ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчуг «Press-line», 2007. – 795с.
2. Примаченко О.В., Бабич С.Ю. Осесимметричная задача о трещине нормального отрыва в предварительно напряженном слое // Прикладная механика. – 1992. - 28, №7. – с.18-24
3. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук.думка, 1983. -296с.
4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 403с.
5. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. – К.: Вища школа, 1995. – 304с.
6. Cuz' A.N., Babich S.Yu., Rudnitsky V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research // Applied Mechanics Reviews, vol. 51, no 5, May 1998.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 517.5

ДЕРЕЦ Е. В. к.физ.-мат.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

О ПРИБЛИЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Введение. Методы приближения, задаваемые линейными операторами, находят применение в различных вопросах математического анализа, теории приближения и математической статистики. Особое место занимают результаты, связанные с изучением аппроксимационных и асимптотических свойств линейных положительных операторов.

Пусть H_1^{ω} - множество 2π-периодических измеримых функций $f(t)$ таких, что

$$\omega(f,t)_1 \overset{\text{def}}{=} \sup_{|h|\le t} \int_0^{2\pi} | f(x+h) - f(x) | \, dx \le \omega(t),$$

где $\omega(t)$ - заданный модуль непрерывности, $W^r H_1^{\omega}$ $(r = 1,2,...)$ - множество 2π-периодических функций $f(t)$, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и $f^{(r)}(t) \in H_1^{\omega}$.

Обозначим через $A_n(f,t)$ оператор вида

$$A_n(f,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) u_n(t-\tau) d\tau ,$$

где $u_n(t) = 1/2 + \sum_{k=1}^{n} p_k \cos kt$, $u_n(t) \ge 0$ для всех t.

Для выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$ точное значение величины $\sup_{f \in W^r H_1^\omega} \|f - A_n(f)\|_\infty$ при нечетных r вычислено в [1], при $r = 2$ в [2]. В настоящей работе найдено значение $\sup_{f \in W^r H_1^\omega} \|f - A_n(f)\|_\infty$ для четных $r \ge 6$ и выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$.

Для каждого оператора $A_n(f,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau) u_n(t-\tau) d\tau$ обозначим через $g(A_n, t)$ нечетную 2π-периодическую функцию, при $t \in [-\pi, 0)$ равную $g(A_n, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{t} u_n(\tau) d\tau$, при каждом $k = 1,2,...$ в среднем равный нулю k-й периодический интеграл от функции $g(A_n, t)$ будем обозначать через $G_k(A_n, t)$, таким образом

$$G_k(A_n, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(A_n, t) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos(\nu(t-x) + r\pi/2)}{\nu^r} dt.$$

Основным результатом работы является следующая теорема

Теорема 1. Для всех $r = 6, 8, ...$ и любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ и линейного положительного полиномиального оператора $A_n(f,t)$

$$\sup_{f \in W^r H_1^\omega} \|f - A_n(f)\|_\infty = \int_0^{\xi} \omega'(2t) |G_{r-1}(A_n, t)| dt, \qquad (1)$$

где $\xi \in (0, \pi)$ - нуль функции $G_{r-1}(A_n, t)$.

Вспомогательные результаты

Лемма 1. Пусть $G_2(A_n, t)$ - описанная выше функция, порожденная ядром оператора $u_n(\tau)$. Тогда справедливы следующие утверждения

1) $G_2(A_n, 0) = G_2(A_n, \pi) = 0$,

2) $G_2(A_n, t)$ выпукла вверх на $[0, \pi]$

3) $G_2(A_n, t) > G_2(A_n, \pi - t) > 0$ для всех $t \in (0, \pi/2)$.

Доказательство. Из способа построения функции $G_2(A_n, t)$ следует, что $G_2(A_n, t) = \int_0^t G_1(A_n, y) dy$, поэтому $G_2(A_n, 0) = 0$, $G_2(A_n, \pi) = \int_0^{\pi} G_1(A_n, y) dy = 0$.

Выпуклость вверх функции $G_2(A_n, t)$ на $[0, \pi]$ следует из строгого убывания производной $\frac{d}{dt} G_2(A_n, t) = G_1(A_n, t)$ на промежутке $[0, \pi]$. Кроме того, очевидно, для всех $t \in (0, \pi/2)$ выполняются неравенства $G_2(A_n, t) > 0$ и $G_2(A_n, \pi - t) > 0$. Рассмотрим функцию $h(t) = G_2(A_n, t) - G_2(A_n, \pi - t)$. Для доказательства леммы остаётся доказать, что $h(t) > 0$ для всех $t \in (0, \pi/2)$. Для любого $t \in (0, \pi/2)$

$$h'(t) = G_1(A_n, t) + G_1(A_n, \pi - t),$$

$$h''(t)=g(A_n,t)-g(A_n,\pi-t)$$

По построению функция $g(A_n,t)$ строго возрастает на $(0,\pi)$, поэтому $h''(t)<0$ на промежутке $(0,\pi/2)$, следовательно, $h(t)$ выпукла вверх на этом промежутке, при этом $h(0)=h(\pi/2)=0$. Поскольку $h(t)$ не является тождественным нулем на промежутке $[0,\pi/2]$, из этого следует, что $h(t)>0$ для всех $t\in(0,\pi/2)$, что и требовалось доказать.

Теорема А. [3] Пусть $\psi(t)$ - $2\pi/n$-периодическая четная функция, равная в среднем нулю на периоде, $k\in N$, производная $\psi^{(2k+1)}(t)$ существует и непрерывна, $\psi^{(2k+1)}(0)=\psi^{(2k+1)}(\pi/n)=0$, $\left|\psi^{(2k+1)}(t)\right|$ выпукла вверх на $[0,\pi/n]$, $\left|\psi^{(2k+1)}(t)\right|>\left|\psi^{(2k+1)}(\pi/n-t)\right|$ для всех $t\in(0,\pi/(2n))$.

Тогда для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$

$$\sup_{f\in H_1^{\omega}}\int_0^{2\pi}\psi(t)f(t)dt=\int_0^{\xi}|\psi(t)|\,\omega'(2t)dt \qquad (2)$$

где $\xi\in[0,\pi/n]$ - нуль функции $\psi(t)$. Верхнюю грань в (2) реализуют функции вида $C+f(\psi,\omega,x)$, где C – произвольная постоянная, а $f(\psi,\omega,x)$ - $2\pi/n$-периодическая чётная функция, определенная равенством

$$f(\psi,\omega,x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sgn}\psi(\xi/2)}{2n}\omega'(2x), & \text{если } x\in(0,\xi]\\ 0, & \text{если } x\in(\xi,\pi/n]\end{cases}$$

Основные результаты

Доказательство теоремы 1. Пусть $r\in\{6,8,...\}$, $f\in W^rH_1^{\omega}$. Интегрируя по частям, нетрудно получить следующие равенства

$$f(t)-A_n(f,t)=f(t)-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)u_n(t-\tau)d\tau=f(t)-f(t)g(A_n,-0)+f(t)g(A_n,+0)-$$

$$-\int_0^{2\pi}f'(\tau)g(A_n,t-\tau)d\tau=-\int_0^{2\pi}f'(\tau)g(A_n,t-\tau)d\tau=-\int_0^{2\pi}f'(t-z)g(A_n,z)dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}f''(t-z)G_1(A_n,z)dz=-\int_0^{2\pi}f'''(t-z)G_2(A_n,z)dz.$$

Продолжая этот процесс, в конце получаем известное равенство

$$f(t)-A_n(f,t)=(-1)^r\int_0^{2\pi}f^{(r)}(t-z)G_{r-1}(A_n,z)dz,$$

следовательно, так как множество функций H_1^{ω} вместе с каждой функцией $f(t)$ содержит и все её сдвиги,

$$\sup_{f\in W^rH_1^{\omega}}\|f-A_n(f)\|_{\infty}=\sup_{f\in H_1^{\omega}}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(t)G_{r-1}(A_n,z)dt\right|.$$

Поскольку множество функций H_1^{ω} вместе с каждой функцией $f(t)$ содержит и функцию $-f(t)$, справедливо равенство

$$\sup_{f\in W^r H_1^\omega} \|f - A_n(f)\|_\infty = \sup_{f\in H_1^\omega} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) G_{r-1}(A_n,t)dt. \qquad (3)$$

Таким образом, доказательство теоремы сводится к вычислению величины $\sup_{f\in H_1^\omega} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) G_{r-1}(A_n,t)dt$. Положим $k = r/2 - 2$, тогда $G_{r-1}^{(2k+1)}(A_n,t) = G_{r-1}^{(r-3)}(A_n,t) = G_2(A_n,t)$, следовательно, в силу леммы 1 при любом четном $r \ge 6$ функция $G_{r-1}(A_n,t)$ удовлетворяет условиям теоремы А. Применяя теорему А к правой части (3), получаем (1). Теорема полностью доказана.

Выводы

В настоящей работе найдена погрешность приближения класса $W^r H_1^\omega$ линейными положительными полиномиальными операторами при любом четном $r \ge 6$ и любом выпуклом модуле непрерывности $\omega(t)$. При каждом $r \in N$ решение такой задачи сводится к вычислению величины $\sup_{f\in H_1^\omega} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) G_{r-1}(A_n,t)dt$, где функция $G_{r-1}(A_n,t)$ определяется ядром оператора. При этом при чётных r отсутствие симметрии функции $G_{r-1}(A_n,t)$ значительно усложняет задачу. В настоящее время автором получено обобщение теоремы А на случай $k = 0$, что позволяет доказать теорему 1 при $r = 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доронин В. Г., Лигун А. А. О точном решении некоторых экстремальных задач на классах функций, определяемых интегральным модулем непрерывности // Докл. АН СССР.–1980.–251, №1.– С. 16–19.
2. Дерец Е. В. О приближении некоторых классов периодических дифференцируемых функций линейными положительными полиномиальными операторами // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2006. – С. 20–24.
3. Дерец Е. В. О точном решении некоторых экстремальных задач на классах функций, определенных мажорантой интегрального модуля непрерывности //Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. –2010.– №6/1.–Т. 18 – С. 102–109.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 517.5

ДАВИДЧИК А. Н. к.т.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введение. Задачи приближения классов функций состоят в исследовании величин

$$E(\aleph, M_n) \underline{\underline{def}} \sup_{f\in\aleph} E(f, M_n) \qquad (1)$$

или величина