

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел.– К.: Наук. думка, 1971.–276 с.
2. Коханенко Ю.В. Численное исследование краевых эффектов в слоистых композитах при одноосном нагружении // Прикл. механика.–2010.–46, № 5. – С. 29–45.
3. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы: Пер. с англ.– М: Мир.– 1983.– 384 с.
4. Guz A.N. Fundamentals of Three–Dimensional Theory of stability of Deformable Bodies. – Berlin, Heidelberg. Springer – Verlag, 1999.– 555 p.

Поступила в редколлегию 15.02.2013

УДК 539.3

МАЙБОРОДИНА Н.В., к. физ.-мат.н.
МЕЙШ В.Ф., д. физ.-мат.н.
ГЕРАСИМЕНКО В.А.

Нежинский агротехнический институт, Нежин, Украина
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

**ВЛИЯНИЕ МЕСТОРАСПОЛОЖЕНИЯ ПОДКРЕПЛЯЮЩИХ
ПОПЕРЕЧНЫХ РЕБЕР НА НАПРЯЖЕННО - ДЕФОРМИРУЕМОЕ СОСТОЯНИЕ
ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ
НАГРУЗКИ**

Введение. На сегодняшний день проблема вынужденных колебаний подкрепленных оболочек достаточно хорошо изучена. В основном рассмотрены гармонические колебания подкрепленных оболочек простой геометрии (цилиндрические, конические и сферические подкрепленные оболочки) [1-3]. Результаты по вынужденным колебаниям подкрепленных оболочек при импульсных нагрузках представлены в работах [4-6].

Целью данной работы является сравнительный анализ численного решения задач о деформированном состоянии дискретно подкрепленных поперечными ребрами эллипсоидальных оболочек при действии нестационарной распределенной нагрузки для вариантов внешнего и внутреннего размещения ребер.

Постановка задачи. Подкрепленная эллипсоидальная оболочка рассматривается как неоднородная упругая структура, которая состоит из гладкой оболочки и системы жестко соединенных с ней поперечных ребер.

Геометрия срединной поверхности гладкой эллипсоидальной оболочки задается соотношениями [5]

$$x = R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2; \quad y = R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2; \quad z = kR \cos \alpha_1,$$

где параметры α_1 , α_2 представляют собою гауссовы криволинейные координаты на поверхности оболочки, причем координата α_1 соответствует меридиальному направлению, α_2 – окружному направлению; $k = b/a$ – параметр эллиптичности; a , b – полуоси эллипса.

При построении математической модели процесса динамического деформирования исходной конструкции будем использовать геометрически нелинейный вариант теории оболочек типа Тимошенко в квадратическом приближении. Изменение перемещений по толщине оболочки в системе координат (s_1, s_2, z) задается аппроксимацией вида

$$u_1^z(s_1, s_2, z) = u_1(s_1, s_2) + z\varphi_1(s_1, s_2); \quad u_2^z(s_1, s_2, z) = u_2(s_1, s_2) + z\varphi_2(s_1, s_2);$$

$$u_3^z(s_1, s_2, z) = u_3(s_1, s_2); \quad z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]; \quad s_1 = \alpha_1 A_1; \quad s_2 = \alpha_2 A_2,$$

где A_1, A_2 – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности эллипсоидальной оболочки.

Деформационные соотношения и соотношения между напряжениями и деформациями для гладкой оболочки принимаются согласно [5].

При построении математической модели деформирования j -го подкрепляющего ребра направляемого вдоль оси α_2 будем исходить из гипотезы недеформируемости поперечного сечения подкрепляющего элемента в рамках геометрически нелинейной теории стержней Тимошенко. Изменение перемещений по поперечному сечению j -го подкрепляющего ребра в системе координат (x, s_2, z) задается аппроксимацией вида

$$U_{1j}^{xz}(x, s_2, z) = U_{1j}(s_2) + z\varphi_{1j}(s_2),$$

$$U_{2j}^{xz}(x, s_2, z) = U_{2j}(s_2) + z\varphi_{2j}(s_2),$$

$$U_{3j}^{xz}(x, s_2, z) = U_{3j}(s_2)$$

Деформационные соотношения, соотношения между напряжениями и деформациями для j -го ребра принимаются согласно [5].

Условия контакта между компонентами вектора перемещений центра тяжести поперечного сечения j -го ребра и компонентами обобщенного вектора перемещения исходной срединной поверхности принимаются согласно [5].

Уравнения колебаний. Для вывода уравнений колебаний дискретно подкрепленной структуры используются вариационный принцип Гамильтона-Остроградского. После выполнения операций варьирования и интегрирования с учетом условий контакта получаем две группы уравнений.

Уравнения колебаний оболочки в гладкой области

$$\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} T_{22} \right] + k_1 \bar{T}_{13} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 T_{21}) = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{12}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} T_{21} \right] + k_2 \bar{T}_{23} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 T_{22}) = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 \bar{T}_{13}) - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + P_3 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 \bar{T}_{23}) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_{22} \right] - T_{13} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 M_{21}) = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{12}) + \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_{21} \right] + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 M_{22}) - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}.$$

Уравнения колебания j -го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси α_2 приведены в [5].

Обозначения величин и соответствующие выражения усилий – моментов для гладкой оболочки и подкрепляющих ребер введены согласно [5]. Уравнения колебаний дополняются соответствующими естественными граничными и начальными условиями.

Численный алгоритм. Исходные уравнения представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по переменным s_1, s_2, t при наличии пространственных разрывов по координате s_2 . Исходя из этого, численный алгоритм решения исходной задачи строится следующим образом: ищется решение в гладкой области эллипсоидальной оболочки и на линиях пространственных разрывов [5]. Разностный алгоритм основан на применении интегро-интерполяционного метода построения разностных схем по пространственным координатам и явной конечно-разностной аппроксимации по временной координате [7].

Анализ результатов численных исследований. В качестве числового примера рассматривалась задача вынужденных колебаний поперечно подкрепленной части эллипсоидальной оболочки с жестко защемленными краями в области $D = \{\alpha_{10} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1N}, \alpha_{20} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{2N}\}$ при действии распределенной нормальной нагрузки $P_3(\alpha_1, \alpha_2, t)$, которая имеет вид

$$P_3(\alpha_1, \alpha_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где A – амплитуда нагрузки, T – длительность нагрузки. В расчетах полагалось $A = 10^6 \text{ Па}$; $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$.

Краевые условия имеют вид

$$\bar{U}(\alpha_{10}, \alpha_2) = \bar{U}(\alpha_{1N}, \alpha_2) = 0; \quad \bar{U}(\alpha_1, \alpha_{20}) = \bar{U}(\alpha_1, \alpha_{2N}) = 0.$$

Начальные условия для всех компонент обобщенного вектора перемещений нулевые при $t = 0$. Задача рассматривалась при следующих геометрических и физико-механических параметрах исходной конструкции:

$$\alpha_{10} = \frac{\pi}{12}; \quad \alpha_{1N} = \pi - \frac{\pi}{12}; \quad \alpha_{20} = -\frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{2N} = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{a}{b} = 1,5; \quad \text{или} \quad \frac{b}{a} = 1,5;$$

$$E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \nu = 0,33; \quad \rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Физико-механические параметры подкрепляющих элементов:

$$E_j = E_1; \quad \rho_j = \rho.$$

Поперечные подкрепляющие элементы располагались вдоль по координате α_2 в сечениях

$$\alpha_{1j} = \frac{7}{24}\pi + \frac{5}{24}\pi j, \quad j = 0, 1, 2.$$

На рис. 1 – 2 приведені залежності величини ε_{22} від часової координати t в точці $(\alpha_1 = \pi/2; \alpha_2 = 0)$, в якій ε_{22} досягає свого максимального по модулю значення на часовому інтервалі $t = 20T$.

На рис. 1 – 2 крива з індексом 1 відповідає випадку зовнішнього розміщення ребер, а крива з індексом 2 – випадку внутрішнього розміщення ребер.

На рис. 1 приведені залежності величини ε_{22} від часової координати t в точці $(\alpha_1 = \pi/2; \alpha_2 = 0)$ для випадку $\frac{a}{b} = 1,5$.

На рис. 2 приведені залежності величини ε_{22} від часової координати t в точці $(\alpha_1 = \pi/2; \alpha_2 = 0)$ для випадку $\frac{b}{a} = 1,5$.

Згідно графічного матеріалу, спосіб розміщення підкріплюючих ребер приводить в ряді випадків до різниці по максимальним амплітудах для величини ε_{22} :

для випадку $\frac{a}{b} = 1,5$ різниця досягає 1,2 рази;

для випадку $\frac{b}{a} = 1,5$ різниця досягає 1,1 рази.

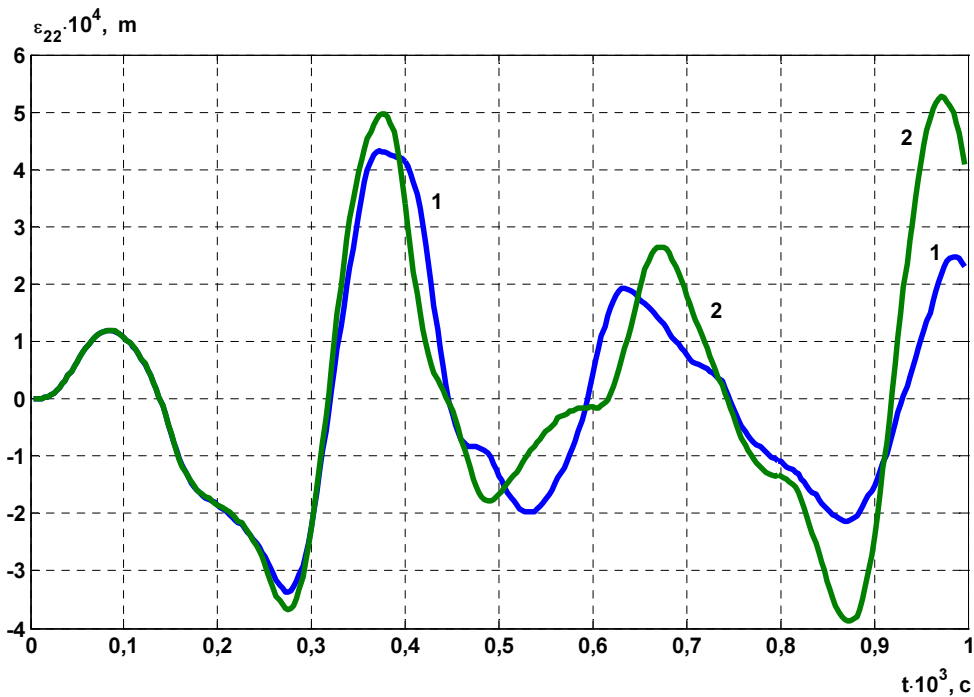


Рисунок 1 – залежність величини ε_{22} від часової координати t в точці

$$(\alpha_1 = \pi/2; \alpha_2 = 0) \text{ для випадку } \frac{a}{b} = 1,5$$

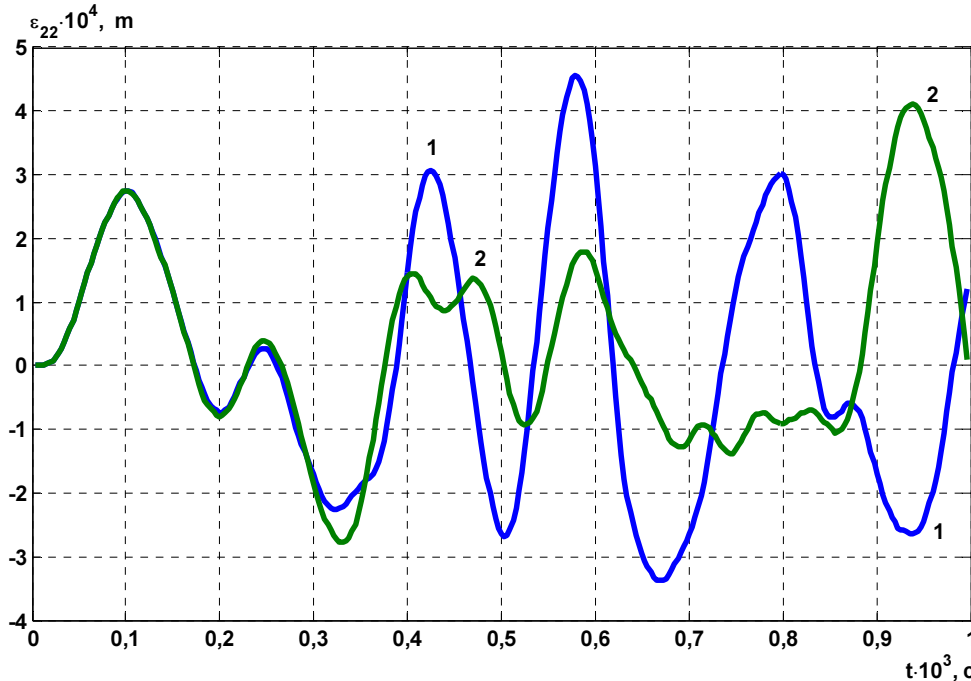


Рисунок 2 – зависимость величины ε_{22} от временной координаты t в точке

$$\left(\alpha_1 = \frac{\pi}{2}; \alpha_2 = 0\right) \text{ для случая } \frac{b}{a} = 1,5$$

Выводы. Таким образом, учет способа размещения подкрепляющих ребер при выше указанных геометрических и физико-механических параметрах конструкции, значительно влияет на ее деформированное состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И.Я. Динамика ребристых оболочек / Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Паламарчук В.Г. – К.: Наук. думка, 1983. – 204с.
2. Амиро И.Я. Колебания ребристых оболочек вращения / Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Ревуцкий В.Н. – К.: Наук. думка, 1988. – 171 с.
3. Амиро И.Я. Учет дискретного размещения ребер при изучении напряженно – деформированного состояния, колебаний и устойчивости ребристых оболочек (обзор) / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 3 – 22.
4. Луговой П.З. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. – К.: Издательско-полиграфический центр “Киевский университет”, 2005. – 536 с.
5. Мейш В.Ф. К расчету неосесимметричных колебаний дискретно подкрепленных поперечными ребрами гибких эллипсоидальных оболочек при нестационарных нагрузках / В.Ф.Мейш, Н.В. Майбородина // Прикл. механика. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 63 – 73.
6. Майбородина Н.В. Влияние геометрической нелинейности на колебания подкрепленных ребрами эллипсоидальных оболочек при нестационарной нагрузке /Н.В. Майбородина, В.Ф. Мейш // Проблеми обчислюваної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011.– Вип. 17. С. 188 – 194.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656с.

Поступила в редколлегию 22.02.2013