ЛІТЕРАТУРА

1. Haugen E. Bilingualism in the Americas: A Bibliography and Research Guide. – University of Alabama Press, 1968. – 159 p.
2. Донец П.Н. Основы общей теории межкультурной коммуникации: научный статус, понятийный аппарат, языковой и неязыковой аспекты, вопросы этики и дидактики. – Харьков: «Штрих», 2001. – 386 с.
3. Педагогика и психология высшей школы: Учеб. пос. – 3 - е изд., перераб. и доп. – Ростов н / Д: Феникс, 2006. – 512 с.
4. Нічуговська Л.І. Математична освіта і конкурентноздатність майбутніх випускників ВНЗ// Дидактика математики: проблеми і дослідження. – Донецьк: Вид-во ДонНУ. – 2007. – Вип. 28. – С. 17 – 20.
5. Никулин А.В. Эдукология высшей математики: фактор многоязычия и ИКТ: монография / А.В. Никулин, Т.В. Наконечная, Ю.А. Шепель. – Д.: Белая Е.А., 2011. – 148 с.

Поступила в редколлегию 28.02.2013

УДК 517.2

ВИШЕНСЬКА О.В., к. фіз.-мат. н., доцент
МЕЙШ Ю.А., к. фіз. - мат.-н., доцент

Національний транспортний університет, Київ

ДІАГНОСТИЧНО – КОРЕГУЮЧЕ ТЕСТУВАННЯ ПРИ ВИВЧЕННІ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ПОНЯТЬ АНАЛІЗУ

Вступ. Нині в переважній більшості вищих технічних, економічних тощо навчальних закладів контроль за вивченням математичних методів зводиться майже виключно до тестування, яке передбачає найпростіші застосування готових алгоритмічних процедур. Про це свідчать і численні методичні посібники, і деякі новітні підручники. При цьому «за бортом» лишається важлива й копітка робота над фундаментальними поняттями, зміст яких складає сутність математики [1 - 3]. У майбутньому це стане головною й здебільша непереборною перешкодою в удосконаленні й розширенні знань.

Над математичними поняттями слід працювати невпинно й винахідливо. В іншому разі вони будуть для студента позбавленими змісту словами, а математика поставатиме перед ним як дивна наука, утворена мало зрозумілими рецептами зовсім не зрозумілого походження.

В даній роботі обговорено одну із можливих методик вивчення поняття границі.

Постановка задачі. Успіх у вивченні основ математичного аналізу залежить повністю від того, наскільки якісно засвоєні початкові фундаментальні поняття, на яких базується весь аналіз. Чільне місце серед цих понять займає поняття границі. Це з наукового погляду визначальне поняття аналізу, а з дидактичного – логічно й психологічно найскладніше поняття.

Будемо говорити про границю послідовності. Все сказане нижче стосується також випадку функцій, що мають континуальну область існування.

Психологічна складність поняття границі послідовності полягає в тому, що ні існування границі, ні її значення не залежать від жодного окремого члена послідовності, від жодної скінченної множини її членів, а тільки від того, як послідовність розгортається при необмеженому зростанні номерів її членів. Психологічно це складна властивість. Вона невловима для того, хто вперше намагається опанувати це поняття. Адже виходить, що тільки «далекі» члени послідовності впливають на границю, а проте жодні конкретні її «далекі» члени на границю все – таки не впливають.

Логічна складність поняття границі полягає в його багатокванторності. Це перше в історії математики поняття такого типу. Ось точне логіко – арифметичне означення поняття границі послідовності (a_n):

$$\exists\, c \in R\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\ n > n_0 : |a_n - c| < \varepsilon.$$

Його не можна скоротити на жодний квантор. Два квантори існування і два квантори загальності внутрішньо притаманні цьому поняттю, відбиваючи його надзвичайно складну логічну структуру. Тож не дивно, що поняття границі не з тих, котрі можна зрозуміти відразу й у повному обсязі. Від студента воно вимагає тривалої праці й самовідданих розумових зусиль, а від викладача вмілого диригування процесом заглиблення в його сутність, поступового й здебільша тривалого в часі усвідомлення тонкощів, деталей і нюансів.

Найкращий шлях для цього не масована атака на обчислення окремих границь, спираючись на обмежений набір формальних правил, а серйозна аналітична робота над означенням. У чому вона має полягати? Які її найсуттєвіші складники?

Результати роботи. Передусім варто запропонувати кілька варіантів означення границі. Суб'єктивне сприйняття різних за формою означень може дуже суттєво вар'ювати. Це стосується навіть означень, котрі відрізняються одне від одного буквально кількома словами. Тому, врізномінітнюючи форму означень, збільшуємо шанс пробитися через бар'єр нерозуміння. Не чіпаючи традиційні різновиди означень границі послідовності, вкажемо на два менш відомі варіанти, котрі за вмілого використання здатні непогано виконати свої функції.

Перший варіант. Кажемо, що майже всі члени послідовності (a_n) мають властивість W, якщо цю властивість мають усі члени послідовності, за винятком, можливо, скінченного їх числа. Це означення не складне (порівняно з будь – яким прямим означенням границі послідовності) і його не складно відпрацювати на вправах на зразок:

Чи правда, що майже всі члени послідовності

1) $\left(\dfrac{5}{n}\right)$ менші від 1?

2) $(1000 - n)$ від'ємні?

3) $\left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)$ менші від 1?

4) $\left((-1)^n n\right)$ додатні?

5) $\left(\dfrac{2^n}{n^4}\right)$ більші від 1?

Чи правда, що майже всі члени будь – якої арифметичної прогресії з ненульовою різницею – числа однакового знака?

Це допоміжне поняття перебирає на себе частину дидактичних неприємностей, пов'язаних із поняттям границі, зменшуючи кванторність останнього. Послугуючись ним, отримуємо психологічно прийнятніше означення границі:

Точку (число) a_0 називають границею послідовності (a_n), якщо в кожному околі цієї точки лежать майже всі члени послідовності.

Другий варіант. Основного фігуранта в формально – арифметичному означенні границі – нерівність $|a_n - a_0| < \varepsilon$ – можна розглядати як нерівність з невідомим n. Саме так цілком доречно й розглядати її, особливо з огляду на те, що в останніх класах школи багато йдеться про розв'язування нерівностей. Означення границі послідовності набирає більш звичного для студента звучання.

Число a_0 називають границею послідовності (a_n), якщо за будь – якого додатного числа ε розв'язками нерівності

$$|a_n - a_0| < \varepsilon$$

є майже всі натуральні числа.

Або ж

Число a_0 називають границею послідовності (a_n), якщо за будь – якого $\varepsilon > 0$ нерівність

$$|a_n - a_0| > \varepsilon$$

має скінченну кількість натуральних розв'язків.

Наприклад, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, бо серед розв'язків нерівності $\frac{1}{n} > \varepsilon$, тобто на проміжку $\left(0; \frac{1}{\varepsilon}\right)$, є тільки скінченна кількість натуральних чисел.

Та найважливішим засобом, призначення якого – контролювати й корегувати процес засвоєння поняття границі, слід визнати спеціальний набір тестів, головна функція яких не оцінка набутих знань, а виявлення неточностей і деформацій в уявленні студента про границю послідовності. Тести добираються таким чином, що кожний передбачає відповідь «так», або «ні». Щоб відповісти на будь – який з них, студент має ще й ще раз мобілізувати свої знання про границю. Різні запитання змушують студента подивитися на поняття під новим кутом і не зрідка дещо змінити своє уявлення про нього. Сукупність усіх загалом тестів дає можливість сформувати крок за кроком правильне, повне й насичене нюансами розуміння цього первісного й фундаментального математичного поняття.

Далі наводимо характерні приклади тестів з коментарями щодо їхнього значення для правильного розуміння й тлумачення означення границі послідовності.

Завдання 1

1. Послідовність (a_n) не має границі. Чи можна, змінивши який – небудь один її член, отримати послідовність, що має границю?
2. Послідовність (c_n) має границю. Чи можна, змінивши які – небудь 1000 її членів, отримати послідовність, що:

   а) має іншу границю;

   б) не має границі?
3. Послідовність (t_n) має границю 1. Чи правда, що збільшивши кілька мільйонів її членів на 1, отримаємо послідовність, що має границю 2?

Завдання 2

Нехай послідовність (a_n) має границю 0. Чи зміниться її границя (або ж границя перестане існувати), якщо:

1. В послідовності поміняти місцями члени (a_{2k-1}) і (a_{2k}), $(k = 1, 2, 3, ...)$?

2. Усі члени послідовності з парними номерами замінити нулем, лишивши решту незмінними?
3. Усі члени з парними номерами замінити числом $\frac{1}{10^{10}}$, лишивши решту незмінними?
4. Поміняти знаки всіх членів?
5. Поміняти знаки всіх членів з парними номерами, лишивши решту незмінними?
6. Замінити всі члени послідовності їхніми модулями?

Завдання 3

Нехай послідовність (a_n) має границю 1. Чи випливає з цього, що:

1. У послідовності відсутні від’ємні члени?
2. Всі члени послідовності не менші від 1?
3. Всі члени послідовності більші від 1?
4. Деякі члени послідовності більші від 1?
5. Послідовність не має від’ємних членів, або ж їх скінченна кількість?
6. Послідовність має безліч додатних членів?
7. У послідовності є члени, що дорівнюють 1?
8. У послідовності немає членів, що дорівнюють 1?

Завдання 4

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$ 1. Чи правда, що:

1. Послідовність (c_n) не має від’ємних членів?
2. Якщо послідовність (c_n) має від’ємні члени, то їх скінченна кількість?
3. Якщо послідовність (c_n) має від’ємні члени, то їхні номери не перевищують 10^{10}?
4. За межами будь – якого проміжку $(a; b)$ (a і b - числа) лежить безліч членів послідовності (c_n)?
5. У будь – якому проміжку $(a; b)$ (a і b - числа) лежить скінченна кількість членів (можливо, 0) послідовності (c_n)?
6. У будь – якому проміжку $(a; +\infty)$ лежить безліч членів послідовності (c_n)?
7. Існує таке число p, що в проміжку $(p; +\infty)$ лежать усі члени послідовності (c_n)?
8. За межами будь – якого проміжку $(a; +\infty)$ лежить скінченна кількість членів послідовності (c_n)?

Завдання 5

1. У кожному околі точки 1 є члени послідовності (a_n). Чи означає це, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$?
2. За межами будь – якого проміжку $(-\infty; c)$ є члени послідовності (a_n). Чи означає це, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$?
3. Послідовність (a_n) має безліч членів, що дорівнюють 1. Чи означає це, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$?
4. Послідовність (a_n) має водночас такі властивості:

   а) вона має границю;

   б) вона має безліч додатних членів.

Чи означає це, що її границя – додатне число?

5. Послідовність (c_n) має відразу три такі властивості:

 а) вона має границю;
 б) у неї є додатні члени;
 в) у неї є від’ємні члени.
 Чи означає це, що $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$?

6. Послідовність (a_n) має відразу три такі властивості:

 а) вона має границю;
 б) у неї є безліч додатних членів;
 в) у неї є безліч від’ємних членів.
 Чи означає це, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

Запитання із *завдання 1* мають найнижчий рівень, але не є простими для студентів. Правильні відповіді на них означають, що студент зрозумів першу важливу істину: границю послідовності не можливо змінити, маніпулюючи скінченною кількістю її членів.

Хоча б одна неправильна відповідь сигналізує викладачеві, що її автор має ще раз спробувати усвідомити цей факт, що є суттєвою частиною означення границі.

Запитання із *завдання 2* – наступна сходинка. Студент має усвідомити, що зміна безлічі членів послідовності іноді здатна змінити її границю, а іноді ні. Серед запитань є, зокрема, ті, що мають першорядне значення для усвідомлення властивостей нескінченно малих послідовностей. Це – запитання 4 – 6.

Наступне *завдання 3* є продовженням і розвиненням попереднього. Воно стосується послідовностей, що мають ненульову границю.

Контрольно – навчальні тести *завдання 4* мають прислужитися засвоєнню поняття нескінченної границі.

Наступне *завдання 5* належить до ще вищого рівня. Воно призначене для того, щоб навчити відрізняти послідовності, що мають границю (або прямують до $+\infty$) від послідовностей, що не мають границь, але частково мають зі збіжними послідовностями спільні властивості (чи на перший погляд схожі властивості).

Висновки. В роботі розглянуто питання діагностично – корегуючого тестування при вивченні фундаментальних понять аналізу. Зокрема, розглянуто поняття границі числової послідовності. Наведено характерні приклади тестів з коментарями до них та тлумаченням означення границі послідовності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Потоцкий М.В. О педагогических основах обучения математике. Пособие для учителей.– М.: Гос. уч. – пед. изд – во мин. Просвещения РСФСР, 1963. – 200с.
2. Никифорский В.А. Рождение новой математики. / В.А. Никифорский, Л.А. Фрейман. – М.: Наука, 1976. – 196 с.
3. Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1989. – 650 с.

Поступила в редколлегию 28.02.2013