ЛИТЕРАТУРА

1. Червоный А.А. Надежность сложных систем / Червоный А.А., Лукъященко В.И. – [2-е изд, перераб. и доп.]. – М.: Машиностроение, 1976. – 288 с.
2. Синергетика и фракталы в материаловедении / [В.С. Иванова, А.С. Баланкин и др.]. - М.: Наука, 1994. – 382 с.
3. Надежность и эффективность в технике: Справочник в 10 т.; т. 7. – Качество и надежность в производстве /под ред. И.В. Апполонова. - М.: Машиностроение, 1989.– 280 с.
4. Хакен Г. Синергетика: Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах / Хакен Г. - М.: Мир, 1985. – 419 с.
5. Флейшман Б.С. Основы системологии / Флейшман Б.С. – М.: Радио и связь, 1982. – 368 с.

Поступила в редколлегию 05.03.2013

УДК 539.3

БАЩУК Е.Ю., к. физ.-мат. н.*
БЫСТРОВ В.М., к. физ.-мат. н.
ЗЕЛЕНСКИЙ В.С., к. физ.-мат. н.

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины
*Национальный университет государственной налоговой службы Украины

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНЫ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ

Введение. Одной из актуальных проблем механики разрушения материалов и элементов конструкций является исследование устойчивости хрупких тел, содержащих начальную трещину, при одноосном сжатии [1, 2]. В случае тонкостенных элементов конструкций эта проблема может рассматриваться в различных аспектах, определяющих механизмы их разрушения. Один из таких аспектов – это анализ влияния формы потери устойчивости в окрестности начальной трещины на текстуру материала (форму трещины) и дальнейшее развитие трещины, другой – анализ влияния формы и размеров начальной трещины на критическую нагрузку для различных условий нагружения и закрепления элемента конструкции. В работах [3, 4] решены задачи определения критических параметров устойчивости пластины с центральной трещиной при одноосном сжатии вдоль направления размещения трещины. При исследовании потери устойчивости применялась трехмерная линеаризированная теория устойчивости деформируемых тел [5, 6]. Рассмотрены случаи шарнирного опирания и шарнирного закрепления торцов пластины. Первый случай соответствует однородному докритическому состоянию, второй – неоднородному. В качестве расчетной схемы использована плоская задача теории устойчивости для второго варианта теории малых докритических деформаций, когда начальное состояние определяется на основе решения задачи линейной теории упругости. Численное решение задачи получено с использованием метода сеток на основе концепции базовых схем [7 - 9]. В данной работе с использованием указанной расчетной схемы исследуется влияние размеров трещины на критическую нагрузку и форму потери утойчивости пластины для случая шарнирного закрепления торцов пластины (неоднородное начальное состояние).

Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная в плане пластина достаточно протяженная в направлении, перпендикулярном действию нагрузки и содержащая в этом направлении сквозную трещину в виде математического разреза (нулевой толщины) длиной $2t$. Геометрия расчетной области, условия нагружения и закрепления пластины, а также соответствующие граничные условия представлены на рис. 1. С учетом симметрии условий нагружения и закрепления пластины задача рассматривается для области $\overline{\Omega} = \{(x_1, x_1) | 0 \le x_1 \le l_1, 0 \le x_2 \le l_2\}$ (на рисунке заштрихована).

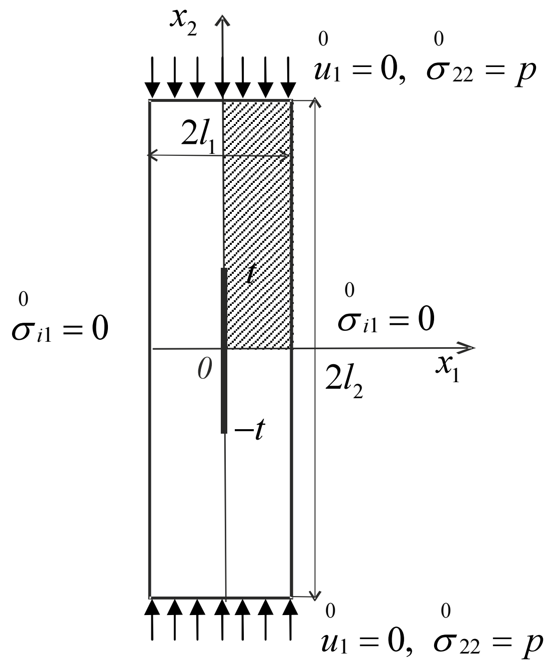

Рисунок 1 – Геометрия расчетной области, условия нагружения и закрепления

Для нахождения критических параметров устойчивости пластины с трещиной при одноосном сжатии применяется статический метод трехмерной линеаризированной теории устойчивости для второго варианта теории малых докритических деформаций [5]. Задача сводится к обобщенной задаче на собственные значения, в которой минимальное собственное значение определяет критическую загрузку, а соответствующая собственная функция – форму потери устойчивости. Таким образом, задача определения критических параметров устойчивости включает следующие соотношения:

уравнения в возмущениях:

$$(\sigma_{im} + \lambda \overset{0}{\sigma}_{ik} u_{m,k})_{,i} = 0\,,\ (x_1, x_2) \in \Omega\,; \tag{1}$$

граничные условия:

$$(\sigma_{21} + \lambda \overset{0}{\sigma}_{2k} u_{1,k}) = 0,\ u_2 = 0\,,\ (0 \le x_1 \le l_1) \wedge (x_2 = 0)\,,$$

$$(\sigma_{1m} + \lambda \overset{0}{\sigma}_{1k} u_{m,k}) = 0\,,\ \ (x_1 = 0) \wedge (0 \le x_2 \le t)\,,$$

$$u_1 = 0\,,\ (\sigma_{12} + \lambda \overset{0}{\sigma}_{1k} u_{2,k}) = 0\,,\ \ (x_1 = 0) \wedge (t \le x_2 \le l_2)\,, \tag{2}$$

$$u_1 = 0\,,\ (\sigma_{22} + \lambda \overset{0}{\sigma}_{2k} u_{2,k}) = 0,\ \ (0 \le x_1 \le l_1) \wedge (x_2 = l_2)\,,$$

$$(\sigma_{1m} + \lambda \overset{0}{\sigma}_{1k} u_{m,k}) = 0\,,\ \ (x_1 = l_1) \wedge (0 \le x_2 \le l_2)\,,$$

условие для определения критической нагрузки:

$$p_{кр} = \min |\,\lambda\,|\, p\,, \tag{3}$$

где λ – минимальное собственное число задачи (1) - (2), p – интенсивность поверхностной нагрузки, приложенной к торцу пластины.

Компоненты докритического состояния (в соотношениях (1) – (3) обозначены индексом “0”) определяются из уравнений линейной теории упругости, которые вместе с граничными условиями и основными соотношениями упругости могут быть представлены следующим образом:

уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j} = 0\,,\ (x_1, x_2) \in \Omega\,, \tag{4}$$

граничные условия:

$$\sigma_{21} = 0\,,\ u_2 = 0\,,\ \ (0 \le x_1 \le l_1) \wedge (x_2 = 0)$$

$$\sigma_{i1} = 0\,,\ \ (x_1 = 0) \wedge (0 \le x_2 \le t)\,,$$

$$u_1 = 0\,,\ \sigma_{21} = 0\,,\ \ (x_1 = 0) \wedge (t \le x_2 \le l_2)\,, \tag{5}$$

$$u_1 = 0\,,\ \sigma_{22} = p,,\ \ (0 \le x_1 \le l_1) \wedge (x_2 = l_2)\,,$$

$$\sigma_{i1} = 0\,,\ \ (x_1 = l_1) \wedge (0 \le x_2 \le l_2)\,,$$

соотношения между компонентами напряжений, деформаций и перемещений:

$$\sigma_{ii} = A_{ik} \varepsilon_{ik}\,,\ \sigma_{ij} = 2G\ \ \varepsilon_{ij}\,,\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\,,\ i \ne j\,,$$

(6)

$$A_{ii} = \frac{E\ (1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ \ A_{ij} = \frac{E\ \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ i \neq j\ .$$

Обозначения в (1) - (6) являются общепринятыми и индексы изменяются от 1 до 2. В соотношениях (4) – (6) индекс “0” для удобства опущен. Линеаризованные соотношения напряжения – деформации и деформации – перемещения имеют такой же вид, как и соотношения (6).

Для численного решения задачи (1) – (6) применялся метод сеток на основе базовых схем [7 - 9]. Для решения разностных задач использовались эффективные численные методы (прямые и итерационные) в соответствии с методикой, представленной в работе [7]. Для решения системы линейных алгебраических уравнений, соответствующей задаче (4) – (6), использовался прямой метод Холецкого [10], а для решения обобщенной проблемы собственных значений, соответствующей задаче (1) - (3) – метод итерирования подпространства [11].

Результаты численного решения задачи. Расчеты проведены для следующих геометрических и механических характеристик пластины: $E = 52ГПа,\ \nu = 0.3,\ p{=}1ГПа\,,\ l_2 / l_1 = 10,\ \ t/l_2 = 0 \div 0.75$.

На рис. 2 показано изменение критической нагрузки $p_{кр}$ при изменении длины t трещины. На рис. 3 приведены формы потери устойчивости в окрестности трещины для различных значений ее длины. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют формам потери устойчивости для следующих значений t/l_2 длины трещины: 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.75. Из полученных результатов следует, что наличие трещины приводит к существенному уменьшению критической нагрузки по сравнению с однородной пластиной ($t = 0$). Увеличение длины трещины приводит к дальнейшему монотонному уменьшению критической нагрузки.

Выводы. Сравнение с результатами работы [3] для случая шарнирного опирания, когда в пластине реализуется однородное докритическое состояние, показывает, что неоднородность начального состояния, которое имеет место при шарнирном закреплении торцов пластины, приводит к увеличению критической нагрузки для однородных пластин (при отсутствии трещины). Такое увеличение достигает 40%. В то же время, при наличии центральной трещины, неоднородность начального состояния, связанная с граничными условиями на торцах пластины, практически не влияет на критические параметры устойчивости пластины. Это позволяет сделать вывод о том, что основные механизмы разрушения пластины определяются локальной потерей устойчивости в окрестности трещины.

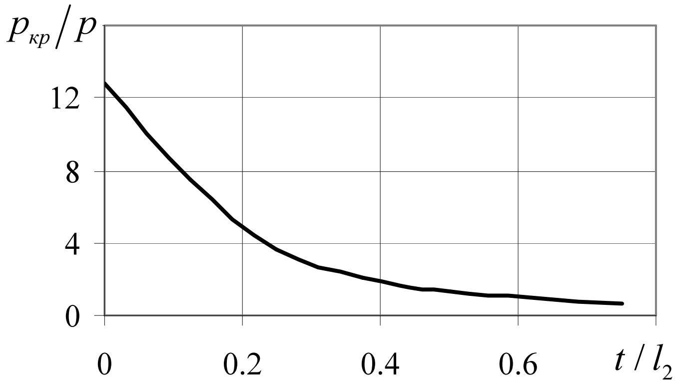

Рисунок 2 – Зависимость критической нагрузки от длины

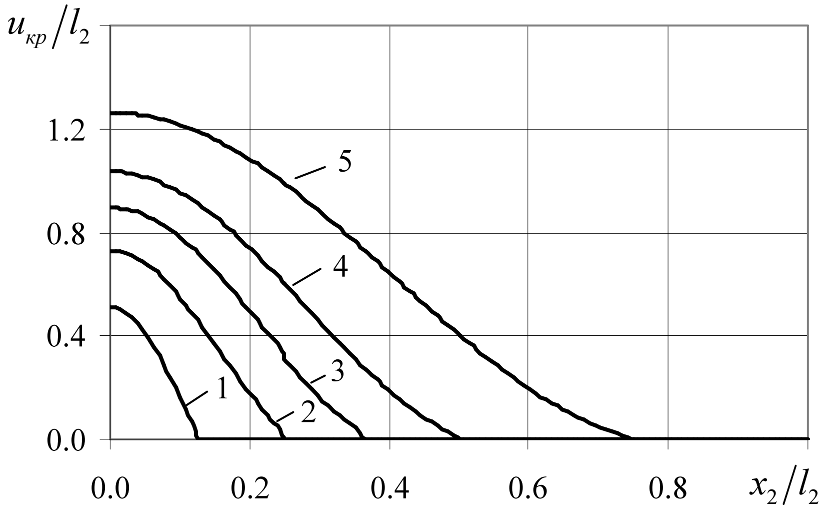

Рисунок 3 – Формы локальной потери устойчивости в окрестности трещины

Увеличение длины трещины приводит к уменьшению критической нагрузки и как следствие – уменьшению прочности пластины при сжатии. Информация о форме локальной потери устойчивости в окрестности трещины позволяет при дальнейшем исследовании провести анализ влияния предварительной потери устойчивости на разрушающую нагрузку [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Назаренко В.М. Разрушение и устойчивость материалов и элементов конструкций с трещинами: подходы и результаты // Успехи механики: В 6-ти т.;Т. 5.– К.: “Литера ЛТД”, 2009.– **32**.– №6– С. 661-705.

2. Костандов Ю.А., Макаров П.В., Еремин М.О., Смолин И.Ю., Шиповский И.Е. О разрушении хрупких тел с трещиной при сжатии // Прикл. механика. – 2013. – 49. № 1. – С. 113 – 121.
3. Гузь А.Н., Гладун Е.Ю. О трехмерной устойчивости пластины с трещиной // Прикл. механика. – 2001. – 37. № 10. – С. 53 – 62.
4. Коханенко Е. Ю. Устойчивость пластины с трещиной при неоднородном докритическом состоянии // Доп. НАН України . – 2007. – № 12. – С. 60 – 63.
5. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел – К.: Наук. Вища школа, 1986. – 512с.
6. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimentional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin –Heidelberg – New York: Springer, – 1999. – 555p.
7. Григоренко Я.М., Шевченко Ю.В., Василенко А.Т. и др. Численные методы // Механика композитов: В 12-и т. / Под общей ред. А.Н. Гузя. Т.11. – К.,: “А.С.К.”, 2002. – 448 с.
8. Зеленский В.С., Быстров В.М. Трехмерная устойчивость горного массива в окрестности прямоугольной горной выработки, ослабленной геологической трещиной. – Проблемы вычислительной механики и устойчивости конструкций. – Днепропетр. Ун-тет. Им О. Гончара. – 2011, №7. – с. 153-158.
9. Зеленский В.С., Декрет В. А., Быстров В.М. Устойчивость слоистого композитного материала при одноосном нагружении. Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету. Тематичний випуск “Математичні проблеми технічної механіки” / Дніпродзержинськ:ДДТУ. – 2012. с. 49-53.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельнов С.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598 с.
11. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. – М.: Мир, 1983. – 384 с.

Поступила в редколлегию 05.03.2013