

сторони від площини $\eta = 1$ знаходиться збільшувана (зменшувана) точка, з тієї сторони і буде більшою максимальна величина розриву. Необхідно також зауважити, що розходження між з'єднуваними поверхнями змінюватиметься в залежності від того, які точки і у скільки разів збільшились чи зменшились. Можна відмітити, що на величину розходжень між поверхнями найбільше впливають зміни у сусідніх вузлах.

Висновки. В даній роботі було проведено аналіз методів сплайн-функцій на предмет їх придатності до використання в інтерполяційних задачах при побудові поверхонь. Було складено інтерполяційний вираз для побудови поверхонь. Дослідження, що були виконані над стикованими поверхнями, побудованими з допомогою сплайн-функцій, показали, що максимальна величина розривів між даними поверхнями менша за 0,0001% що вказує на те, що сплайн-функції є відмінним методом інтерполяції поверхонь. Причому на характер і величину розходжень впливають зміни точок на поверхнях, але максимальна величина розриву між поверхнями зазнає незначних змін, що дає підстави вважати метод сплайн-функцій одним із найкращих методів інтерполяції поверхонь.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 539.3

ІГНАТИШИН М. І. к.т.н., доцент
БАБИЧ С. Ю. д.т.н., професор*
ДЕГТЯР С. В. к.т.н, доцент*

Мукачівський державний університет
*Київський національний економічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ АЧХ ГАСНИКА МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ЗА ФОРМУЛАМИ ВІЄТА

Вступ. Механічні гасники коливань мають широке застосування у техніці. Вони призначені для гасіння коливань механізмів, машин, будівельних споруд тощо [1, 2, 3]. Причиною виникнення небажаних коливань можуть бути техногенні та природні фактори, наприклад, землетрус.

Актуальним є дослідження та аналіз відомих конструкцій гасників механічних коливань, отримання співвідношень, що пов'язують динаміку лінійних та нелінійних коливань [1, 2, 3, 4] гасника з його конструктивними і механічними характеристиками, подальше формулювання оптимізаційних задач на базі отриманих математичних формул, вдосконалення відомих та синтез нових механічних гасників для зменшення шкідливих наслідків техногенних та природних катастроф пов'язаних з механічним руйнуванням механізмів, машин та споруд. Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла застосовують в своїх дослідженнях Левина Е. Е., Маневич А. (дослідження вимушених коливань циліндричного гасника коливань, рис. 1), И., Клименко А. А., Милин Ю. В. (нелінійні коливання маятникових гасників коливань).

В роботі Левина Е. Е., Маневича А.[1] побудовано математичні моделі маятникового та циліндричного гасників коливань, отримано комплексні амплітуди A та B коливань масивного тіла та гасника коливань:

для маятникового гасника

$$\begin{cases} A = (\mu \tilde{\Omega}^2 B - i U_0) / (1 - \tilde{\Omega}^2 + i \beta \tilde{\Omega}) \\ B = i \tilde{\Omega}^2 U_0 / [-(1 - \tilde{\Omega}^2 + i \beta \tilde{\Omega})(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\Omega}^2) + \tilde{\Omega}^4 \mu] \end{cases} \quad (1)$$

для циліндричного гасника

$$\begin{cases} A = (\mu\tilde{\Omega}^2 B - iU_0) / (1 - \tilde{\Omega}^2 + i\tilde{\beta}\tilde{\Omega}) \\ B = i\tilde{\Omega}^2 U_0 / [-(1 - \tilde{\Omega}^2 + i\tilde{\beta}\tilde{\Omega})(\tilde{\omega}^2 - 3\tilde{\Omega}^2/2) + \tilde{\Omega}^4 \mu] \end{cases} \quad (2)$$

де

$$\mu = \frac{m}{M+m}, \quad \tilde{\Omega} = \Omega \sqrt{\frac{M+m}{k}}, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\frac{g}{k} \cdot \frac{M+m}{R-r_0}}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{k(M+m)}} \quad (3)$$

m - маса гасника, M - маса масивного тіла коливання якого гасить гасник, k - жорсткість пружини, r_0 - радіус циліндричного гасника, R - радіус циліндричної поверхні, Ω - кутова частота вимушених коливань, β - коефіцієнт в'язкого тертя, рис. 1.

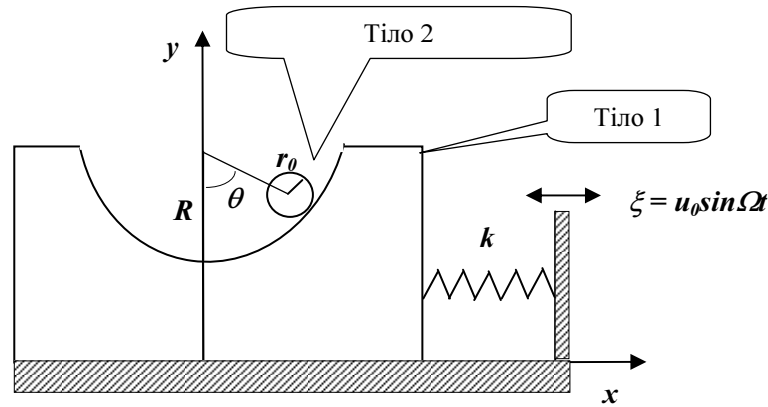


Рисунок 1 – Тіло 2 має форму циліндра. Тіло 1 – масивне тіло, тіло 2- гасник механічних коливань масивного тіла.

На рис. 1 зображено об'єкт дослідження - це механічна система двох тіл, що взаємодіють між собою через силу тиску та тертя і одне з тіл зазнає періодичне збурення заданої частоти та амплітуди через пружну ланку та знаходиться під дією дисипативної сили пропорційної швидкості. Предметом дослідження є математична модель гасників механічних коливань. В дослідженнях застосовані методи механіки деформівного твердого тіла та математичного аналізу.

Постановка задачі. Основні рівняння. Необхідно дослідити амплітуду коливань A масивного тіла, співвідношення (1) та (2), на екстремум, знайти аналітичні формули для розрахунку резонансних частот коливання масивного тіла з гасником.

Представимо модулі комплексних амплітуд (1) та (2) так:

для маятникового гасника

$$|A| = U_0 \sqrt{\frac{(\tilde{\Omega}^2 - \tilde{\omega}^2)^2}{\tilde{\omega}^4 + [(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 2]\tilde{\omega}^2\tilde{\Omega}^2 + \{1 + [2(2 - \tilde{\beta}^2 - \mu) + \tilde{\omega}^2]\tilde{\omega}^2\}\tilde{\Omega}^4 + (2\tilde{\omega}^2\mu + 2\mu - 2\tilde{\omega}^2 + \tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\Omega}^6 + (\mu - 1)^2\tilde{\Omega}^8}} \quad (4)$$

для циліндричного гасника

$$|A| = U_0 \sqrt{\frac{(3\tilde{\Omega}^2 - 2\tilde{\omega}^2)^2}{4\tilde{\omega}^4 + [(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 3]\tilde{\omega}^2\tilde{\Omega}^2 + \{9 + 4[\tilde{\omega}^2 - 3\tilde{\beta}^2 + 2(3 - \mu)]\tilde{\omega}^2\}\tilde{\Omega}^4 + \{4(2\mu - 3)\tilde{\omega}^2 + 3[2(2\mu - 3) + 3\tilde{\beta}^2]\}\tilde{\Omega}^6 + (2\mu - 3)^2\tilde{\Omega}^8}} \quad (5)$$

Щоб отримати аналітичні вирази для резонансних частот коливання масивного тіла для маятникового та циліндричного гасника механічних коливань необхідно дослідити на екстремум підкореневі вирази співвідношень (4) та (5). Таке дослідження приводить до рівняння 12-го степеня котре нескладними перетвореннями може бути

зведене до рівняння 5-го степеня. Останнє, згідно теореми Абелья-Руффіні, немає закритої форми розв'язків, тобто форми, що містить тільки арифметичні операції та радикали довільного степеня. Тому, дослідимо на екстремум знаменник підкореневого виразу співвідношень (4) та (5). Нами встановлено, що мінімум підкореневого виразу з великою точністю співпадає з максимумом знаменника підкореневого раціонального дробу.

Розв'язок задачі. Знайдемо похідні цих знаменників по $\tilde{\Omega}$ і прирівняємо їх до нуля. Відкинувши розв'язок $\Omega = 0$ отримаємо рівняння шостого степеня:

для маятнікового гасника

$$8(\mu-1)^2 \tilde{\Omega}^6 + 6(2\tilde{\omega}^2 \mu + 2\mu - 2\tilde{\omega}^2 + \tilde{\beta}^2 - 2) \tilde{\Omega}^4 + 4\{1 + [2(2 - \tilde{\beta}^2 - \mu) + \tilde{\omega}^2] \tilde{\omega}^2\} \tilde{\Omega}^2 + 2[(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 2] \tilde{\omega}^2 = 0 \quad (6)$$

для циліндричного гасника

$$8(2\mu-3)^2 \tilde{\Omega}^6 + 6\{4(2\mu-3)\tilde{\omega}^2 + 3[2(2\mu-3) + 3\tilde{\beta}^2]\} \tilde{\Omega}^4 + 4\{9 + 4[\tilde{\omega}^2 - 3\tilde{\beta}^2 + 2(3-\mu)]\tilde{\omega}^2\} \tilde{\Omega}^2 + 8[(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 3] \tilde{\omega}^2 = 0 \quad (7)$$

Позначимо $\tilde{\Omega}^2 = x$ одержимо два рівняння третього степеня:

для маятнікового гасника

$$8(\mu-1)^2 x^3 + 6(2\tilde{\omega}^2 \mu + 2\mu - 2\tilde{\omega}^2 + \tilde{\beta}^2 - 2) x^2 + 4\{1 + [2(2 - \tilde{\beta}^2 - \mu) + \tilde{\omega}^2] \tilde{\omega}^2\} x + 2[(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 2] \tilde{\omega}^2 = 0 \quad (8)$$

для циліндричного гасника

$$8(2\mu-3)^2 x^3 + 6\{4(2\mu-3)\tilde{\omega}^2 + 3[2(2\mu-3) + 3\tilde{\beta}^2]\} x^2 + 4\{9 + 4[\tilde{\omega}^2 - 3\tilde{\beta}^2 + 2(3-\mu)]\tilde{\omega}^2\} x + 8[(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 3] \tilde{\omega}^2 = 0 \quad (9)$$

Розв'яжемо отримані кубічні рівняння за тригонометричними формулами Вієта
Константи кубічного рівняння

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (10)$$

позначимо:

маятніковий гасник

$$a = 8(\mu-1)^2, \quad b = 6(2\tilde{\omega}^2 \mu + 2\mu - 2\tilde{\omega}^2 + \tilde{\beta}^2 - 2), \\ c = 4\{1 + [2(2 - \tilde{\beta}^2 - \mu) + \tilde{\omega}^2] \tilde{\omega}^2\}, \quad d = 2[(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 2] \tilde{\omega}^2 \quad (11)$$

циліндричний гасник

$$a = 8(2\mu-3)^2, \quad b = 6\{4(2\mu-3)\tilde{\omega}^2 + 3[2(2\mu-3) + 3\tilde{\beta}^2]\}, \\ c = 4\{9 + 4[\tilde{\omega}^2 - 3\tilde{\beta}^2 + 2(3-\mu)]\tilde{\omega}^2\}, \quad d = 8[(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 3] \tilde{\omega}^2 \quad (12)$$

Далі

$$Q = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a}}{9}, \quad R = \frac{2\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 9\frac{bc}{a^2} + 27\frac{d}{a}}{54}, \quad S = Q^3 - R^2, \quad \varphi = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right) \quad (13)$$

Корені кубічного рівняння (10):

$$x_1 = -2\sqrt{Q} \cos(\varphi) - \frac{b}{3a}, \quad x_2 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\varphi + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{b}{3a}, \quad x_3 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\varphi - \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{b}{3a} \quad (14)$$

Отже, стаціонарним точкам знаменника підкореневого виразів (4) та (5) будуть відповідати частоти:

$$\tilde{\Omega}_1 = \sqrt{-2\sqrt{Q} \cos(\varphi) - \frac{b}{3a}}, \quad \tilde{\Omega}_2 = \sqrt{-2\sqrt{Q} \cos\left(\varphi + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{b}{3a}}, \quad \tilde{\Omega}_3 = \sqrt{-2\sqrt{Q} \cos\left(\varphi - \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{b}{3a}} \quad (15)$$

Числові результати. Для значень $\tilde{\omega} = 1.2$, $\mu = 0.1$, $\tilde{\beta} = 0.05$ та $U_0 = 0.05$ розраховано по дві частоти, що відповідають резонансним стаціонарним точкам:

для маятникового гасника

$$\tilde{\Omega}_1 = 0.932, \tilde{\Omega}_2 = 1.357, \quad (16)$$

для циліндричного гасника

$$\tilde{\Omega}_1 = 0.883, \tilde{\Omega}_2 = 1.147, \quad (17)$$

На рис.2 побудовано амплітудно-частотні характеристики з допомогою програмного пакета MathCad, що відповідають співвідношенням (4) та (5) і співпадають з отриманими [1].

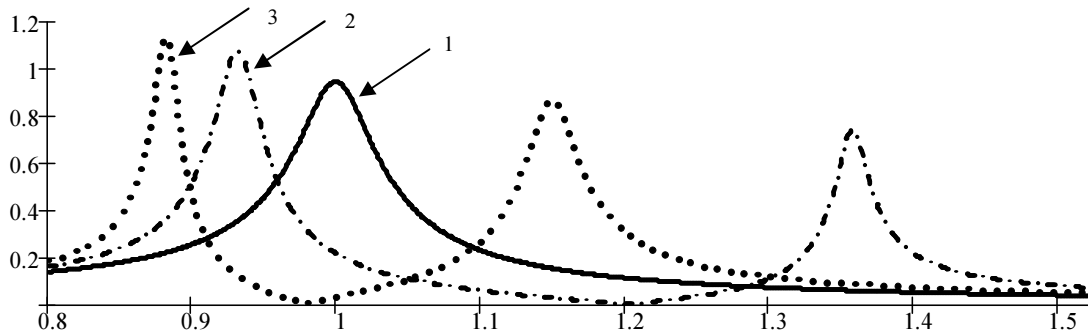


Рис. 2. Амплітудно-частотні характеристики: 1-масивне тіло без гасника, 2-маятниковий гасник, 3-циліндричний гасник.

Висновки. Як бачимо з рис. 2, маятниковий гасник зміщує одну резонансну частоту вліво, а другу вправо від резонансної частоти тіла без гасника, аналогічно робить і циліндричний гасник. Він лівий пік віддаляє далі вліво, а правий дещо ближче вправо. Отримані в даній праці аналітичні формули (11)-(14) придатні для розрахунку резонансних частот тіла з гасником і можуть застосовуватись в подальшому для визначення параметрів $\tilde{\omega}$, μ , $\tilde{\beta}$ гасника механічних коливань за заданими значеннями $\tilde{\Omega}_1$ та $\tilde{\Omega}_2$, котрі в свою чергу залежать від резонансної частоти масивного тіла без гасника. За розрахованими параметрами $\tilde{\omega}$, μ , $\tilde{\beta}$ далі можлива оптимізація конструктивних та механічних характеристик гасника: m - маси гасника, r_0 - радіуса циліндричного гасника, R - радіуса циліндричної поверхні, рис. 1. Для більш ефективного гасіння коливань доцільно змінити форму гасника [5] залишивши незмінною масу m , зробити гасник в виді гантелі з моментом інерції що забезпечить необхідні параметри $\tilde{\omega}$, μ , $\tilde{\beta}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Левина Е. Е., Маневич А. И. Вынужденные нелинейные колебания тела с цилиндрическим гасителем колебаний. - Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла, вип. 11, 2010 .
<http://www.nbu.gov.ua/scripts/wwwi32.exe/%5Bin=scripts/ref.in%5D>
2. Вибрации в технике. Т.6. Защита от вибраций и ударов: справочник/ под ред. К. В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.
3. Корнеев Б. Г. Динамические гасители колебаний/ Б. Г. Корнеев, Л. М. Резников. – М.: Наука, 1988 . – 304 с.

4. Клименко А. А., Милин Ю. В. Нелинейные формы колебаний механической системы с маятниковым гасителем колебаний. – Механика твердого тела, вып.. 40. – 2010 .
5. Ігнатишин М. І. Математичне моделювання механічного гасника коливань в системі MathCad.- Науковий вісник Мукачівського державного університету. Серія технічні науки. №12(7).- 2012 .

Поступила в редколлегию 28.02.2013

УДК 517.5

ДЕРЕЦЬ Е.В. к.физ.-мат.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Введение. Одним из направлений теории приближений является изучение методов приближения интегралов. Большое количество исследований посвящено формулам приближенного интегрирования, позволяющим приближенно находить значение интеграла в виде линейной комбинации значений функции в n узлах. При этом функция f принадлежит некоторому классу функций. Экстремальная задача теории квадратур состоит в отыскании наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы и вычисления её погрешности. Общая постановка экстремальной задачи теории квадратур и первые основополагающие результаты принадлежат С.М. Никольскому и А.Н. Колмогорову. Решению таких задач для различных классов функций посвящено большое количество работ (см., например, [5, 8, 11] и библиографию к ним). Вместе с тем, в ряде работ рассматривалась задача оптимизации так называемых «интервальных» квадратурных формул, которые вместо значений функции в узлах используют усреднения интегрируемой функции по n интервалам в области определения. С точки зрения приложений, применение таких формул является более естественным, так как во многих случаях результаты измерений физических величин являются средними значениями функции, описывающей измеряемую величину.

В настоящей работе рассматриваются интервальные квадратурные формулы вида

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \sum_{k=1}^n c_k \frac{1}{2h} \int_{x_k-h}^{x_k+h} f(t) dt + R_n(f, \bar{c}_n, \bar{x}_n, h) \quad (1)$$

где $\bar{c}_n = \{c_k\}_{k=1}^n$, $c_k \in \mathbb{R}$ – коэффициенты, $\bar{x}_n = \{x_k\}_{k=1}^n$, $x_k \in [0, 2\pi)$ – узлы, $h \in (0, \pi/n)$ и $R_n(f, \bar{c}_n, \bar{x}_n, h)$ – погрешность квадратурной формулы (1) на функции f . Пусть M – некоторый класс 2π -периодических непрерывных функций $f(t)$. Погрешностью квадратурной формулы (1) на классе M называют величину $R_n(M, \bar{c}_n, \bar{x}_n, h) = \sup_{f \in M} |R_n(f, \bar{c}_n, \bar{x}_n, h)|$. Квадратурная формула с узлами \bar{x}_n^* и

коэффициентами \bar{c}_n^* называется наилучшей на классе M , если

$$R_n(M, h) = \inf_{\bar{c}_n, \bar{x}_n} R_n(M, \bar{c}_n, \bar{x}_n, h) = R_n(M, \bar{c}_n^*, \bar{x}_n^*, h).$$