

трансформаційного зміцнення, який при даних параметрах навантаження суттєво більший, ніж деформаційний.

ЛІТЕРАТУРА

1. Rubio-Gonzales C., Osana J. L., Gomes-Rosas G. Effect of laser shock processing an fatigue crack growth and fracture toughness of 6061-T6 aluminum alloy // Mater. Sci. & Engng. – 2004. – Vol. 386, №3. – P. 291–295.
2. Yilbas B. S. Laser pulse heating and flexural wave generation during treatment of metallic surfaces // J. Materials Processing Techn. – 2003. – Vol. 141. – P. 1–8.
3. Жук Я. О., Сенченков І. К., Васильєва Л. Я. Вплив мікроструктурних перетворень на напружено-деформований стан локально опроміненого сталевго диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, №1. – С. 101–115.
4. Оксенчук Н. Д., Доля О. В. Чисельне дослідження мікроструктурних перетворень та напруженого стану півпростору при термомеханічному навантаженні // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Збірник наукових праць. — Дніпропетровськ: Ліра. — 2012. — Вип.20. — С. 267–273.
5. Сенченков І. К., Оксенчук Н. Д. Моделирование неизотермического течения с учетом зависимости пластических свойств от микроструктуры материала // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. — Т. 55, №1. – С. 138–144.
6. Moreno V., Jordan E. H. Prediction of material thermomechanical response with a unified viscoplastic constitutive model // Int. J. of Plast. – 1986. – Vol. 2. – P. 223–245.
7. Шоршоров М. Х., Белов В. В. Фазовые превращения и изменения свойств стали при сварке. Атлас. – Москва: Наука, 1972. – 220 с.
8. Гольденблат И. И., Безухов Н. И., Бажанов И. И. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. - М.: Машиностроение, 1965. – 568 с.
9. Махненко В. И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – Киев: Наук. думка, 1976. — 326 с.
10. Попов А. А., Попова А. Е. Справочник термиста. Изотермические и термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита. – М. – С.: - ГНТИ Машиностр. лит., 1961. – 430 с.
11. Юрьев С.Ф. Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита. – М.: Металлургиздат, 1950. – 48 с.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 539.3

СТЕБЛЯНКО П.О. д.фіз.-мат. н., професор
КРАВЧУК Т.В., аспірант

Черкаський національний університет

ПОБУДОВА ТА АНАЛІЗ СТИКУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ, ПОБУДОВАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ДВОВИМІРНИХ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ

Вступ. В останні роки різко зріс інтерес до класичних методів раціональної апроксимації функцій. Це пов'язано з тим, що такі апроксимації знайшли різноманітне застосування в обчислювальних задачах теоретичної фізики та механіки. Більшість чисельних методів розв'язування задач математичного аналізу зв'язана з апроксимацією функцій. Серед них на першому місці стоїть проблема представлення і зберігання геометричної інформації в самих різноманітних областях, чи то природничі науки, чи то техніка, чи архітектура. Особливо широке застосування сплайни отримали

в техніці як апарат для математичного моделювання поверхонь деталей і агрегатів складних форм.

Мета роботи – проаналізувати методи сплайн-функцій у випадку їх застосування до інтерполяції поверхонь, склавши інтерполяційний вираз для апроксимації поверхонь та дослідивши розриви між двома інтерполяційними поверхнями, які сполучаються в чотирьох точках.

Постановка задачі інтерполяції. Нехай задані сітка Δ :

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{m-1} < \xi_m = b, \quad c = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_{n-1} < \eta_n = d$$

і набір чисел $\omega_{ij}, i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$.

Побудуємо на прямокутнику $R = [a, b] \times [c, d]$ гладку функцію $\omega(\xi, \eta)$, яка приймає у вузлах сітки Δ задані значення:

$$\omega(\xi_i, \eta_j) = \omega_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

Сформульована задача інтерполяції полягає у відновленні функції, заданій за допомогою таблиці. Така задача має безліч різних розв'язків. Накладаючи на конструйовану функцію додаткові умови, можна добитися необхідної однозначності [1]

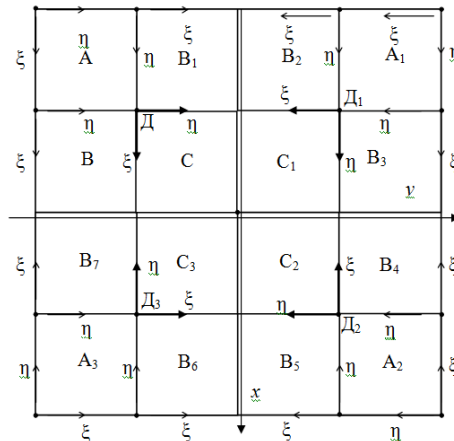


Рисунок 1 – Область визначення базисного напруженого сплайна

В кожній допоміжній області двовимірний базисний сплайн розшукуємо у вигляді наступного добутку

$$S_{2D} = \left[a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 \right] \cdot \left[b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \eta^3 \right], \quad (2)$$

де $\xi \in [0; 1], \eta \in [0; 1]$, а для визначення коефіцієнтів $a_i, b_i, i = 0; 1; 2; 3$ використовуються певні умови.

Поверхня (2) симетрична щодо осей координат і складається з шістнадцяти «склеєних» частин трьох типів [1]. Допоміжні області А, В, С і так далі разом з локальними системами координат ξ, η показані на малюнку 1.

В області А поверхня задається функцією

$$S_{2D}^A(\xi, \eta) = \frac{1}{24} \cdot \xi^3 \cdot \eta^3.$$

В області С поверхня задається функцією

$$S_{2D}^C(\xi, \eta) = \frac{1}{24} \cdot \left[1 + 3 \cdot (\xi + \xi^2 - \xi^3) \right] \cdot \eta^3.$$

В області В поверхня задається функцією

$$S_{2D}^B(\xi, \eta) = \frac{1}{24} \cdot \left[1 + 3 \cdot (\xi + \xi^2 - \xi^3) \right] \cdot \left[1 + 3 \cdot (\eta + \eta^2 - \eta^3) \right].$$

Інтерполяція поверхонь. Нехай задані сітка Δ , і набір значень двовимірної функції, що інтерполюється ω_{ij} , $i = 0,1,2,3$, $j = 0,1,2,3$. Необхідно побудувати на прямокутнику $R = [0,1] \times [0,1]$ гладку поверхню $\omega(\xi, \eta)$, яка приймає у вузлах сітки Δ задані значення:

$$\begin{aligned} \omega_{00} &= \omega(0,0); & \omega_{10} &= \omega\left(\frac{1}{3}, 0\right); & \omega_{20} &= \omega\left(\frac{2}{3}, 0\right); & \omega_{30} &= \omega(1,0); \\ \omega_{01} &= \omega\left(0, \frac{1}{3}\right); & \omega_{11} &= \omega\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right); & \omega_{21} &= \omega\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right); & \omega_{31} &= \omega\left(1, \frac{1}{3}\right); \\ \omega_{02} &= \omega\left(0, \frac{2}{3}\right); & \omega_{12} &= \omega\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); & \omega_{22} &= \omega\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right); & \omega_{32} &= \omega\left(1, \frac{2}{3}\right); \\ \omega_{03} &= \omega(0,1); & \omega_{13} &= \omega\left(\frac{1}{3}, 1\right); & \omega_{23} &= \omega\left(\frac{2}{3}, 1\right); & \omega_{33} &= \omega(1,1). \end{aligned}$$

Маємо рівномірну сітку розбиття (Рис.2) :

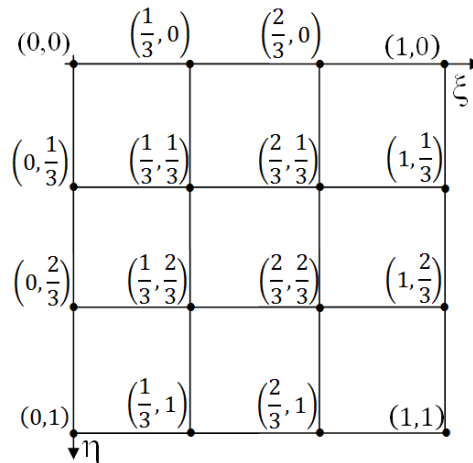


Рисунок 2 – Рівномірна сітка розбиття

Для побудови заданої поверхні W використаємо бікубічний інтерполяційний сплайн, загальне рівняння якого має вигляд:

$$\begin{aligned} S(\xi, \eta) &= c_1 \xi^3 \eta^3 + c_2 \xi^3 \eta^2 + c_3 \xi^3 \eta + c_4 \xi^3 + c_5 \xi^2 \eta^3 + c_6 \xi^2 \eta^2 + c_7 \xi^2 \eta + c_8 \xi^2 + c_9 \xi \eta^3 + \\ &+ c_{10} \xi \eta^2 + c_{11} \xi \eta + c_{12} \xi + c_{13} \eta^3 + c_{14} \eta^2 + c_{15} \eta + c_{16} \end{aligned} \quad (3)$$

Задача зводиться до відшукування коефіцієнтів: c_i , $i = 1,2,\dots,16$.

Розв'яжемо цю систему матричним способом. Складемо матричне рівняння: $A \cdot C = W$. Матриця коефіцієнтів C має вигляд $C = A^{-1} \cdot W$.

Для того щоб знайти коефіцієнти c_i інтерполяційного сплайна, підставлятимемо у рівняння (3) координати заданих 16-ти точок, в результаті чого отримаємо систему 16-ти рівнянь із 16-ма невідомими:

$$\begin{cases}
 \omega_{00} = c_{16} \\
 \omega_{01} = \frac{1}{27}c_{13} + \frac{1}{9}c_{14} + \frac{1}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{02} = \frac{8}{27}c_{13} + \frac{4}{9}c_{14} + \frac{2}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{03} = c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{10} = \frac{1}{27}c_4 + \frac{1}{9}c_8 + \frac{1}{3}c_{12} + c_{16} \\
 \omega_{11} = \frac{1}{3^6}c_1 + \frac{1}{3^5}c_2 + \frac{1}{3^4}c_3 + \frac{1}{3^3}c_4 + \frac{1}{3^5}c_5 + \frac{1}{3^4}c_6 + \frac{1}{3^3}c_7 + \frac{1}{3^2}c_8 + \frac{1}{3^4}c_9 + \frac{1}{3^3}c_{10} + \frac{1}{3^2}c_{11} + \frac{1}{3}c_{12} + \frac{1}{3^3}c_{13} + \frac{1}{3^2}c_{14} + \frac{1}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{12} = \frac{8}{3^6}c_1 + \frac{4}{3^5}c_2 + \frac{2}{3^4}c_3 + \frac{1}{3^3}c_4 + \frac{8}{3^5}c_5 + \frac{4}{3^4}c_6 + \frac{2}{3^3}c_7 + \frac{1}{3^2}c_8 + \frac{8}{3^4}c_9 + \frac{4}{3^3}c_{10} + \frac{2}{3^2}c_{11} + \frac{1}{3}c_{12} + \frac{8}{3^3}c_{13} + \frac{4}{3^2}c_{14} + \frac{2}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{13} = \frac{1}{3^3}c_1 + \frac{1}{3^3}c_2 + \frac{1}{3^3}c_3 + \frac{1}{3^3}c_4 + \frac{1}{3^2}c_5 + \frac{1}{3^2}c_6 + \frac{1}{3^2}c_7 + \frac{1}{3^2}c_8 + \frac{1}{3}c_9 + \frac{1}{3}c_{10} + \frac{1}{3}c_{11} + \frac{1}{3}c_{12} + c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{20} = \frac{8}{27}c_4 + \frac{4}{9}c_8 + \frac{2}{3}c_{12} + c_{16} \\
 \omega_{21} = \frac{8}{3^6}c_1 + \frac{8}{3^5}c_2 + \frac{8}{3^4}c_3 + \frac{8}{3^3}c_4 + \frac{4}{3^5}c_5 + \frac{4}{3^4}c_6 + \frac{4}{3^3}c_7 + \frac{4}{3^2}c_8 + \frac{2}{3^4}c_9 + \frac{2}{3^3}c_{10} + \frac{2}{3^2}c_{11} + \frac{2}{3}c_{12} + \frac{1}{3^3}c_{13} + \frac{1}{3^2}c_{14} + \frac{1}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{22} = \frac{64}{3^6}c_1 + \frac{32}{3^5}c_2 + \frac{16}{3^4}c_3 + \frac{8}{3^3}c_4 + \frac{32}{3^5}c_5 + \frac{16}{3^4}c_6 + \frac{8}{3^3}c_7 + \frac{4}{3^2}c_8 + \frac{16}{3^4}c_9 + \frac{8}{3^3}c_{10} + \frac{4}{3^2}c_{11} + \frac{2}{3}c_{12} + \frac{8}{3^3}c_{13} + \frac{4}{3^2}c_{14} + \frac{2}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{23} = \frac{8}{3^3}c_1 + \frac{8}{3^3}c_2 + \frac{8}{3^3}c_3 + \frac{8}{3^3}c_4 + \frac{4}{3^2}c_5 + \frac{4}{3^2}c_6 + \frac{4}{3^2}c_7 + \frac{4}{3^2}c_8 + \frac{2}{3}c_9 + \frac{2}{3}c_{10} + \frac{2}{3}c_{11} + \frac{2}{3}c_{12} + c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{30} = c_4 + c_8 + c_{12} + c_{16} \\
 \omega_{31} = \frac{1}{3^3}c_1 + \frac{1}{3^2}c_2 + \frac{1}{3}c_3 + c_4 + \frac{1}{3^3}c_5 + \frac{1}{3^2}c_6 + \frac{1}{3}c_7 + c_8 + \frac{1}{3^3}c_9 + \frac{1}{3^2}c_{10} + \frac{1}{3}c_{11} + c_{12} + \frac{1}{3^3}c_{13} + \frac{1}{3^2}c_{14} + \frac{1}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{32} = \frac{8}{3^3}c_1 + \frac{4}{3^2}c_2 + \frac{2}{3}c_3 + c_4 + \frac{8}{3^3}c_5 + \frac{4}{3^2}c_6 + \frac{2}{3}c_7 + c_8 + \frac{8}{3^3}c_9 + \frac{4}{3^2}c_{10} + \frac{2}{3}c_{11} + c_{12} + \frac{8}{3^3}c_{13} + \frac{4}{3^2}c_{14} + \frac{2}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{33} = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 + c_9 + c_{10} + c_{11} + c_{12} + c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{16}
 \end{cases}$$

Знайдемо матрицю A^{-1} (для цього використаємо прикладну математичну програму):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}
 \frac{81}{4} & \frac{243}{4} & \frac{243}{4} & \frac{81}{4} & \frac{243}{4} & \frac{729}{4} & \frac{729}{4} & \frac{243}{4} & \frac{243}{4} & \frac{729}{4} & \frac{729}{4} & \frac{243}{4} & \frac{81}{4} & \frac{243}{4} & \frac{243}{4} & \frac{81}{4} \\
 \frac{81}{2} & \frac{405}{4} & -81 & \frac{81}{4} & \frac{243}{2} & \frac{1215}{4} & 243 & -243 & -\frac{243}{2} & \frac{1215}{4} & -243 & \frac{243}{4} & \frac{81}{2} & -\frac{405}{4} & 81 & -\frac{81}{4} \\
 \frac{2}{99} & \frac{4}{81} & \frac{81}{81} & \frac{4}{9} & \frac{2}{297} & \frac{4}{243} & -\frac{243}{27} & \frac{4}{297} & -\frac{243}{243} & \frac{4}{243} & -\frac{27}{27} & \frac{4}{99} & \frac{2}{81} & -\frac{4}{81} & \frac{4}{81} & \frac{4}{9} \\
 \frac{4}{9} & \frac{2}{2} & \frac{4}{4} & \frac{2}{2} & \frac{4}{2} & \frac{2}{24} & \frac{2}{2} & \frac{4}{4} & \frac{2}{2} & \frac{4}{4} & \frac{2}{2} & \frac{4}{4} & \frac{2}{2} & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & \frac{2}{2} \\
 -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{27}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{27}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{81}{2} & \frac{243}{2} & -\frac{243}{2} & \frac{81}{2} & \frac{405}{2} & \frac{1215}{2} & \frac{1215}{2} & -\frac{405}{2} & -81 & 243 & -243 & 81 & \frac{81}{2} & -\frac{243}{2} & \frac{243}{2} & -\frac{81}{2} \\
 \frac{81}{2} & -\frac{405}{2} & 162 & -\frac{81}{2} & \frac{405}{2} & \frac{2025}{4} & -405 & \frac{405}{4} & 162 & -405 & 324 & -81 & -\frac{81}{2} & \frac{405}{4} & -81 & \frac{81}{4} \\
 -\frac{99}{2} & \frac{81}{81} & -\frac{81}{2} & \frac{9}{9} & \frac{495}{4} & -\frac{405}{2} & \frac{405}{4} & -\frac{45}{2} & -99 & 132 & -81 & 18 & \frac{99}{4} & \frac{81}{2} & \frac{81}{4} & -\frac{9}{2} \\
 9 & 0 & 0 & 0 & -\frac{45}{2} & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{99}{2} & -\frac{297}{2} & \frac{297}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{81}{2} & \frac{243}{2} & -\frac{243}{2} & \frac{81}{2} & \frac{81}{2} & -\frac{243}{2} & \frac{243}{2} & -\frac{81}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{27}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{9}{2} \\
 \frac{4}{99} & \frac{4}{495} & \frac{4}{-99} & \frac{4}{99} & \frac{4}{81} & \frac{2}{-405} & \frac{2}{162} & \frac{2}{-81} & \frac{4}{-81} & \frac{4}{405} & \frac{4}{-81} & \frac{4}{81} & \frac{2}{9} & \frac{2}{-45} & \frac{2}{18} & \frac{2}{-9} \\
 \frac{121}{4} & -\frac{99}{2} & \frac{99}{4} & -\frac{11}{2} & -\frac{99}{2} & 81 & -\frac{81}{2} & \frac{9}{9} & -\frac{81}{2} & \frac{81}{4} & \frac{81}{4} & -\frac{9}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{9}{9} & -\frac{9}{2} & 1 \\
 -\frac{11}{2} & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{9}{2} & \frac{27}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 9 & -\frac{45}{2} & 18 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{11}{2} & 9 & -\frac{9}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

Коефіцієнти c_i , $i = 1, 2, \dots, 16$ мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{81}{4}\omega_{00} - \frac{243}{4}\omega_{01} + \frac{243}{4}\omega_{02} - \frac{81}{4}\omega_{03} - \frac{243}{4}\omega_{10} + \frac{729}{4}\omega_{11} - \frac{729}{4}\omega_{12} + \frac{243}{4}\omega_{13} + \frac{243}{4}\omega_{20} - \\
 &\quad - \frac{729}{4}\omega_{21} + \frac{729}{4}\omega_{22} - \frac{243}{4}\omega_{23} - \frac{81}{4}\omega_{30} + \frac{243}{4}\omega_{31} - \frac{243}{4}\omega_{32} + \frac{81}{4}\omega_{33}; \\
 c_2 &= -\frac{81}{2}\omega_{00} + \frac{405}{4}\omega_{01} - 81\omega_{02} + \frac{81}{4}\omega_{03} + \frac{243}{2}\omega_{10} - \frac{1215}{4}\omega_{11} + 243\omega_{12} - \frac{243}{4}\omega_{13} - \frac{243}{2}\omega_{20} + \\
 &\quad + \frac{1215}{4}\omega_{21} - 243\omega_{22} + \frac{243}{4}\omega_{23} + \frac{81}{2}\omega_{30} - \frac{405}{4}\omega_{31} + 81\omega_{32} - \frac{81}{4}\omega_{33}; \\
 c_3 &= \frac{99}{4}\omega_{00} - \frac{81}{2}\omega_{01} + \frac{81}{4}\omega_{02} - \frac{9}{2}\omega_{03} - \frac{297}{4}\omega_{10} + \frac{243}{2}\omega_{11} - \frac{243}{4}\omega_{12} + \frac{27}{4}\omega_{13} + \frac{297}{4}\omega_{20} - \\
 &\quad - \frac{243}{2}\omega_{21} + \frac{243}{4}\omega_{22} - \frac{27}{2}\omega_{23} - \frac{99}{4}\omega_{30} + \frac{81}{2}\omega_{31} - \frac{81}{4}\omega_{32} + \frac{9}{2}\omega_{33}; \\
 c_4 &= -\frac{9}{2}\omega_{00} + \frac{27}{2}\omega_{10} - \frac{27}{2}\omega_{20} + \frac{9}{2}\omega_{30}; \\
 c_5 &= -\frac{81}{2}\omega_{00} + \frac{243}{2}\omega_{01} - \frac{243}{2}\omega_{02} + \frac{81}{2}\omega_{03} + \frac{405}{4}\omega_{10} - \frac{1215}{4}\omega_{11} + \frac{1215}{4}\omega_{12} - \frac{405}{4}\omega_{13} - 81\omega_{20} + \\
 &\quad + 243\omega_{21} - 243\omega_{22} + 81\omega_{23} + \frac{81}{4}\omega_{30} - \frac{243}{4}\omega_{31} + \frac{243}{4}\omega_{32} - \frac{81}{4}\omega_{33}; \\
 c_6 &= 81\omega_{00} - \frac{405}{2}\omega_{01} + 162\omega_{02} - \frac{81}{2}\omega_{03} - \frac{405}{2}\omega_{10} + \frac{2025}{4}\omega_{11} - 405\omega_{12} + \frac{405}{4}\omega_{13} + 162\omega_{20} - \\
 &\quad - 405\omega_{21} + 324\omega_{22} - 81\omega_{23} - \frac{81}{2}\omega_{30} + \frac{405}{4}\omega_{31} - 81\omega_{32} + \frac{81}{4}\omega_{33}; \\
 c_7 &= -\frac{99}{2}\omega_{00} + 81\omega_{01} - \frac{81}{2}\omega_{02} + 9\omega_{03} + \frac{495}{4}\omega_{10} - \frac{405}{2}\omega_{11} + \frac{405}{4}\omega_{12} - \frac{45}{2}\omega_{13} - 99\omega_{20} + \\
 &\quad + 162\omega_{21} - 81\omega_{22} + 18\omega_{23} + \frac{99}{4}\omega_{30} - \frac{81}{2}\omega_{31} + \frac{81}{4}\omega_{32} - \frac{9}{2}\omega_{33}; \\
 c_8 &= 9\omega_{00} - \frac{45}{2}\omega_{10} + 18\omega_{20} - \frac{9}{2}\omega_{30}; \\
 c_9 &= \frac{99}{4}\omega_{00} - \frac{297}{4}\omega_{01} + \frac{297}{4}\omega_{02} - \frac{99}{4}\omega_{03} - \frac{81}{2}\omega_{10} + \frac{243}{2}\omega_{11} - \frac{243}{2}\omega_{12} + \frac{81}{2}\omega_{13} + \frac{81}{4}\omega_{20} - \\
 &\quad - \frac{243}{4}\omega_{21} + \frac{243}{4}\omega_{22} - \frac{81}{4}\omega_{23} - \frac{9}{2}\omega_{30} + \frac{27}{2}\omega_{31} - \frac{27}{2}\omega_{32} + \frac{9}{2}\omega_{33}; \\
 c_{10} &= -\frac{99}{2}\omega_{00} + \frac{495}{4}\omega_{01} - 99\omega_{02} + \frac{99}{4}\omega_{03} + 81\omega_{10} - \frac{405}{2}\omega_{11} + 162\omega_{12} - \frac{81}{2}\omega_{13} - \frac{81}{2}\omega_{20} + \\
 &\quad + \frac{405}{4}\omega_{21} - 81\omega_{22} + \frac{81}{4}\omega_{23} + 9\omega_{30} - \frac{45}{2}\omega_{31} + 18\omega_{32} - \frac{9}{2}\omega_{33}; \\
 c_{11} &= \frac{121}{4}\omega_{00} - \frac{99}{2}\omega_{01} + \frac{99}{4}\omega_{02} - \frac{11}{2}\omega_{03} - \frac{99}{2}\omega_{10} + 81\omega_{11} - \frac{81}{2}\omega_{12} + 9\omega_{13} + \frac{99}{4}\omega_{20} - \\
 &\quad - \frac{81}{2}\omega_{21} + \frac{81}{4}\omega_{22} - \frac{9}{2}\omega_{23} - \frac{11}{2}\omega_{30} + 9\omega_{31} - \frac{9}{2}\omega_{32} + \omega_{33}; \\
 c_{12} &= -\frac{11}{2}\omega_{00} + 9\omega_{10} - \frac{9}{2}\omega_{20} + \omega_{30}; \quad c_{13} = -\frac{9}{2}\omega_{00} + \frac{27}{2}\omega_{01} - \frac{27}{2}\omega_{02} + \frac{9}{2}\omega_{03};
 \end{aligned}$$

$$c_{14}=9\omega_{00}-\frac{45}{2}\omega_{01}+18\omega_{02}-\frac{9}{2}\omega_{03}; \quad c_{15}=-\frac{11}{2}\omega_{00}+9\omega_{01}-\frac{9}{2}\omega_{02}+\omega_{03}; \quad c_{16}=\omega_{00}.$$

Отже ми отримали загальні формули для знаходження коефіцієнтів c_i ($i=1,2,\dots,16$), які обчислюються через координати точок поверхні.

Розглянемо приклад. Нехай ω_{ij} ($i=0,1,2,3; j=0,1,2,3$) точки поверхні W :

$$\begin{array}{llll} \omega_{00}=12; & \omega_{10}=-8; & \omega_{20}=0; & \omega_{30}=12; \\ \omega_{01}=6; & \omega_{11}=13; & \omega_{21}=10; & \omega_{31}=-1; \\ \omega_{02}=-9; & \omega_{12}=-5; & \omega_{22}=-13; & \omega_{32}=-6; \\ \omega_{03}=4; & \omega_{13}=9; & \omega_{23}=11; & \omega_{33}=7. \end{array}$$

Побудуємо дану поверхню за допомогою прикладної програми Mathematica (рисунок 3):

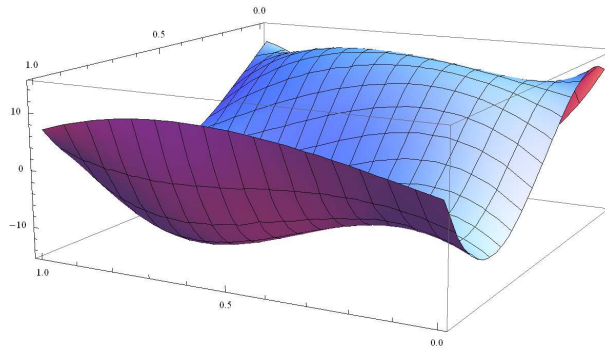


Рисунок 3 – Поверхня W , побудована за точками за допомогою бікубічного інтерполяційного сплайна

Задача стикування двох поверхонь. Розглянемо задачу з'єднання двох поверхонь, побудованих по точках за допомогою інтерполяційної бікубічної сплайн-функції в області $[0,1] \times [0,1]$.

Побудуємо дві поверхні W_1 і W_2 , які повинні співпадати по одному з країв, тобто ці поверхні мають чотири спільні точки (наприклад $\omega_{00}, \omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}$):

$$\begin{aligned} W_1 &= (12; -15300; -456; 78500; -12000; 7850; 12500; -12225; 25; 85; -1; 0; 500; -1200; 2500; -8800), \\ W_2 &= (12; -15300; -456; 78500; 12000; -10036; -1456; 23785; -2125; 785; -125; 2125; 5555; 45; 0; -451) \end{aligned}$$

На рисунку 4 зображено дані по верхні W_1 і W_2 , які скріплюються в точках $(0;0;12)$, $(0; \frac{1}{3}; -15300)$, $(0; \frac{2}{3}; -456)$, $(0;1;78500)$, причому чорними прямокутниками виділені розходження між поверхнями.

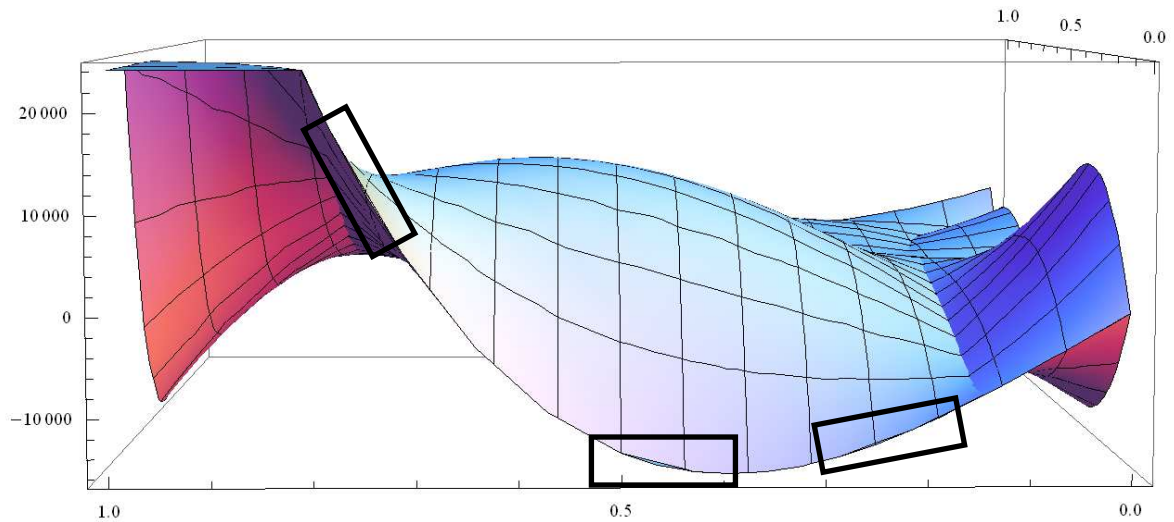


Рисунок 4 – Поверхні W_1 і W_2

Бачимо, що поверхні сполучаються не повністю, тобто між ними є розриви, відзначимо, що ці розриви можна помітити лише при великому збільшенні зображення (Рис. 5).

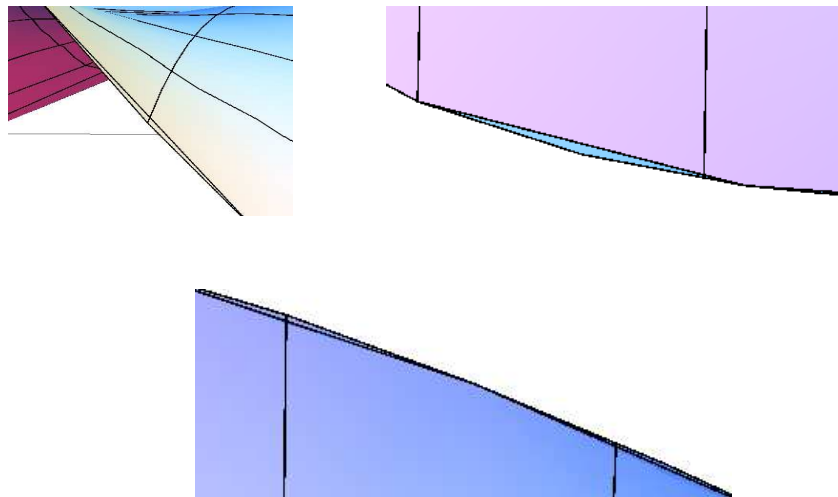


Рисунок 5

Обрахуємо максимальну величину розходжень між стикованими поверхнями, побудованими з допомогою інтерполяційних сплайнів. Для цього розглянемо ще кілька прикладів сполучення поверхонь, які стикаються в чотирьох точках і проаналізуємо максимальні величини розходжень між даними поверхнями в місці їх сполучення. Як виявилось максимальна величина розриву між стикованими поверхнями менша за 0,0001%, що вказує на те, що сплайн-функції є чудовим методом інтерполяції поверхонь.

Перевіримо вплив змін величин окремих точок поверхонь на характер і величину розходжень між поверхнями в місці їх скріплення. Це необхідно для того щоб дослідити, як впливатимуть на з'єднання поверхонь хибні точки (точки, які насправді не належать поверхням, але їх використовували при побудові апроксимуючої поверхні).

При дослідженні конкретних прикладів з'ясувалося, що характер розходжень між поверхнями залежить від того, яка саме точка збільшена (зменшена), тобто з якої

сторони від площини $\eta = 1$ знаходиться збільшувана (зменшувана) точка, з тієї сторони і буде більшою максимальна величина розриву. Необхідно також зауважити, що розходження між з'єднуваними поверхнями змінюватиметься в залежності від того, які точки і у скільки разів збільшились чи зменшились. Можна відмітити, що на величину розходжень між поверхнями найбільше впливають зміни у сусідніх вузлах.

Висновки. В даній роботі було проведено аналіз методів сплайн-функцій на предмет їх придатності до використання в інтерполяційних задачах при побудові поверхонь. Було складено інтерполяційний вираз для побудови поверхонь. Дослідження, що були виконані над стикованими поверхнями, побудованими з допомогою сплайн-функцій, показали, що максимальна величина розривів між даними поверхнями менша за 0,0001% що вказує на те, що сплайн-функції є відмінним методом інтерполяції поверхонь. Причому на характер і величину розходжень впливають зміни точок на поверхнях, але максимальна величина розриву між поверхнями зазнає незначних змін, що дає підстави вважати метод сплайн-функцій одним із найкращих методів інтерполяції поверхонь.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 539.3

ІГНАТИШИН М. І. к.т.н., доцент
БАБИЧ С. Ю. д.т.н., професор*
ДЕГТЯР С. В. к.т.н, доцент*

Мукачівський державний університет
*Київський національний економічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ АЧХ ГАСНИКА МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ЗА ФОРМУЛАМИ ВІЄТА

Вступ. Механічні гасники коливань мають широке застосування у техніці. Вони призначені для гасіння коливань механізмів, машин, будівельних споруд тощо [1, 2, 3]. Причиною виникнення небажаних коливань можуть бути техногенні та природні фактори, наприклад, землетрус.

Актуальним є дослідження та аналіз відомих конструкцій гасників механічних коливань, отримання співвідношень, що пов'язують динаміку лінійних та нелінійних коливань [1, 2, 3, 4] гасника з його конструктивними і механічними характеристиками, подальше формулювання оптимізаційних задач на базі отриманих математичних формул, вдосконалення відомих та синтез нових механічних гасників для зменшення шкідливих наслідків техногенних та природних катастроф пов'язаних з механічним руйнуванням механізмів, машин та споруд. Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла застосовують в своїх дослідженнях Левина Е. Е., Маневич А. (дослідження вимушених коливань циліндричного гасника коливань, рис. 1), И., Клименко А. А., Милин Ю. В. (нелінійні коливання маятникових гасників коливань).

В роботі Левина Е. Е., Маневича А.[1] побудовано математичні моделі маятникового та циліндричного гасників коливань, отримано комплексні амплітуди A та B коливань масивного тіла та гасника коливань:

для маятникового гасника

$$\begin{cases} A = (\mu \tilde{\Omega}^2 B - i U_0) / (1 - \tilde{\Omega}^2 + i \beta \tilde{\Omega}) \\ B = i \tilde{\Omega}^2 U_0 / [-(1 - \tilde{\Omega}^2 + i \beta \tilde{\Omega})(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\Omega}^2) + \tilde{\Omega}^4 \mu] \end{cases} \quad (1)$$