3. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. – 328с.
4. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2. Термовязкопластичность. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с.
5. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.
6. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Пискун В.В., Прохоренко И.В., Савченко В.Г. Решение осесимметричной задачи термопластичности для тонкостенных и толстостенных тел вращения на ЕС ЭВМ. – К.: Наук. думка, 1980. – 196 с.
7. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Прохоренко И.В. Методика решения осесимметричной задачи термовязкопластичности для тонких слоистых оболочек ЕС ЭВМ. – К.: Наук. думка, 1981. – 68 с.
8. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г., Ищенко Д.А., Павлычко В.М. Расчеты и испытания на прочность. Метод и пакет прикладных программ расчета на ЭВМ нестационарной теплопроводности и упругопластического напряженно-деформированного состояния элементов конструкций типа тел вращения при осесимметричных силовых и тепловых нагрузках. Рекомендации Р54 – 284 – 90. – М.: ВНИИНМАШ Госстандарта СССР, 1990. - 56с.
9. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.4).
10. Демина Н.И., Волков А.К., Застольская З.К. Влияние формы концентратора напряжения на механические свойства тонколистовой стали 25ХГСА при двухосном растяжении.//Пробл. прочности, 1980, №3. – С.51-53.
11. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И. и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебаний в условиях высоких температур. – М.: Машиностроение, 1965. – 568с.

Поступила в редколлегию 29.01.2013

УДК 539.3

ЗЕЛЕНСКИЙ В.С., к.физ.-мат.н.
БЫСТРОВ В.М., к.физ.-мат.н.
ДЕКРЕТ В. А. к.физ.-мат.н.

Институт Механики НАН Украины

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СЛОИСТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ

Введение. В работах [4,5] исследовано влияние геометрических параметров на критическую нагрузку для изотропных и анизотропных пластин. В работе [3] рассмотрена устойчивость матричного композитного материала регулярной структуры, находящегося под действием одноосной нагрузки.

В настоящей работе с использованием общих уравнений трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) [1] (математическая модель) и модели кусочно-однородной среды (механическая модель) в пространственной постановке исследуются влияние геметрических параметров на величину критической нагрузки слоистой прямоугольной пластины . Указанный подход является наиболее строгим и позволяет оценить точность результатов, полученных с применением различных приближенных теорий и расчетных схем.

Пластина представляет элемент конструкции из матричного слоистого двухкомпонентного композитного метериала с изотропными слоями (Рис.1).

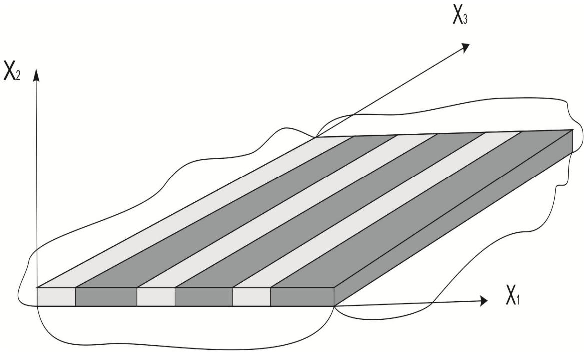

Рисунок 1

Постановка задачи. Рассматривается прстранственная задача устойчивости слоистой двухкомпонентной прямоугольной пластины сжимаемой вдоль оси Ox_1 усилиями интенсивности P_{11}^0 (рис.2) . Слои пластины имеют различные геометрические и механические характеристики. Торцы пластины $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1$ жестко защемлены в направлении x_2 и x_3 и допускают смещение в направлении x_1. Стороны $x_2 = 0, l_2$ и $x_3 = 0, l_3$ свободны от напряжений. Пластина находится в состоянии простого нагружения. В этом случае уравнения и граничные условия ТЛТУДТ для каждого слоя *к (к=1,2)* пластины запишутся в виде (индекс *к* опускаем).

$$(\sigma_{im} + \lambda\sigma_{ik}^0 u_{m,k})_{,i} = 0 \quad (1)$$

$$(\sigma_{11} + \lambda\sigma_{1j}^0 u_{1,j}) = 0;\ u_2 = u_3 = 0,\ \text{при}\ x_1 = 0 \vee (0 \le x_2 \le l_2 \vee 0 \le x_3 \le l_3)$$

$$(\sigma_{11} + \lambda\sigma_{1j}^0 u_{1,j}) = 0;\ u_2 = u_3 = 0,\ \text{при}\ x_1 = l_1 \vee (0 \le x_2 \le l_2 \vee 0 \le x_3 \le l_3)$$

$$\sigma_{im} = 0;\ \text{при}\ x_2 = 0, l_2 \vee (0 \le x_1 \le l_1 \vee 0 \le x_3 \le l_3) \quad (2)$$

$$\sigma_{im} = 0;\ \text{при}\ x_3 = 0, l_3 \vee (0 \le x_1 \le l_1 \vee 0 \le x_2 \le l_2),$$

и условиями на контакте

$$[u_m] = 0, [\sigma_{im}] = 0\ \text{при}\ x_1 = l_1^1 \vee (0 \le x_2 \le l_2 \vee 0 \le x_3 \le l_3) \quad (3)$$

Интенсивность критической нагрузки определяется по формуле.

$$P_{kp} = \min|\lambda| \frac{1}{l_2 l_3} \int_0^{l_2}\int_0^{l_3} P_{11}^0(x_2, x_3) dx_2 dx_3 \mid x_1 = const., \quad (4)$$

где $\min|\lambda|$- минимальное по модулю собственное число задачи (1)-(3), P_{11}^0 – интенсивность начальной нагрузки, приложенной к торцам пластины.

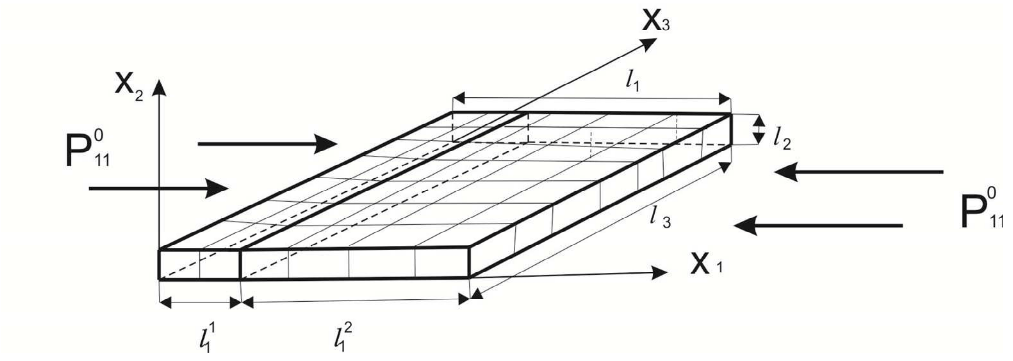

Рисунок 2

В рассматриваемом случае начальное состояние неоднородное и компоненты начального состояния определяются из уравнений линейной теории упругости

$$\sigma^0_{ij,i} = 0 \qquad (5)$$

С граничными условиями

$$\begin{aligned} &\sigma_{im} = 0 \text{ при } x_2 = 0, l_2 \vee (0 \le x_1 \le l_1 \vee 0 \le x_3 \le l_3), \\ &\sigma_{im} = 0 \text{ при } x_3 = 0, l_3 \vee (0 \le x_1 \le l_1 \vee 0 \le x_2 \le l_2), \qquad (6) \\ &\sigma^0_{11} = P^0_{11}, u_2 = u_3 = 0 \text{ при } x_1 = 0, l_1 \vee (0 \le x_2 \le l_2 \vee 0 \le x_3 \le l_3) \end{aligned}$$

и условиями на контакте

$$[u_m] = 0, [\sigma_{im}] = 0 \text{ при } x_1 = l_1^1 \vee (0 \le x_2 \le l_2 \vee 0 \le x_3 \le l_3) \qquad (7)$$

В пределах каждого слоя пластины закон Гука имеет вид

$$\sigma^0_{ij} = \delta_{ij} A_{ik} u^0_{k,k} + (1-\delta_{ij}) G_{ij} (u^0_{i,j} + u^0_{j,i}), \qquad (8)$$

где A_{ij}, G_{ij} -коэффициенты упругости и модули сдвига изотропного тела; **[ ]**- скачек функции f(x).

В области занятой пластиной вводится неравномерная сетка $\varpi = \omega + \gamma$, состоящая из множества ω внутренних и множества γ граничных узлов. Граница γ, в свою очередь, состоит из участков $\gamma_{\tau_i}\gamma_{y_i}$, на которых по m-ой составляющей заданы, соответственно, разностные аналоги граничных условий в напряжениях и перемещениях. Сетка ϖ разбивает расчетную область на M прямоугольных ячеек, (рис.2) и содержит N узлов, нумерация которых осуществляется слева направо и снизу-вверх. Для m-ой ячейки определены номера узлов $n^m, (n^m = \overline{1,N})$. В каждом узле строится дискретная аппроксимация дифференциальных уравнений задач (1)-(3),(5-8) Дифференциальным задачам (1)-(3),(5-8) на сетке $\bar{\omega}$ ставится в соответствие разностные задачи:

$$\mathbf{A}y = \mu \mathbf{B}y \text{ или } A_m y = \mu B_m y, \; x \in \varpi \qquad (9)$$

$$\mathbf{A}y = \mathbf{\Phi} \text{ или } A_m y = \Phi_m, \qquad (10)$$

Составляющие A_m, B_m разностных операторов **A** и **B** и оставляющие Φ_m вектора правой части **Φ** определяются из соотношений:

$$A_m y = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} a_i(\xi) y & x \in \varpi \setminus \gamma_{y_i} \\ \sum y_i & x \in \gamma_{y_i} \end{cases} \qquad B_m y = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} b_i(\xi) y & x \in \varpi \setminus \gamma_{y_i} \\ \sum y_i & x \in \gamma_{y_i} \end{cases},$$

$$\Phi_m = \begin{cases} \sum\limits_{\xi \in x} \varphi_i(\xi) & x \in \varpi \setminus \gamma_{y_i} \\ 0 & x \in \gamma_{y_i} \end{cases}$$

где $a_m(\xi), b_m(\xi)$ – базовые операторы, $\varphi_m(\xi)$ – базовая функция, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ – мультииндекс, идентифицирующий узлы произвольной ячейки сетки. Построение базовых операторов и базовой функции осуществляется в соответствии с методикой, изложенной в работе [6]. Знак $\sum\limits_{\xi \in x}$ означает суммирование по всем ячеечным узлам ξ, принадлежащим сеточному узлу x, причем, если узел принадлежит границе сеточной области ($x \in \gamma$), то по m- компоненте в этом узле должно быть задано естественное граничное условие. Разностным операторам **A** , **B**, действующим в пространстве размерности 2N соответствует матрицы **A**=$\left\{A_{ij}\right\}$,**B**=$\left\{B_{ij}\right\}$ размерности 2N×2N. В силу этого задачам (9),(10) на сетке ϖ поставим в соответствие алгебраические задачи:

$$\mathbf{A}\mathrm{y} = \mu\, \mathbf{B}\mathrm{y}, \quad (11)$$

$$\mathbf{A}\mathrm{y} = \mathbf{\Phi}, \quad (12)$$

где **A**=$\left\{A_{ij}\right\}$,**B**=$\left\{B_{ij}\right\}$ представляют собою блочные матрицы порядка 2N, блоки которых получаются как суммы блоков a_{ij}, b_{ij} базовых матриц a и b по всем ячейкам сетки ϖ, а составляющая Φ_m вектора **Ф** представляет сумму составляющих φ_m базового вектора φ. Разностные задачи (9,10) самосопряженные и положительно-определенные (**A**=**A***>0), (**B**=**B***>0).Для решения задач (11) и (12) применялись эффективные численные методы (прямые и итерационные) в соответствии с методикой работы [6]. В рассматриваемом случае алгебраическая задача (12) решалась прямым методом- методом Холецкого [2], а после сгущения разностной сетки применялся итерационный метод сопряженных градиентов [2]. При этом, решение полученное методом Холецкого интерполировалось и принималось в качестве начального приближения для решения задачи (11) итерационным методом.

Результаты работы. В качестве примера рассмотрена устойчивость двухкомпонентной пластины с излтропными слоями, имеющими следующие механические постоянные: связующее: $E = 520\,ГПа; G = 200\,ГПа, \nu = 0,3$, наполнитель: $E = 52\,ГПа; G = 20\,ГПа, \nu = 0,3.$ Размеры пластины нормированы к ее ширине ($l_1 = 1; l_1^1 = 0.2; l_1^2 = 0.8;$) и изменяются в таких пределах $0.1 \le l_2 \le 0.3$; $0.1 \le l_3 \le 1.2 = l$. Величина $l = 1.2$ получена из вычислительного эксперимента. При $l_2 = 0.1$ критическая нагрузка полученная для $l_3 = 0.1$ $(P_н^{kp})$ сравнивалась с критическими загрузками P_m^{kp}, полученными для значений $l_3 = 0.2; 0.3 \ldots 0.8$ и вычислялась относительная погрешность

$$\delta = \frac{P_н^{kp} - P_m^{kp}}{P_н^{kp}} .100\%$$

Выводы.В результате расчетов установлено, что при указанных геометрических параметрах $\delta_{\max} = 7\%$ и с увеличением $l_3 (l_3 \ge l_2)$ значение δ уменьшается, причем при $l_3 \ge 0.8$, $\delta \le 1\%$. При $l_2 = 0.2; 0.3$ соотвественно $\delta_{\max} = 8\%$; $\delta_{\max} = 8.5\%$, а $\delta \le 1\%$

соответственно при $l_3 \geq 0.9$. Таким образом, для конкретных значений параметра тонкостенности $\alpha = \pi l_3 / 2l_1$ исследована зависимость критической нагрузки от длины пластины и вычислено значение δ. Установлено, что начиная с некоторого значения l_3, полученного в результате вычислительного эксперимента для каждого значения α при дальнейшем увеличении параметра l_3 величина δ при данных механических характеристиках изменяется не более чем на 1%. Результаты, полученные в данной работе качественно согласуются с результатами работы [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К: Вища шк., 1986. – 512 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П. Численные методы. – М.: Наука. 1987. – 598 с.
3. Зеленский В.С., Декрет В. А., Быстров В. М. Устойчивость слоистого композитного материала при одноосном нагружении.-Збірник наукових праць Дніпродзержинського держ. техніч.університету. -Випуск 2(19)- 2012.- С. 49–53.
4. Коханенко Ю. В., Зеленский В. С. Влияние длины прямоугольной пластины на величину критической нагрузки при одноосном сжатии (трехмерная теория устойчивости). // Доп. НАН України. – 2003. – №4. – С. 48–51.
5. Коханенко Ю. В., Зеленский В. С. Влияние геометрических параметров на критическую нагрузку в задачах трехмерной устойчивости прямоугольных пластин и стержней. // Прикл. механика. – 2003.– № 6. – С. 74–78.
6. Статика материалов /Под ред. А. Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1993. – 453 с. (Механика композитов: в 12 т. Т.3)

Поступила в редколлегию 29.01.2013

УДК 539.3

ПАНАСЮК О.М., к.фіз.-мат.н., н. с.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПОШИРЕННЯ КВАЗІПОПЕРЕЧНИХ ХВИЛЬ У НЕСТИСЛИВОМУ КОМПОЗИТНОМУ МАТЕРІАЛІ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Вступ. У роботі [2] було досліджено поширення хвиль вздовж нестисливих шарів композитного матеріалу з початковими напруженнями. В цій статті отримано, зокрема, дисперсійне рівняння для квазіпоперечних хвиль. Дослідження проведено у рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності, яка викладена в [1], де також наведено результати дослідження [2]. Тому нижче будемо дотримуватися позначень та термінів використаних в [1].

Оскільки, в статті [2] аналіз дисперсійного рівняння для квазіпоперечних хвиль проводився асимптотично, тобто фазові швидкості хвиль знайдено лише при довгохвильовому наближенні, то в даній роботі проведено числове дослідження цього характеристичного рівняння. Нижче наведемо основні співвідношення [1, 2], які необхідні для одержання дисперсійного рівняння.

Постановка задачі. Основні рівняння. Розглядається шаруватий композитний матеріал, що складається з двох компонентів, шари яких чергуються. Матеріали шарів вважаються нестисливими ізотропними з довільною формою пружного потенціалу. Всі величини, що відносяться до кожного з компонентів позначаються вгорі індексом в