

3. Маслов Б.П., Рушицкий Я.Я., Коваленко А.П. Полные наборы физических постоянных нелинейной микроструктурной теории двухфазной упругой смеси, вычисленные для ряда конструкционных материалов // Прикладная механика. 1996. Т. 32, № 4. С. 18-26.
4. Guz A.N. Description and investigation of some non-classical problem of fracture mechanics and corresponding mechanisms // Int. Appl. Mech.-2000.-36.-N12 (Прикл. механика.-2000.-36.-№12, С.3-37).
5. Маслов Б.П. Эффективные постоянные в теории геометрически нелинейных твёрдых тел // Прикладная механика. 1981.Т. 17, № 5, С. 45-50.
6. Маслов Б.П., Ляшенко Я.Г. Врахування пошкодженості середовища при прогнозуванні довготривалої міцності геологічних порід неоднорідної структури // В збірн. “Вісник НТУ”, 2008, № 17, С. 390-393.
7. Maslov B.P. Stress concentration in non-compressible multi-component material // Int. Appl. Mech.-2000.-36.- № 3 (Прикл. механика.-2000.-36. – №3.-С.108-114).
8. Kachanov M. Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts // Appl. Mech. Rev. – 1992. – 45. – № 8. – p. 304 – 335.

*Поступила в редколлегию 28.02.2013*

УДК 539.3

ЛУГОВОЙ П.З., д.т.н., профессор, гл.н.с.

ПРОКОПЕНКО Н.Я. к.т.н., ст.н.с.

ГОЛОВКО К.Г., к. физ.-мат. н., н. с.

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины

### **ДИСПЕРСИОННЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**

**Вступление.** При анализе воздействия гармонических нагрузок на оболочку необходимо знать динамические характеристики распространяющихся волн [1] и, в частности, их волновые параметры. После определения последних строятся дисперсионные кривые. Задачи о построении дисперсионных кривых для замкнутой круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами, рассмотрены в работах [2,3], в которых оценивается влияние дискретного размещения ребер на число и форму дисперсионных кривых. Ниже на числовых примерах исследуется влияние упругого основания Винклера на частоты запираания и форму дисперсионных кривых.

**Постановка задачи и уравнения движения.** Рассматривается замкнутая круговая цилиндрическая оболочка с шарнирно опертыми краями, подкрепленная регулярной системой продольных ребр ( все ребра имеют одинаковые геометрические и

механические параметры и размещены на равных взаимных расстояниях). Оболочка находится на упругом основании, характеризующемся коэффициентом Винклера  $C_1$ .

Уравнения движения выведены на основе прикладных теорий оболочек и стержней, основанные соответственно на гипотезах Кирхгофа и Кирхгофа-Клебша [2]. С учетом наличия упругого основания они имеют вид:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} - \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \sum_{j=1}^{k_1} \delta(\theta - \theta_j) \times \\ & \times \left( \gamma_c \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \delta_c \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^3} - \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \bar{\rho}_c \bar{\delta}_c \frac{\partial^3 w}{\partial t_1^2 \partial \xi} \right) \Big|_{\theta=\theta_j} = 0, \\ & , \\ & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \left[ \frac{1-\nu}{2} (1+4a^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (1+a^2) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] v + \\ & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \theta} + a^2 \left[ (2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right] \right\} w - \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \sum_{j=1}^{k_1} \delta(\theta - \theta_j) \times \\ & \times \left[ -\left(1 - \frac{h_c}{r}\right)^2 \lambda_{1c} \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} + \left(1 - \frac{h_c}{r}\right) \lambda_{2c} \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \theta} + \mu_c \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right) - \right. \\ & \left. - \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c \left(1 - \frac{h_c}{r}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} + \bar{\rho}_c \bar{\delta}_c \left(1 - \frac{h_c}{r}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2 \partial \theta} - \bar{\rho}_c \bar{\mu}_c \left( \frac{\partial^3 w}{\partial t_1^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} \right) \right] \Big|_{\theta=\theta_j} = 0, \\ & -\nu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left\{ -\frac{\partial}{\partial \theta} + a^2 \left[ (2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right] \right\} v + w + a^2 \Delta \Delta w + \bar{C}_1 w + \\ & + \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + \sum_{j=1}^{k_1} \left\{ \delta(\theta - \theta_j) \left[ \eta_c \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - \delta_c \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + \bar{\rho}_c \bar{\delta}_c \frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2 \partial \xi} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \bar{\rho}_c \bar{\eta}_c \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial t_1^2} \right] \right\} \Big|_{\theta=\theta_j} + \frac{d\delta(\theta - \theta_j)}{d\theta} \left[ \mu_c \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right) + \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{h_c}{r}\right) \lambda_{2c} \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} - \lambda_{3c} \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \theta} - \bar{\rho}_c \bar{\mu}_c \left( \frac{\partial^3 w}{\partial t_1^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \bar{\rho}_c \bar{\delta}_c \left( 1 - \frac{h_c}{r} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} - \bar{\rho}_c \bar{\eta}_c \frac{\partial^3 w}{\partial t_1^2 \partial \theta} \Bigg|_{\theta=\theta_j} = 0. \quad (1)$$

Выше приняты обозначения:  $u, v, w$  – компоненты вектора перемещений точки на срединной поверхности обшивки,  $\xi = \frac{x}{r}$ ,  $\theta = \frac{y}{r}$ ,  $x, y$  – декартовы координаты точки на указанной поверхности,  $t_1 = t\omega_0$ ,  $t$  – время,

$$a^2 = \frac{h^2}{12r^2}, \quad \bar{\rho}_c = \frac{\rho_c}{\rho_0}, \quad \bar{\gamma}_c = \frac{F_c k_1}{2\pi r h}, \quad \bar{\delta}_c = \frac{h_c}{r} \bar{\gamma}_c, \quad \bar{\eta}_c = \left( \frac{h_c}{r} \right)^2 \bar{\gamma}_c, \quad \bar{C}_1 = \frac{(1-\nu^2)r^2}{Eh} C_1.$$

$$\bar{\mu}_c = \frac{I_{крс} k_1}{2\pi r^3 h}, \quad \gamma_c = \frac{E_c}{E} (1-\nu^2) \bar{\gamma}_c, \quad \delta_c = \frac{h_c}{r} \gamma_c, \quad \eta_c = \frac{E_c (I_{yc} + h_c^2 F_c) k_1}{2\pi r^3 h E} (1-\nu^2),$$

$$\lambda_{1c} = \frac{E_c I_{zc} k_1 (1-\nu^2)}{2\pi r^3 h E}, \quad \lambda_{2c} = \frac{h_c}{r} \lambda_{1c}, \quad \lambda_{3c} = \left( \frac{h_c}{r} \right)^2 \lambda_{1c}, \quad \mu_c = \frac{G_c}{E_c} (1-\nu^2) \bar{\mu}_c,$$

$h, r$  – соответственно толщина и радиус срединной поверхности оболочки,  $E, \nu, \rho_0$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала, из которого она изготовлена;  $F_c, I_{yc}, I_{zc}, I_{крс}$  – площадь поперечного сечения продольных ребер, его моменты инерции при изгибе в радиальной плоскости и в плоскости, эквидистантной касательной к срединной поверхности обшивки, а также момент инерции при кручении;  $h_c$  – эксцентриситеты ребер (расстояния от осей ребер до срединной поверхности обшивки,  $h_c > 0$ , если ребра укреплены на ее внутренней поверхности),  $k_1$  – число продольных ребер;  $E_c, G_c, \rho_c$  – модули упругости и сдвига материалов, из которых изготовлены продольные, а также их плотности,  $\delta(\theta - \theta_j)$  – дельта-функция

$$\text{Дирака, } \theta_j = \frac{2\pi}{k_1} j.$$

Решение системы (1) определяется в виде рядов

$$u = e^{ik\xi} \sum_{n=0}^{\infty} (u_{n1} \cos n\theta + u_{n2} \sin n\theta) \cos \omega_1 t_1,$$

$$v = e^{ik\xi} \sum_{n=0}^{\infty} (v_{n1} \sin n\theta + v_{n2} \cos n\theta) \cos \omega_1 t_1,$$

$$w = e^{ik\xi} \sum_{n=0}^{\infty} (w_{n1} \cos n\theta + w_{n2} \sin n\theta) \cos \omega_1 t_1, \quad (2)$$

где  $u_{ns}$ ,  $v_{ns}$ ,  $w_{ns}$  ( $s=1,2$ ) – неизвестные постоянные,  $k$  – безразмерный волновой параметр

$$\left( \text{соответствующая ему длина волны } \lambda = \frac{2\pi r}{k} \right), \quad \omega_1 = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \omega_0 = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_0 r^2}}.$$

После подстановки (2) в (1) задача сводится к определению  $u_{ns}$ ,  $v_{ns}$ ,  $w_{ns}$  из бесконечных систем однородных линейных алгебраических уравнений. В [2] показано, что эти системы имеют точное решение.

На его основе получены дисперсионные уравнения трех типов [3]:

а) Уравнения, позволяющие вычислить характеристические числа (волновые параметры) при произвольном характере деформирования оболочки в окружном направлении (по терминологии, принятой в [1], - общий случай деформации). Волновые параметры в этом случае зависят от всех геометрических и механических характеристик ребер.

б) Уравнения, позволяющие вычислить характеристические числа при таком деформировании оболочки в окружном направлении, при котором продольные ребра лежат в пучностях прогиба. Волновые параметры в этом случае зависят только от жесткостей этих ребер на растяжение-сжатие и изгиб в радиальной плоскости оболочки, а также от геометрических и механических параметров, определяющих соответствующие инерционные характеристики ребер.

в) Уравнения, позволяющие вычислить характеристические числа при таком деформировании оболочки в окружном направлении, при котором продольные ребра лежат в узлах прогиба. Волновые параметры в этом случае зависят только от жесткостей этих ребер на изгиб в плоскости, эквидистантной касательной к срединной поверхности оболочки, и при кручении, а также от геометрических и механических параметров, определяющих соответствующие инерционные характеристики ребер.

**Числовой пример.** Вычисления выполнены для оболочки, усиленной четырьмя ребрами ( $k_1=4$ ), размещенными на внутренней поверхности обшивки, имеющей такие безразмерные геометрические и механические параметры:

$$\frac{h}{r} = 0,25 \cdot 10^{-2}; \quad \frac{F_c}{2\pi r h} = 0,16 \cdot 10^{-1}; \quad \frac{h_c}{r} = 0,14 \cdot 10^{-1}; \quad \frac{I_{kpc}}{2\pi r^3 h} = 0,53 \cdot 10^{-6};$$

$$\frac{I_{zc}}{2\pi r^3 h} = 0,13 \cdot 10^{-6}; \quad E_c = E; \quad G_c = 0,3845E; \quad \nu = 0,3. \quad \text{Рассматриваемый интервал частот}$$

возбуждения принят таким:  $0 \leq \omega_1 \leq 0,2$ .

В таблице приведены значения частот запираия для приведенных случаев деформирования оболочки в зависимости от коэффициента упругого основания  $\bar{C}_1$ . Из таблицы видно, в заданном диапазоне частот возбуждения с увеличением коэффициента Винклера частоты запираия возрастают по сравнению с частотами для оболочки без упругого основания. При достаточно больших значениях  $\bar{C}_1$  число частот запираия уменьшается.

Таблиця 1

$\bar{C}_1$	$\omega_1 \cdot 10$			
	а	б		В
0	0,099	0,053	0,841	0,019
	0,427	0,165	1,180	0,248
	0,978	0,334	1,576	0,708
	1,753	0,559		1,400
0,001	0,305	0,220	0,638	0,280
	0,521	0,295	0,896	0,398
	1,024	0,345	1,220	0,778
	1,780	0,453	1,606	1,432
0,005	0,644	0,490	0,888	0,624
	0,798	0,641	1,089	0,738
	1,190	0,699	1,368	0,997
	1,881	0,764	1,722	1,563
0,01	0,892	0,691	1,126	0,882
	1,051	0,892	1,291	1,014
	1,372	0,975	1,534	1,219
		1,031	1,857	1,714

На рис. 1 – 3 показаны дисперсионные кривые для общего случая деформирования оболочки в зависимости от коэффициента упругого основания. Кривые на рис.1 соответствуют оболочке без упругого основания  $\bar{C}_1=0$ , на рис.2 – для  $\bar{C}_1=0,001$ , на рис.3 – для  $\bar{C}_1=0,01$ . Как видно из рис.1 – 3, с увеличением коэффициента упругого основания изменяется форма дисперсионных кривых. Они становятся более пологими.

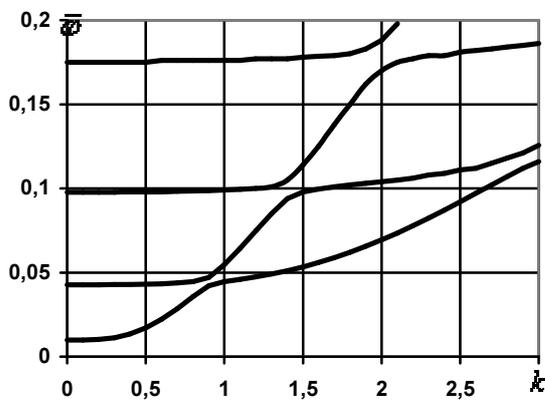


Рисунок 1

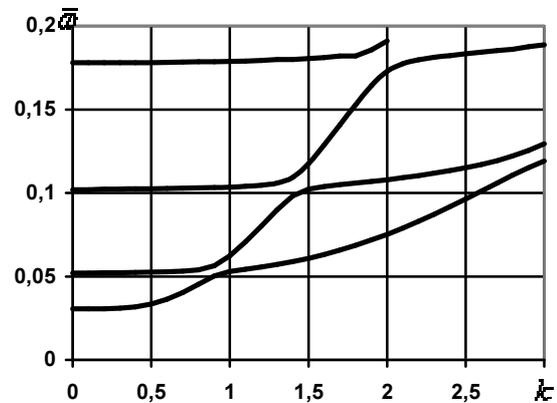


Рисунок 2

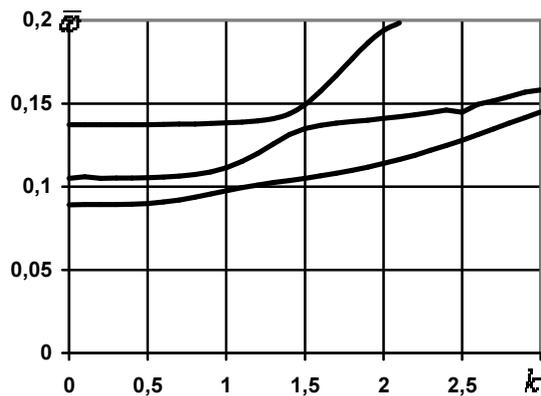


Рисунок 3

**Заключение.** На основании проведенного исследования можно сделать вывод, что упругое основание Винклера влияет на число и величину частот запирання и форму дисперсионных кривых.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. К.: Издат.-полиграф. центр «Киевский университет», 2012. – 541 с.
2. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек (Метод расчета оболочек: в 5 т., Т.2) – К.: Наук. думка, 1980. – 368 с.
3. Заруцкий В.А., Прокопенко Н.Я. О влиянии дискретного размещения продольных ребер на распространение гармонических волн вдоль цилиндрических оболочек // Прикл. механика.– 2003.– 39, №4, с. 92 – 98.

*Поступила в редколлегию 28.02.2013*