сравнительный анализ численного решения задач о деформированном состоянии дискретно подкрепленных поперечными ребрами эллипсоидальных оболочек при действии нестационарной распределенной нагрузки для вариантов внешнего и внутреннего размещения ребер.

Постановка задачи. Подкрепленная эллипсоидальная оболочка рассматривается как неоднородная упругая структура, которая состоит из гладкой оболочки и системы жестко соединенных с ней поперечных ребер.

Геометрия срединной поверхности гладкой эллипсоидальной оболочки задается соотношениями [5]

$$x = R\sin\alpha_1 \sin\alpha_2; \quad y = R\sin\alpha_1 \cos\alpha_2; \quad z = kR\cos\alpha_1,$$

где параметры α_1, α_2 представляют собою гауссовы криволинейные координаты на поверхности оболочки, причем координата α_1 соответствует меридиальному направлению, α_2 – окружному направлению; $k = b/a$ – параметр эллиптичности; a, b – полуоси эллипса.