УДК 517.925

ЗАХАРІЙЧЕНКО Л.І., к. физ.-мат.н.
ЗАХАРІЙЧЕНКО Ю.О., к. физ.-мат.н.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
Національний університет «Києво – Могилянська Академія»

ЯКІСНА ТЕОРІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ: З ЧОГО ПОЧИНАТИ?

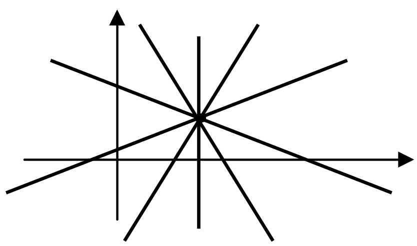
Вступ. В цій статті пропонується методика проведення початкової (вступної) лекції з курсу «Якісна теорія диференціальних рівнянь», що базується на повторенні вивченого матеріалу та його використання в цьому курсі.

Математичний курс «Якісна теорія диференціальних рівнянь» вивчається після таких курсів, як «Математичний аналіз», «Звичайні диференціальні рівняння», «Функціональний аналіз», тощо [2,4,5,8]. Тому для кращого засвоєння матеріалу варто повторити основні поняття вищезгаданих курсів, зробивши акцент на практичних завданнях [3,9,10].

Диференціальні рівняння застосовуються для вирішення задач з екології, фізики, техніки, біології, економіки тощо, але не завжди можна отримати розв'язки у явному вигляді [1,6,7]. Тому виникає потреба проаналізувати положення рівноваги системи диференціальних рівнянь та дослідити поведінку траєкторій в околі положення рівноваги.

Постановка задачі. Пропедевтикою вивчення цього курсу є наступні задачі.

Задача 1. На рисунку 1 зображено п'ять прямих, які проходять через точку $(x_0; y_0)$, що належить графіку функції $y = f(x)$. Укажіть номер прямої, яка може бути дотичною, проведеною до графіка цієї функції в точці $(x_0; y_0)$, якщо $f'(x_0) > 1$.



ис 1

Розв'язання та обговорення. З рисунку видно, що лише пряма 2 перетинає додатний напрямок вісі *Ox* під кутом, більшим за $45°$.

Доречно поставити студентам запитання щодо інших прямих, наприклад: «Якому проміжку $(-\infty;-1)$ або $(-1;+\infty)$ належить значення $f'(x_0)$, якщо пряма 4 є дотичною, проведеною до графіка цієї функції в точці $(x_0; y_0)$?».

Задача 2. На рисунку 2 зображено частину графіка функції $y = f(x)$ і дотичну, проведену до нього в точці з абсцисою $x_0 = -2$. Обчисліть $g'(-2)$, якщо:

1) $g(x) = 9x + f(x)$.

2) $g(x) = x \cdot f(x)$.

3) $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

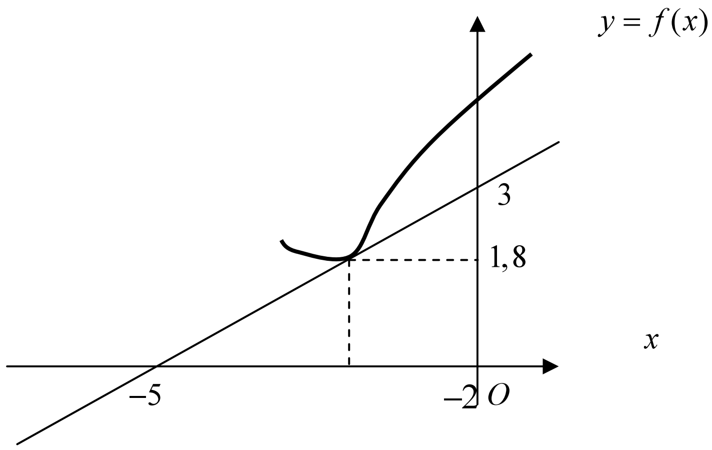


Рисунок 2

Розв'язання та обговорення. 1) $g'(x) = 9 + f'(x)$, $g'(-2) = 9 + f'(-2)$. Використовуючи графік функції, отримуємо $g'(-2) = 9 + 1{,}8 = 10{,}8$. Аналогічно розв'язуються наступні пункти.

Розглянуті задачі перевіряють як техніку диференціювання, так і розуміння геометричного змісту похідної, що буде використовуватись на наступних лекціях цього курсу.

Задача 3. На рисунку 3 зображено графік функції $y = ax^3 - 2x^2 + bx + c$. Визначте знаки параметрів a, b і c.

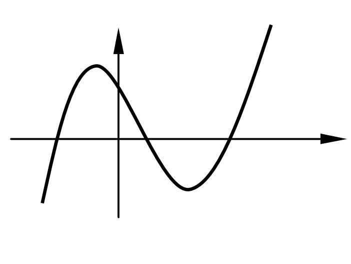


Рис. 3

Розв'язання та обговорення. З рисунку видно: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=+\infty$, звідки $a>0$; 2) $y'(0)<0$, звідки $b<0$.

Задача 4. На рисунку 4 зображено графік функції $y=\varphi(x)$, яка є розв'язком рівняння $y'=f(x)$. Побудуйте схематично графік розв'язку $y=\mu(x)$ задачі Коші $y'=f(x)$, $y(0)=0$. Знайдіть значення $\mu(1)$.

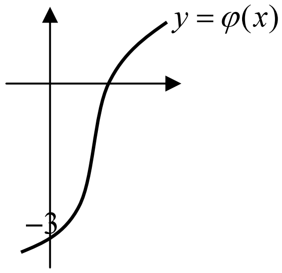


Рис.4

Розв'язання та обговорення. Розв'язки рівняння $y'=f(x)$ записуються у вигляді $y=\int f(x)dx+C$. Таким чином, розв'язок розглядуваної задачі Коші $y=\mu(x)$ отримується паралельним перенесенням заданого розв'язку $y=\varphi(x)$ на 3 одиниці вгору вздовж вісі Оy (дивись рисунок 5). Відповідно, $\mu(1)=3$.

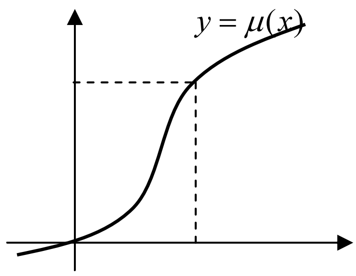


Рисунок 5

При розв'язанні цієї задачі використовується геометричний зміст первісної. Варто нагадати студентам зміст константи C, яка зустрічається при розв'язуванні звичайних диференціальних рівнянь.

Задача 5. На рисунку 6 зображено дотичну, проведену до одного із розв'язків $y=\varphi(x)$ рівняння $y'=f(x;y)$ в точці $M(x_0;y_0)$. Знайдіть: 1) знак похідної $\varphi'(x_0)$; 2) значення $f(x_0;y_0)$.

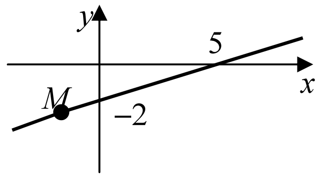


Рисунок 6

Розв'язання та обговорення. 1) Оскільки дотична, що проведена до одного із розв'язків $y=\varphi(x)$ рівняння $y'=f(x;y)$ в точці $M(x_0;y_0)$ перетинає додатний напрямок вісі Ox під гострим кутом, то $\varphi'(x_0)>0$. 2) В силу заданого рівняння $f(x_0;y_0)=y'(x_0)=\varphi'(x_0)$. Використовуючи геометричний зміст похідної, отримаємо $\varphi'(x_0)=tg\alpha=\dfrac{2}{5}$ (дивись рисунок **7).**

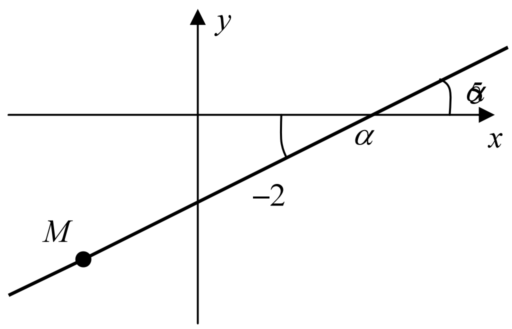


Рисунок 7

Після такої пропедевтики, студентам набагато простіше сприймати поняття поля напрямків та ізоклін, які використовуються при побудові фазового портрету систем диференціальних рівнянь.

Задача 6. Песик відійшов від свого хазяїна на відстань 3 м і почав бігати навколо нього по колу зі сталою швидкістю (дивись рисунок 8). Побудуйте графіки функцій $y=f(x)$ і $v=f'(x)$, де y — відстань (у метрах) між хазяїном і песиком, а x — час (у секундах) від початку руху по колу, $x\ge 0$.

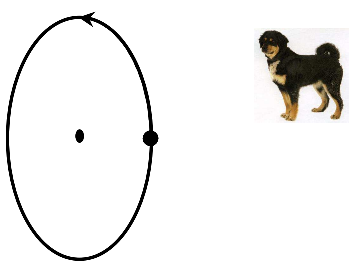


Рисунок 8

Розв'язання та обговорення. Рух по колу означає, що відстань y між хазяїном та песиком з часом x залишатиметься сталою – 3 м. Отже, графіком функції є пряма $y = 3$, при цьому графіком функції $v = f'(x)$ є пряма $y = 0$.

Доречно розглянути інші траєкторії руху песика, наприклад, рух по спіралі (дивись рисунки 9 і 10).

Рисунок 9

Для траєкторії, зображеної на рисунку 9, функція $y = f(x)$ зростає, а $v = f'(x) > 0$. Для траєкторії, зображеної на рисунку 10, функція $y = f(x)$ спадає, а $v = f'(x) < 0$.

Розглянуті траєкторії ілюструють поняття стійкості, нестійкості та асимптотичної стійкості, що допомагає засвоєнню матеріалу на більш глибокому рівні.

Висновки. Таким чином , пропедевтику курсу «Якісна теорія диференціальних рівнянь» варто починати з багатовекторних завдань, які перевіряють знання, розуміння, навички, та водночас готують студентів до нових математичних абстракцій. В статті наведено приклади таких завдань, розглянуто їх розв'язання та запропоновано питання для обговорення на лекціях.

ЛІТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.:Наука,1984. – 271с.
2. Бублик Б.Н., Гарщенко Ф.Г.,Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. –К.: Наукова думка, 1985. –305с.
3. Гудименко Ф.С., Павлюк І.А, Волкова В.О. Збірник задач з диференціальних рівнянь. –К.:Вища школа, 1972. –156с.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. –М.:Наука, 1967. –476с.
5. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. –472с.
6. Ляшко І.І., Боярчук О.К, Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. –К.: Вища школа, 1981. –504с.

7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. –М.: Наука, 1974. –332с.
8. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. –К.: Либідь, 1994. –360с.
9. Шкіль М.І., Сотниченко М.А. Звичайні диференціальні рівняння. –К.: Вища школа, 1992. –303с.
10. Захарійченко Ю.О., Школьний О.В., Захарійченко Л.І., Школьна О.В. Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань.– Х.: Ранок, 2011.– 496с.

Надійшла до редколегії 28.02.2013.