УДК 539.3

МЕЙШ Ю.А., к. физ.-мат. н.

Национальный транспортный университет, Киев, Украина

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ДИСКРЕТНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКЕ

Введение. Как показывает литературный обзор по теме исследования, в этом направлении следует отметить работы по динамическому поведению подкрепленных цилиндрических, сферических и конических оболочек на упругом основании Винклера при нестационарных нагрузках (случай осесимметричных колебаний) [4-8]. В этих работах исследовано влияние упругого основания на напряженно – деформированное состояние подкрепленных оболочек при нестационарных колебаниях. Практически отсутствуют исследования для случая неосесимметричных колебаний подкрепленных оболочек на упругом основании. Ниже приведен случай задачи о неосесимметричных колебаниях дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек на упругом основании Винклера при нестационарных нагрузках.

Цель работы заключается в исследовании напряженно – деформированного состояния дискретно подкрепленных оболочек на упругом основании при нестационарных нагрузках.

Постановка задачи. При рассмотрении взаимодействия упругих конструкций с окружающей средой существует два основных подхода постановки и решения указанных задач: моделирование окружающей среды согласно трехмерных уравнений механики сплошных сред и моделирование окружающей среды некоторыми интегральными кинематическими и силовыми параметрами, действующими на упругую конструкцию (упругие основания типа Винклера, Пастернака) [1, 2]. Решение задач согласно первого подхода связанно со значительными алгоритмическими и вычислительными трудностями [3]. Согласно второго подхода действие окружающей среды заменяется упругим основанием, что в свою очередь приводит к упрощению постановки и решения исходных задач [2, 4]. В данной работе рассмотрена задача о вынужденных колебаниях цилиндрической дискретно подкрепленной оболочки на упругом основании Винклера при распределенной нагрузке.

Уравнения колебаний дискретно подкрепленной цилиндрической оболочки на упругом основании представлены согласно работы [4]. Исходные уравнения представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по переменным x, y, t при наличии пространственных разрывов по координатам x и y. Пространственными разрывами являются линии проецирования центров масс поперечного сечения дискретных ребер на срединную поверхность цилиндрической оболочки i – го ребра по координате x и j – го ребра по координате y. Исходя из этого, исходную систему уравнений представим следующим образом:

- ✓ уравнения в гладкой области

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}+P_1=\rho h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial T_{22}}{\partial y}+\frac{\overline{T}_{23}}{R}+P_2=\rho h\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \overline{T}_{13}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{T}_{23}}{\partial y}-\frac{T_{22}}{R}-C_1u_3+P_3=\rho h\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-T_{13}=\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial M_{22}}{\partial y}-T_{23}=\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2};$$

$$\overline{T}_{13}=T_{13}+T_{11}\theta_1+S\theta_2, \quad \overline{T}_{23}=T_{23}+T_{22}\theta_2+S\theta_1;$$

- ✓ уравнения на i – й линии разрыва вдоль оси ОХ

$$\frac{\partial T_{11i}}{\partial x}+[S]=\rho_iF_i\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\pm h_{ci}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \overline{T}_{12i}}{\partial x}+[T_{22}]=\rho_iF_i\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\pm h_{ci}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}\right), \quad \frac{\partial \overline{T}_{13i}}{\partial x}+[\overline{T}_{23}]=\rho_iF_i\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11i}}{\partial x}\pm h_{ci}\frac{\partial T_{11i}}{\partial x}-T_{13i}+[H]=\rho_iF_i\left[\pm h_{ci}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\left(h_{ci}^2+\frac{I_{1i}}{F_i}\right)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right],$$

$$\frac{\partial M_{12i}}{\partial x}\pm h_{ci}\frac{\partial \overline{T}_{12i}}{\partial x}+[M_{22}]=\rho_iF_i\left[\pm h_{ci}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\left(h_{ci}^2+\frac{I_{kri}}{F_i}\right)\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}\right],$$

$$\overline{T}_{13i}=T_{13i}+T_{11i}\theta_{1i}, \quad \overline{T}_{12i}=T_{12i}+T_{11i}\theta_{2i},$$

- ✓ уравнения на j–й линии разрыва вдоль оси ОУ

$$\frac{\partial \overline{T}_{21j}}{\partial y}+[T_{11}]=\rho_iF_i\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\pm h_{cj}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial T_{22j}}{\partial y}+\frac{T_{23j}}{R_j}+[S]=\rho_iF_i\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\pm h_{cj}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}\right), \quad \frac{\partial \overline{T}_{23j}}{\partial y}-\frac{T_{22j}}{R_j}+[T_{13}]=\rho_iF_i\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{21j}}{\partial y}\pm h_{cj}\frac{\partial \overline{T}_{21j}}{\partial y}+[M_{11}]=\rho_jF_j\left[\pm h_{cj}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\left(h_{cj}^2+\frac{I_{krj}}{F_j}\right)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right],$$

$$\frac{\partial M_{22j}}{\partial y}\pm h_{cj}\frac{\partial T_{22j}}{\partial y}-T_{23j}+[H]=\rho_iF_i\left[\pm h_{cj}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\left(h_{cj}^2+\frac{I_{2j}}{F_j}\right)\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}\right],$$

$$\overline{T}_{23j}=T_{23j}+T_{22j}\theta_{2j}, \quad \overline{T}_{21j}=T_{21j}+T_{22j}\theta_{1j}.$$

В уравнениях (2), (3) величины в квадратных скобках являются усилиями – моментами гладкой оболочки, действующими на соответствующий дискретный i – й (или j–й) подкрепляющий элемент, расположенный вдоль оси ОХ (соответственно оси ОУ) – $[\Phi]_i = \Phi_i^+ - \Phi_i^-$, $[\Phi]_j = \Phi_j^+ - \Phi_j^-$.

Связь между усилиями–моментами и соответствующими величинами деформаций имеет вид

$$T_{11} = B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22}), \quad T_{22} = B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu_{12}\varepsilon_{11}), \tag{4}$$

$$S = B_{12}\varepsilon_{12}, \quad T_{13} = B_{13}\varepsilon_{13}, \quad T_{23} = B_{23}\varepsilon_{23},$$

$$M_{11} = D_{11}(\kappa_{11} + \nu_{21}\kappa_{22}), \quad M_{22} = D_{22}(\kappa_{22} + \nu_{12}\kappa_{11}), \quad H = D_{12}\kappa_{12},$$

где

$$B_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad B_{12} = G_{12}h, \quad B_{13} = G_{13}hk^2, \quad B_{23} = G_{23}hk^2,$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad B_{12} = G_{12}\frac{h^3}{12},$$

Соотношения, связывающие величины деформаций с компонентами обобщенного вектора перемещений имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\theta_1^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2}\theta_2^2 + \frac{u_3}{R}, \tag{5}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \theta_1\theta_2, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \varphi_1, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial y} + \varphi_2 - \frac{u_2}{R}, \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x},$$

$$\kappa_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial yx}, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad \theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \theta_2 = \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{u_2}{R}.$$

Соотношения между усилиями – моментами и соответствующими деформациями i– го дискретного ребра расположенного вдоль оси ОХ имеют вид

$$T_{11i} = E_i F_i \varepsilon_{11i}, \quad T_{12i} = G_i F_i \varepsilon_{12i}, \tag{6}$$

$$T_{13i} = G_i F_i k_i^2 \varepsilon_{13i}, \quad M_{11i} = E_i I_{1i}\kappa_{11i}, \quad M_{12i} = G_i I_{kri}\kappa_{12i},$$

где

$$\varepsilon_{11i} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \pm h_{ci}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\theta_{1i}^2 + \frac{1}{2}\theta_{2i}^2, \tag{7}$$

$$\varepsilon_{12i} = \theta_{2i}, \quad \varepsilon_{13i} = \varphi_1 + \theta_{1i}, \quad \theta_{2i} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \pm h_{ci}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \theta_{1i} = \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \kappa_{11i} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \kappa_{12i} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x},$$

k^2, k_i^2 – коэффициенты поперечного сдвига в теории оболочек и стержней Тимошенко.

Соответствующие соотношения для усилий – моментов и соответствующих деформаций в случае j – го дискретного ребра расположенного вдоль оси ОУ записываются согласно [4].

Уравнения колебаний (1) – (7) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

Численный алгоритм решения уравнений (1)–(7) основывается на использовании интегро – интерполяционного методу построения разностных схем для исходных уравнений по пространственным координатам x, y и явной конечно – разносной схеме по временной координате t [4, 9, 10].

Численные результаты. Как численный пример, рассматривалась задача динамического поведения дискретно подкрепленной ребрами цилиндрической оболочки на упругом основании под действием распределенной внутренней импульсной нагрузки. Полагается, что торцы оболочки при $x = 0,\ x = L$ жестко защемлены. Начальные условия для кинематических величин – нулевые. Поперечные ребра расположены в сечениях $s_{1i} = 0{,}25Li;\ i = \overline{1, 3}$. Продольные ребра расположены в сечениях $s_{2j} = \pi R(j-1)/2;\ j = \overline{1, 4}$ (оболочка подкреплена тремя поперечными ребрами и четырьмя продольными). Распределенная импульсная нагрузка $P_3(s_1, s_2, t)$ задавалась следующим образом $P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot sin\frac{\pi t}{T}[\eta(t) - \eta(t-T)]$, где A – амплитуда нагрузки, T – длительность нагрузки. В расчетах полагалось: $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

Задача решалась при следующих геометрических и физико – механических параметрах: $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$; $h = 10^{-2}$ м; $L = 0{,}4$ м. Для подкрепляющего ребра полагалось: $E_i = E_j = E;\ F_i = F_j = a_j h_j;\ a_i = a_j = h;$ $h_i = h_j = 2h$. Расчеты проводились для трех следующих значений коэффициента упругого основания Винклера: 1) $C_1 = 1 \cdot 10^9$ Н/м^3; 2) $C_1 = 2 \cdot 10^9$ Н/м^3; 3) $C_1 = 3 \cdot 10^9$ Н/м^3.

Численные расчеты данной задачи были проведены на временном интервале

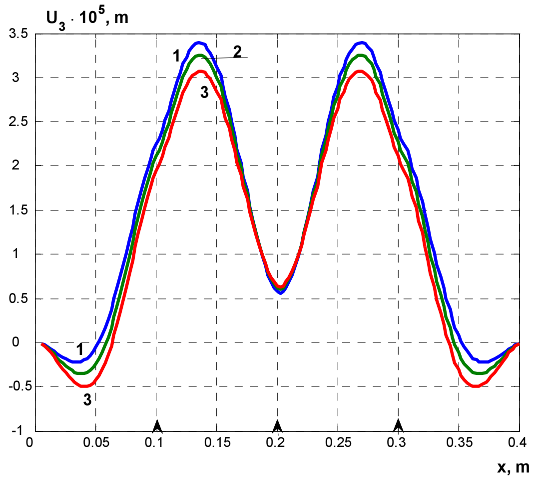

Рисунок 1

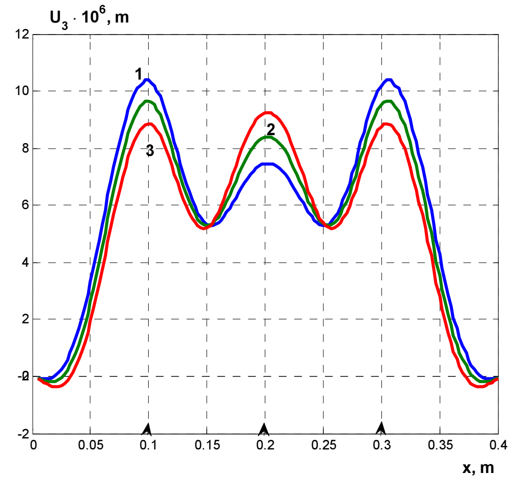

Рисунок 2

$0 < t \leq 40T$. На рис. 1, рис. 2 приведены зависимости прогиба u_3 по длине конструкции.

Рис. 1 соответствует зависимости прогиба u_3 от пространственной координаты x в сечении $y = \pi R / 4$ (сечение между ребрами) в момент времени $t = 8{,}5T$ (время достижения максимального значения u_3 для случая $C_1 = 1 \cdot 10^9$ Н/м^3). Кривая 1 соответствует случаю расчетов при $C_1 = 1 \cdot 10^9$ Н/м^3; кривая 2 – $C_1 = 2 \cdot 10^9$ Н/м^3; кривая 3 – $C_1 = 3 \cdot 10^9$ Н/м^3. На рис. 2 приведены соответствующие зависимости в тот же момент времени в сечении $y = 0$. Согласно представленного графического материала наблюдается явна зависимость величины прогиба от значений коэффициентов Винклера, от места расположения подкрепляющих ребер.

Выводы. Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях цилиндрической дискретно подкрепленной оболочки на упругом основании при распределенной нагрузке. Динамическое поведение неоднородной цилиндрической оболочки рассматривается в рамках теории оболочек и стержней типа Тимошенко. Для решения поставленной задачи используется метод конечных разностей по пространственным и временной координатам. Приведены численные результаты решения задач, позволяющие проводить детальный анализ влияния упругого основания Винклера на напряженно – деформированное состояние исходной неоднородной оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вестяк А.В. Нестационарные взаимодействия деформируемых тел с окружающий средой / А.В. Вестяк, А.Г. Горшков, Д.В. Тарлаковский // Итоги науки и техн.: Мех. деф. тверд, тела. Т. 15. -М.: ВИНИТИ, 1983. - С. 69-148.20.
2. Перельмутер А.В. Расчетные модели сооружений и возможности их анализа. / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер – Киев: Сталь, 2000. – 600с.
3. Гузь А.Н. Методы расчета оболочек, т. 5. – Теория нестационарной аэро-гидроупругости оболочек. / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко – Киев: Наук. думка, 1983.– 400 с.
4. Головко К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: монография / К.Г. Головко, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш; под ред. акад НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд. полигр. центр «Киевский ун–т», 2012. – 541 с.
5. Головко К.Г. О решении осесимметрических задач динамики цилиндрических оболочек на упругом основании / К.Г. Головко, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 2007. – 43, № 12. – С. 85 –94.

6. Головко К.Г. Динамическое поведение сферических оболочек на упругом основании при импульсных нагрузках / К.Г. Головко, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Системні технології. Вип.: Математичні проблеми технічної механіки. -№4 (51), 2007. – С.9 -13.
7. Луговой П.З. О решении осестмметричных задач динамики подкрепленных оболочек вращения на упругом основании / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, К.Г. Головко // Прикл. механика. – 2009. – **45** , № 2. – С. 99 – 106.
8. Луговой П.З. О решении осесимметричных задач динамики подкрепленных конических оболочеч на упругом основании / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій / Дніпропетровський Національний ун–т. – 2009, вип. 13. – С. 142 – 148.
9. Луговой П.З. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Э.А. Штанцель. – К: Издательско – полиграфический центр “Киевский университет”, 2005. – 536с.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. / А.А. Самарский – М.: Наука, 1977. – 656 с.

Поступила в редколлегию 28.02.2013

УДК 539.3

КОВАЛЕНКО А.П.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ УПРУГИЙ ТРУБОПРОВОД – ЖИДКОСТЬ ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

Постановка проблемы. Составляющей частью многих технических устройств являются трубопроводы с жидкостью. При эксплуатации такие устройства зачастую подвержены различного типа динамическим (в том числе и ударным) продольным нагрузкам и одним из актуальных вопросов является исследование переходных процессов в рассматриваемых гидроупругих системах. Для изучения таких процессов необходимо построить механическую и математическую модели; выявить характерные параметры для исследуемой гидроупругой системы; разработать метод решения и исследовать влияние характерных величин на переходные процессы в такой гидроупругой системе.

Анализ публикаций по теме исследования. На протяжении последних десятилетий проводятся активные исследования по изучению переходных процессов в гидроупругих системах [1-4]. При этом рассматриваются задачи как в нелинейной так и