$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ t\to\infty\\ \varepsilon t\to u}}\left\{M_k^{\varepsilon}(t,Y)-\sum_{\nu=1}^{\infty}p_{k\nu}(u)\frac{1}{m_\nu}T_\nu(Y)\right\}=0,$$

де $T_k = P_k\int_0^{\tau^0} M_k(t)e^{A_k t}dt$, $k=1,2,\ldots$, або

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ t\to\infty\\ \varepsilon t\to u}} M^{\varepsilon}(t,Y)=e^{u\frac{C}{M}}M^{-1}T(Y).$$

T – вектор-стовпчик з компонентами T_k.

Висновки. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язку системи лінійних дифференціальних рівнянь з коефіцієнтами, які залежать від напівмарківського процессу з скінченною множиною станів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Валеев К.Г. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами / К.Г. Валеев, О.Л. Карелова, В.И. Горелов. – М.: Изд-во РУДН, 1996. – 258с.
2. Дегтярь С.В. Перехідні явища в теорії марковського відновлення / С.В. Дегтярь, В.Г. Дегтярь // Вісник НТУ. – 2009. – №19 – С.275 – 278.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 539.3

БАБИЧ С.Ю., д.т.н., профессор
ДЕГТЯРЬ С.В., к.физ.-мат.н., доцент
КУЛИК А.Б., к. физ.-мат. н., доцент
ЩЕКАНЬ Н.П., ассистент

Киевский национальный экономический университет им. В. Гетьмана

ДВЕ СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛОЯ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Введение. В настоящее время по проблемам, относящимся к смешанным задачам для предварительно напряженных тел (контактные задачи, задачи для трещин), получены результаты по широкому кругу вопросов. Актуальность таких исследований не вызывает сомнений, так как начальные (остаточные) напряжения практически присутствуют во всех элементах конструкций. Как известно, начальные напряжения имеют различную природу. Так они возникают в элементах конструкций в результате технологических операций при их изготовлении и сборке, в земной коре вследствие действия геостатических и геодинамических сил, в композитных материалах при технологических процессах их создания, в кровеносных сосудах живых организмов. Начальные напряжения необходимо учитывать при решении задач о деформировании грунтов (особенно мёрзлых). Кроме того, в упруго пластических телах также могут присутствовать внутренние остаточные напряжения после снятия нагрузок. Иногда целесообразно преднамеренно создавать начальные напряжения (остаточные и технологические) для компенсации тех напряжений, которые возникают в элементах конструкций в процессе работы, и повышения их прочностных характеристик.

Постановка задачи и основные соотношения. В работах [1, 2] дана постановка и предложены методы решения осесимметричной контактной задачи для упругого предварительно напряженного слоя и задачи о трещине нормального отрыва в слое с начальными напряжениями.

В первой задаче исследуется осесимметричная контактная задача для жесткого кругового штампа, действующего без трения на упругий слой с начальными напряжениями. Вторая задача посвящена этому же слою, в котором имеется трещина нормального отрыва.

Отметим, что под трещинами нормального отрыва, как и в механике хрупкого разрушения тел без начальных напряжений, понимаются трещины, к поверхности которых симметрично относительно плоскости, в которой расположена трещина, приложена нормальная нагрузка. Все исследования в обеих задачах проводятся в общей форме для сжимаемых и несжимаемых материалов с однородными начальными напряжениями при произвольной структуре упругого потенциала для случаев равных и неравных корней определяющего уравнения.

Здесь используются общие решения статических задач линеаризованной теории упругости, построенные А.Н. Гузем[3]. Ограничимся случаем равных корней определяющего уравнения [1]. Согласно [1] представление перемещений через гармонические функции $\varphi_j(y_1, y_2, z_j)$ в круговых цилиндрических координатах имеет вид

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2) + z_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_1} - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta};$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{z_1}{r}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta \partial z_1} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}; \qquad (1)$$

$$u_3 = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_1^2}\right) + \frac{m_2 - 1}{\sqrt{n_1}}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}.$$

При этом выражения для определения составляющих вектора напряжений $\tilde{\theta}$ при $y_3 = const$ через гармонические функции $\varphi_j(y_1, y_2, z_j)$ можем записать

$$\tilde{\theta}_{33} = c_{44}\left\{\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}[(1+m_1)l_1\varphi_1 + (1+m_2)l_2\varphi_2] + (1+m_1)l_1 z_1 \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial z_1^3}\right\};$$

$$\tilde{\theta}_{3r} = c_{44}\left\{\frac{1}{\sqrt{n_1}}\frac{\partial^2}{\partial r \partial z_1}[(1+m_1)\varphi_1 + (1+m_2)\varphi_2] + \frac{(1+m_1)}{\sqrt{n_1}}\frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial r \partial z_1^2} - \frac{1}{r\sqrt{n_3}}\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \theta \partial z_3}\right\}; \qquad (2)$$

$$\tilde{\theta}_{3\theta} = c_{44}\left\{\frac{1}{r\sqrt{n_1}}\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z_1}[(1+m_1)\varphi_1 + (1+m_2)\varphi_2] + (1+m_1)z_1 \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial \theta \partial z_1^2} + \frac{1}{\sqrt{n_3}}\frac{\partial^2 \varphi_3}{\sqrt{n_3}\,\partial r \partial z_3}\right\}.$$

Величины c_{44}, n_j, m_j, l_j $(j=1,2)$ определяются из выражений [1]. Данные задачи родственные в том смысле, что в отличие от граничных условий, они решаются с использованием преобразований Ханкеля с последующим сведением их к парным интегральным уравнениям. Последние уравнения приводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Поскольку точных решений уравнения Фредгольма [4] не существует, то в общем случае при решении интегрального уравнения Фредгольма второго рода приходится прибегать к численным методам, для эффективной реализации которых существенным является непрерывность и ограниченность ядра уравнения.

В данной работе исследовано при каких значениях коэффициентов удлинений λ_1 (параметр, который характеризует предварительную напряженность) ядро интегрального уравнения Фредгольма имеет разрыв.

Для контактной задачи уравнение Фредгольма имеет вид [1]

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^a \varphi(t)[G(t+x,\lambda_i) + G(t-x,\lambda_i)]dt = F(x), (0 \le x \le a). \qquad (3)$$

Численные результаты в данной работе выполнены для конкретных видов упругих потенциалов.Здесь приведены результаты численного определения коэффициента интенсивности напряжений для равных (потенциал гармонического типа) и неравных (потенциал Бартенева-Хазановича) корней определяющего уравнения в зависимости от начальных напряжений (табл.1).

Таблица 1 – Распределение коэффициента интенсивности напряжений от величины начальных напряжений

P	Потенциал гармонического типа				Потенциал Бартенева-Хазановича
	ν=0,1	ν=0,2	ν=0,3	ν=0,4	
λ_1=0,8					
0,1	0,9692	0,9670	0,9650	0,9631	0,9135
0,4	0,8836	0,8751	0,8672	0,8598	0,7803
0,5	0,9291	0,9215	0,9146	0,9084	0,8718
0,6	1,006	1,001	0,9959	0,9917	0,9894
0,8	1,237	1,239	1,240	1,242	1,246
1,0	1,673	1,750	1,863	2,029	2,034
1,5	3,374	3,597	3,742	3,918	4,098
2,0	7,350	8,742	9,859	9,983	11,69

Здесь P – отношение диаметра трещины к толщине слоя принималось равным 2,0; 1,5; 1,0; 0,8; 0,6; 0,5; 0,4; 0,2 и 0,1; ν - коэффициент Пуассона; λ_1=0,8 – коэффициент, характеризующий предварительную напряженность.

Выводы. Как видно из приведенной таблицы, наиболее сильное влияние начальных напряжений на коэффициент интенсивности напряжений проявляется для относительно тонкого слоя (при P=2,0), а для потенциала Бартенева-Хазановича и при P=1,5) дляλ_1 равном 0,8, т.е. наиболее близком к значениям, являющимся корнями уравнений [2]. Другой максимум влияния начальных напряжений на коэффициент интенсивности напряжений наблюдается при P=0,4 и λ_1=1,3 [2]. Причем величина K_I/K_I^0для λ_1>1 растет при уменьшении P от 0,8 до 0,4, а затем при дальнейшем уменьшении P начинает убывать. Предельному случаю неограниченного упругого тела (P=0) соответствует прямая K_I/K_I^0=1 (K_I и K_I^0 – соответственно коэффициенты интенсивности напряжений в слое без и с начальными напряжениями). Как видно из таблицы значения коэффициента интенсивности напряжений для слоя уже при значении отношения диаметра трещины к толщине слоя P равном 0,1 близки к соответствующим значениям для коэффициента интенсивности напряжений для неограниченного упругого тела. Контактные характеристики в случае предварительно напряженного слоя вычислялись для потенциала Трелоара (несжимаемые тела) и для потенциала гармонического типа (сжимаемые тела). Как следует из выполненных расчетов и [5,6], зависимость контактных характеристик довольно существенная, особенно для несжимаемого слоя (полупространства).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчуг «Press-line», 2007. – 795с.
2. Примаченко О.В., Бабич С.Ю. Осесимметричная задача о трещине нормального отрыва в предварительно напряженном слое // Прикладная механика. – 1992. - 28, №7. – с.18-24
3. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук.думка, 1983. -296с.
4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 403с.
5. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. – К.: Вища школа, 1995. – 304с.
6. Cuz' A.N., Babich S.Yu., Rudnitsky V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research // Applied Mechanics Reviews, vol. 51, no 5, May 1998.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 517.5

ДЕРЕЦ Е. В. к.физ.-мат.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

О ПРИБЛИЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Введение. Методы приближения, задаваемые линейными операторами, находят применение в различных вопросах математического анализа, теории приближения и математической статистики. Особое место занимают результаты, связанные с изучением аппроксимационных и асимптотических свойств линейных положительных операторов.

Пусть H_1^{ω} - множество 2π-периодических измеримых функций $f(t)$ таких, что

$$\omega(f,t)_1 \overset{def}{=} \sup_{|h|\le t} \int_0^{2\pi} |f(x+h)-f(x)|\,dx \le \omega(t),$$

где $\omega(t)$ - заданный модуль непрерывности, $W^r H_1^{\omega}$ $(r=1,2,...)$ - множество 2π-периодических функций $f(t)$, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и $f^{(r)}(t) \in H_1^{\omega}$.

Обозначим через $A_n(f,t)$ оператор вида

$$A_n(f,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)u_n(t-\tau)d\tau,$$