УДК 539.3

МЕЙШ В.Ф., д. фіз.-мат. н., професор
АРНАУТА Н.В., к. фіз.-мат. н.

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України
Національний університет біоресурсів і природокористування України

ВИКОРИСТАННЯ АПРОКСИМАЦІЇ РІЧАРДСОНА ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ БАГАТОШАРОВИХ ДИСКРЕТНО ПІДКРІПЛЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Вступ. Особливістю створення сучасних шаруватих конструкцій полягає в проектуванні їх спільної форми разом з матеріалами, що потребує в свою чергу розробку теорії і методів розрахунку, які дозволяють в нерозривному зв'язку оцінювати напружено – деформований стан конструкцій заданої геометричної, з врахуванням неоднорідності, структури. Реалізація моделей неоднорідних оболонкових структур викликає необхідність вдосконалення і розвитку існуючих чисельних методів будівельної механіки, які є ефективними для розрахунку вказаних конструкцій.

Неоднорідна пружна структура з врахуванням дискретних включень представляє собою безпосередньо обшивку (багатошарову оболонку обертання) та набір дискретних повздовжньо – поперечних підкріплюючих ребер. Рівняння осесиметричних коливань багатошарових циліндричних оболонок з врахуванням дискретності підкріплень при динамічних навантаженнях є найбільш простою моделлю коливань вказаних структур.

В даній роботі розглядається постановка задачі нестаціонарної поведінки багатошарових дискретно підкріплених циліндричних оболонок, побудова чисельного алгоритму із застосуванням апроксимацій типу Річардсона та розв'язування вказаних задач і аналіз отриманих результатів.

Постановка задачі. Багатошарова циліндрична оболонка з врахуванням дискретності представляє собою багатошарову гладку циліндричну оболонку з жорстко-з'єднаними шарами і дискретними підкріплюючими кільцевими елементами. Покладається, що для розрахунку напружено – деформованого стану (НДС) пружної структури використовується варіант геометрично нелінійної теорії стержнів і оболонок типу Тимошенко. Підкріплюючі елементи розглядаються як набір криволінійних стержнів, які жорстко з'єднані з оболонкою. Для розрахунку приймається варіант теорії криволінійних стержнів типу Тимошенка.

За допомогою варіаційного принципу Рейсснера для динамічних процесів [1,2] отримано наступні системи рівнянь (рівняння осесиметричних коливань багатошарової неоднорідної пружної структури отримані як частинний випадок рівнянь [1]):

1) рівняння коливань власно багатошарової оболонки в гладкій області між відповідними дискретними ребрами

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + P_1 = I_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \overline{T}_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} + P_3 = I_1 \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}^*}{\partial x} - T_{13} + m_1 = I_2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2},$$

$$\overline{T}_{13} = T_{13} + T_{11}\Theta_1; \; M_{11}^* = M_{11} \pm h_{cm} T_{11};$$

2) рівняння коливань j – го кільцевого ребра в точках розривів $x = x_j$ (точки проектування центрів ваги поперечного перерізу на приведену серединну поверхню гладкої багатошарової оболонки)

$$\left[T_{11}\right]_j = \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \; \left[\overline{T}_{13}\right]_j - \frac{T_{22j}}{R_j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \tag{2}$$

$$\left[M_{11}\right]_j = \rho_j F_j \left[\pm h_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) + \frac{I_{\kappa pj}}{F_j} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right],$$

де

$$\left(T_{11}, T_{22}, T_{13}\right) = \sum_k \int_z \left(\sigma_{11}^{kz}, \sigma_{22}^{kz}, \sigma_{13}^{kz}\right) dz, \quad \left(M_{11}\right) = \sum_k \int_z \left(z\sigma_{11}^{kz}\right) dz,$$

$$I_1 = \sum_k \rho_k h_k, \quad I_2 = \sum_k \pm \rho_k h_k h_{ck}, \quad I_3 = \sum_k \rho_k \frac{h_k}{12}.$$

В рівняннях (1) – (2) введено наступні позначення: x, t – просторова та часова координати відповідно, R – радіус приведеної серединної поверхні багатошарової оболонки; ρ_k, ρ_j – щільності матеріалів відповідно k – го шару оболонки та j – го ребра; h_k - товщини відповідних шарів оболонки, h_{ck} - відстань від вихідної серединної поверхні до серединної поверхні k – го шару; h_{cj} — відстань від вихідної серединної поверхні до лінії центру ваги поперечного перерізу j-го ребра; x_j — координата лінії контакту j-го ребра з багатошаровою оболонкою; R_j, F_j, I_{kpj} – геометричні параметри j – го ребра. В позначеннях для величин зусиль і моментів покладається, що $\sigma_{11}^{kz}, \sigma_{22}^{kz}, \sigma_{13}^{kz}$ — напруження по товщині відповідно k – го шару, $k = \overline{1,n}$. Зв'язок між величинами напружень і компонентами деформацій вводиться згідно формул:

$$\sigma_{11}^{kz} = \frac{E_1^k}{1-\nu_1^k \nu_2^k}(\varepsilon_{11}^{kz} + \nu_2^k \varepsilon_{22}^{kz}), \; \sigma_{22}^{kz} = \frac{E_2^k}{1-\nu_1^k \nu_2^k}(\varepsilon_{22}^{kz} + \nu_1^k \varepsilon_{11}^{kz}), \; \sigma_{13}^{kz} = G_{13}^{kz} \varepsilon_{13}^{kz}, \tag{3}$$

де компоненти тензора деформацій в системі координат x, z мають вигляд:

$$\varepsilon_{11}^{kz} = \varepsilon_{11}^{k} + z\theta_{11}^{k},\ \ \varepsilon_{22}^{kz} = \kappa_2 u_3^k,\ \ \varepsilon_{13}^{kz} = \varphi_1^k + \theta_1^k,$$

$$\varepsilon_{11}^{k} = \frac{\partial u_1^k}{\partial x} + \frac{1}{2}[\theta_1^k]^2,\ \vartheta_{11}^{k} = \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial x},\ \theta_1^k = \frac{\partial u_3^k}{\partial x},\ k = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Рівняння коливань (1) – (4) доповнюються відповідно природними граничними та початковими умовами.

Однією з складностей розв’язку крайових задач теорії підкріплених оболонок з врахуванням дискретного розміщення ребер є наявність розривних коефіцієнтів в рівняннях коливань. Згідно [1,2], шукаємо роз’язок на гладкій частині і “склеюємо” на лініях розриву . В розглянутій задачі лініями розривів є точки проектування центрів ваги поперечного перерізу відповідного j-го ребра на серединну поверхню обшивки.

Чисельний алгоритм. Для побудови різницевої схеми для розв’язку рівнянь (1)–(4) використовуються інтегро – інтерполяційний метод побудови скінчено – різницевих схем [3] для гіперболічних рівнянь. Згідно цього підходу, рівняння (1) представимо в наступному вигляді в області

$$\{x_{l-1/2} \le x \le x_{l+1/2},\ t_{n-1/2} \le t \le t_{n+1/2}\}$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}}\int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \frac{\partial T_{11}}{\partial x}\,dx\,dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}}\int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \left(I_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + I_2\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right) dx\,dt\,; \qquad \mathbf{(5)}$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}}\int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \left[\frac{\partial \overline{T}_{13}}{\partial x} - \frac{\partial T_{22}}{R} + P_3(x,t)\right] dx\,dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}}\int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} I_1\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\,dx\,dt\,;$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}}\int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \left[\frac{\partial M_{11}^*}{\partial x} - T_{13}\right] dx\,dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}}\int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \left[I_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + I_3\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right] dx\,dt\,.$$

Після стандартних перетворень в співвідношеннях (5), отримаємо наступні різницеві апроксимації рівнянь (1)

$$L_1(\overline{U}_l^n) = I_1(u_{1l}^n)_{\bar{t}t} + I_2(\varphi_{1l}^n)_{\bar{t}t}\ ; \qquad (6)$$

$$L_2(\overline{U}_l^n) + P_3(x_l, t_n) = I_1(u_{3l}^n)_{\bar{t}t}\ ; \qquad L_3(\overline{U}_l^n) = I_2(u_{1l}^n)_{\bar{t}t} + I_3(\varphi_{1l}^n)_{\bar{t}t}\ ;$$

де

$$L_1(\overline{U}_l^n) = \frac{T_{11\,l+1/2}^n - T_{11\,l-1/2}^n}{\Delta x}\,; \qquad (7)$$

$$L_2(\overline{U}_l^n) = \frac{\overline{T}_{13\,l+1/2}^n - \overline{T}_{13\,l-1/2}^n}{\Delta x} - \frac{T_{22\,l+1/2}^n + T_{22\,l-1/2}^n}{2R}\,;$$

$$L_3(\overline{U}_l^n) = \frac{M_{11\,l+1/2}^{*n} - M_{11\,l-1/2}^{*n}}{\Delta x} - \frac{T_{13\,l+1/2}^n + T_{13\,l-1/2}^n}{2}\,.$$

В співвідношеннях (6) $\overline{U}_l^n = (u_{1l}^n, u_{3l}^n, \varphi_{1l}^n)$, а позначення дискретних похідних введено згідно [3]. Як видно з представлення (6), величини зусиль і моментів співвідносяться до різницевих точок в напівцілих точках по просторовій координаті і в цілих точках по часовій координаті

$$T_{11}, T_{22}, \overline{T}_{13}, M_{11} \quad \to \left(T_{11\ l\pm 1/2}^n, T_{22\ l\pm 1/2}^n, \overline{T}_{13\ l\pm 1/2}^n, M_{11 l\pm 1/2}^n \right).$$

Виходячи з цього, рівняння (3) – (4) інтегруються відповідно в областях

$$\{x_{l-1} \le x \le x_l,\ t_{n-1/2} \le t \le t_{n+1/2}\} \text{ і } \{x_l \le x \le x_{l+1},\ t_{n-1/2} \le t \le t_{n+1/2}\}.$$

Аналогічним чином проводиться чисельне інтегрування рівнянь коливань (2) для j – го підкріплюючого елементу.

Як вже відмічалося, в ряді випадків, при чисельному розв’язку рівнянь (1) – (4) на основі апроксимацій (6) спостерігається погіршення збіжності чисельних результатів. Для побудови більш ефективних чисельних алгоритмів застосовується підхід, що базується на знаходженні наближених розв’язків по Річардсону [4]. Причому, при фіксованому різницевому кроку по часовій координаті, використовується послідовність наближених апроксимацій по просторовій координаті. При цьому, процедура екстраполяції формується згідно формул

$$\tilde{\overline{U}}_{l(\Delta x)}^n = \frac{4}{3}\overline{U}_{l(\Delta x/2)}^n \quad \frac{1}{3}\overline{U}_{l(\Delta x)}^n, \tag{8}$$

де $\overline{U}_{l(\Delta x)}^n$ і $\overline{U}_{l(\Delta x/2)}^n$ - чисельні розв’язки рівнянь коливань (6), (7) відповідно з дискретними кроками по просторовій координаті Δx і $\Delta x/2$.

Неважко показати, що різницеві рівняння (8) апроксимують вихідні рівняння коливань (1) в гладкій області з четвертим порядком точності по координаті X.

Розглядалася задача визначення напружено – деформованого стану п’ятишарової циліндричної оболонки при нестаціонарному навантаженні. Крайові умови для такого випадку мають вигляд при $x=0$, $x=L$: $U_1=U_2=\varphi_3=0$; де L – довжина оболонки. Початкові умови нульові. Нестаціонарне розподілене навантаження задавалося у вигляді: $P_3(t) = A\sin\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)\left[\eta(t) - \eta(t-T)\right]$, де A – амплітуда навантаження, T – тривалість навантаження.

Задача розглядалася при наступних геометричні і фізико-механічні параметрах:

$$E_1^1 \big/ E_1^{3an} = 100 \div 1000;\ \nu_1^1 = 0{,}3;\ \nu_1^{3an} = 0{,}4;\ \rho_1/\rho_{3an} = 7$$

$$R/h = 20;\ h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5;\ L/R = 1.25;\ A = 10^5\ \text{Н/м}^2;$$

$$\rho_j = \rho;\ E_j = E_1^1;\ h_j/h = 3;\ \alpha_{1j} = 0.25jL,\ j = \overline{1,3}.$$

Покладалося, що перший, третій і п’ятий шари неоднорідної оболонки характеризуються наступними фізико-механічними параметрами:

$E_1^1 = E_1^3 = E_1^5 = 7 \cdot 10^{10}\,Па;\;\; \rho^1 = \rho^3 = \rho^5 = 2{,}7 \cdot 10^3\,кг/м^3$. А другий і четвертий шари характеризуються матеріалом з наступними фізико-механічними параметрами (заповнювач) $E_1^{3ап}; \nu_1^{3ап}; \rho_{3ап}$.

В таблицях 1 – 4 приведено частково результати розрахунків згідно двох підходів – стандартного з фіксованим кроком Δx і згідно підходу по Річардсону з кроками Δx і $\Delta x/2$. В таблицях 1 – 2 приведено результати розрахунків в гладкій області оболонки для величин U_3 і σ_{22} в перерізі оболонки $x = 7L/40$ для фіксованого часу $t = 8{,}5T$ (l - кількість дискретних інтервалів по просторовій координаті).

Як видно з приведених результатів, застосування екстраполяції Річардсона дозволяє досягти достатньої точності в порівнянні з стандартним підходом чисельного розв'язку вихідних рівнянь на більш грубих різницевих сітках по просторовій координаті. Використання даного підходу дозволяє отримати виграш в кількості обчислювальних операцій порядку в три рази ($\approx$1,5 рази за рахунок використання просторових сіток і порядку 2 разу за рахунок дискретного часового кроку).

Таблиця 1 Розрахунки для величини U_3

Стандартні розрахунки			Розрахунки по Річардсону		
Δt	l	$U_3 \cdot 10^4$, м	Δt	l	$U_3 \cdot 10^4$, м
Δt_1	40	0,557	Δt_1	$40 \div 80$	0,573
	80	0,569			
	160	0,573		$80 \div 160$	0,574
$0{,}5\Delta t_1$	320	0,576			

Таблиця 2 Розрахунки для величини σ_{22}

Стандартні розрахунки			Розрахунки по Річардсону		
Δt	1	$\sigma_{22} \cdot 10^8$, Па	Δt	l	$\sigma_{22} \cdot 10^8$, Па
Δt_1	40	0,412	Δt_1	$40 \div 80$	0,420
	80	0,418			
	160	0,419		$80 \div 160$	0,420
$0{,}5\Delta t_1$	320	0,421			

ЛІТЕРАТУРА

1. Мейш В.Ф., Арнаута Н.В., Заболотный Г.М. Вынужденные колебания многослойных продольно подкрепленных цилиндрических оболочек при нестационарных загрузках \\ Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2009. – Вип. 10. – 197 – 203 с.

2. Мейш В.Ф., Кравченко Н.В. До розрахунку наружено – деформованого стану багатошарових оболонок з дискретними неоднорідностями при нестаціонарних навантаженнях\\ Вісник Київського університету. Серія: фіз.– мат. науки. - 2002. – Вип. №3. – С. 210 – 216.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. - 656 с.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 454с.

Поступила в редколлегию 11.03.2013

УДК 539.3

ЧЕРВИНКО О.П., к. физ.-мат. н., н. с.
ДОЛЯ Е.В., к. физ.-мат. н., доцент
ЯКИМЕНКО Н.С., к. физ.-мат. н.

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины
Киевский Национальный университет строительства и архитектуры
Кировоградский национальный технический университет

УСТАЛОСТНОЕ ТЕРМИЧЕСКОЕ РАЗРУШЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ СЛОИСТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Введение. Термическое усталостное разрушение определяется как потеря несущей способности вязкопластического материала вследствие размягчения или виброразогрева [1]. Предельное состояние обычно связывают с достижением температуры некоторого критического значения $\theta = \theta_f$, например, температуры вязкотекучего перехода $\theta_f = \theta_{\hat{a}\grave{o}}$. Обобщение результатов исследования виброразогрева однородных вязкоупругих тел дается в монографиях [2, 3].

Связанные задачи термовязкоупругости для полимеров, упрочненных волокнами, рассмотрены в работе [4].

Настоящая работа посвящена тепловому разрушению призмы прямоугольного сечения, которая состоит из слоев меди и полиэтилена. Призма нагружается прямоугольным вибрирующим штампом в кинематическом или силовом режиме сжатия с частотой 20 кГц.

Постановка задачи. В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ упрощенная постановка связанной задачи термовязкоупругости для случая гармонической нагружения [2] включает в себя кинематические уравнения Коши, уравнения колебаний и теплопроводности.

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + \tilde{b}_i + \rho\omega^2\tilde{u}_i = 0, \qquad i, j = x, y, z \tag{1}$$