соответственно при $l_3 \geq 0.9$. Таким образом, для конкретных значений параметра тонкостенности $\alpha = \pi l_3 / 2l_1$ исследована зависимость критической нагрузки от длины пластины и вычислено значение δ. Установлено, что начиная с некоторого значения l_3, полученного в результате вычислительного эксперимента для каждого значения α при дальнейшем увеличении параметра l_3 величина δ при данных механических характеристиках изменяется не более чем на 1%. Результаты, полученные в данной работе качественно согласуются с результатами работы [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К: Вища шк., 1986. – 512 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П. Численные методы. – М.: Наука. 1987. – 598 с.
3. Зеленский В.С., Декрет В. А., Быстров В. М. Устойчивость слоистого композитного материала при одноосном нагружении.-Збірник наукових праць Дніпродзержинського держ. техніч.університету. -Випуск 2(19)- 2012.- С. 49–53.
4. Коханенко Ю. В., Зеленский В. С. Влияние длины прямоугольной пластины на величину критической нагрузки при одноосном сжатии (трехмерная теория устойчивости). // Доп. НАН України. – 2003. – №4. – С. 48–51.
5. Коханенко Ю. В., Зеленский В. С. Влияние геометрических параметров на критическую нагрузку в задачах трехмерной устойчивости прямоугольных пластин и стержней. // Прикл. механика. – 2003.– № 6. – С. 74–78.
6. Статика материалов /Под ред. А. Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1993. – 453 с. (Механика композитов: в 12 т. Т.3)

Поступила в редколлегию 29.01.2013

УДК 539.3

ПАНАСЮК О.М., к.фіз.-мат.н., н. с.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПОШИРЕННЯ КВАЗІПОПЕРЕЧНИХ ХВИЛЬ У НЕСТИСЛИВОМУ КОМПОЗИТНОМУ МАТЕРІАЛІ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Вступ. У роботі [2] було досліджено поширення хвиль вздовж нестисливих шарів композитного матеріалу з початковими напруженнями. В цій статті отримано, зокрема, дисперсійне рівняння для квазіпоперечних хвиль. Дослідження проведено у рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності, яка викладена в [1], де також наведено результати дослідження [2]. Тому нижче будемо дотримуватися позначень та термінів використаних в [1].

Оскільки, в статті [2] аналіз дисперсійного рівняння для квазіпоперечних хвиль проводився асимптотично, тобто фазові швидкості хвиль знайдено лише при довгохвильовому наближенні, то в даній роботі проведено числове дослідження цього характеристичного рівняння. Нижче наведемо основні співвідношення [1, 2], які необхідні для одержання дисперсійного рівняння.

Постановка задачі. Основні рівняння. Розглядається шаруватий композитний матеріал, що складається з двох компонентів, шари яких чергуються. Матеріали шарів вважаються нестисливими ізотропними з довільною формою пружного потенціалу. Всі величини, що відносяться до кожного з компонентів позначаються вгорі індексом в дужках. В природному стані з кожним шаром пов'язано лагранжеву систему координат (x_1, x_2, x_3), яка співпадає з декартовою. Оскільки видовження в кожному з шарів можуть бути різними, то й координатні системи будуть різними. Тому в початковому стані введено загальну для обох шарів декартову систему координат (y_1, y_2, y_3). Прийнято, що вісь oy_3 перпендикулярна до шарів, а площина $y_3 = 0$ співпадає з площиною розділу шарів.

Вважається, що початковий напружено-деформівний стан в кожному з шарів є однорідним, переміщення в якому визначаються з виразів

$$u_m^{0(j)} = (\lambda_m^{(j)} - 1)x_m^{(j)}; \quad y_m = \lambda_m^{(j)} x_m^{(j)} \quad (j = 1, 2; m = 1, 2, 3), \tag{1}$$

де $\lambda_m^{(j)}$ – коефіцієнт видовження вздовж координатної вісі. Початковим переміщенням (1) відповідають початкові напруження у вигляді

$$S_{im}^{0(j)} = \delta_{im} S_{mm}^{0(j)}; \quad S_{mm}^{0(j)} = const \quad (j = 1, 2; \quad i, m = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Товщини шарів в природному стані $h^{(j)}$ та початковому стані $h'^{(j)}$ пов'язані співвідношенням $h'^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}$. Густини компонентів позначено $\rho^{(j)}$.

Основні рівняння в системі координат (y_1, y_2, y_3) мають вигляд [1]:

- рівняння руху для j - го шару

$$N_{m\alpha}'^{(j)} u_\alpha^{(j)} = 0; \quad N_{m\alpha}'^{(j)} = \left(\kappa_{im\alpha\beta}'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta} - \rho^{(j)} \delta_{m\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) (1 - \delta_{m4})(1 - \delta_{\alpha 4}) +$$
$$+ \delta_{\alpha 4}(1 - \delta_{m4}) \frac{\partial}{\partial y_m} + \delta_{m4}(1 - \delta_{\alpha 4}) \frac{\partial}{\partial y_\alpha}; \tag{3}$$
$$\kappa_{im\alpha\beta}'^{(j)} = \lambda_i^{(j)} \lambda_\beta^{(j)} \kappa_{im\alpha\beta}^{(j)}; \quad u_4^{(j)} \equiv p'^{(j)} \quad (m, \alpha = 1,2,3,4; \; i, \beta = 1,2,3),$$

пружні сталі $\kappa_{im\alpha\beta}^{(j)}$ визначаються відповідно до роботи [1];

- вирази для визначення складових тензора напружень на поверхнях кожного з шарів

$$Q_{3m}'^{(j)} = \kappa_{3m\alpha\beta}'^{(j)} \frac{\partial u_\alpha^{(j)}}{\partial y_\beta} + \delta_{3m} p'^{(j)}.$$

Розв'язок задачі. Розглядаються хвилі поляризовані в площині $y_1 o y_3$ $(u_2^{(j)} \equiv 0)$, хвильовий вектор яких має вид $\vec{k}(k, 0, 0)$. Розв'язок системи (3) прийнято у вигляді [1]

$$u_\alpha^{(j)} = u_\alpha^{(j)(0)} e^{i(ky_1 - \omega\tau)}; \quad u_3^{(j)(0)} = A^{(j)} e^{i\alpha^{(j)} y_3}; \tag{4}$$

$$u_1^{(j)(0)} = \gamma^{(j)} u_3^{(j)(0)}; \quad u_4^{(j)(0)} \equiv p'^{(j)(0)} = i\theta^{(j)} u_3^{(j)(0)},$$

де $A^{(j)}, \alpha^{(j)}, \gamma^{(j)}, \theta^{(j)}$ – сталі. Індексом (0) позначено амплітудні величини, які залежать лише від y_3.

Шляхом підстановки (4) в (3) отримано

$$\begin{gathered} \gamma^{(j)}(\kappa'^{(j)}_{1111}k^2 + \kappa'^{(j)}_{3113}\alpha^{(j)2} - \rho^{(j)}\omega^2) + k\alpha^{(j)}(\kappa'^{(j)}_{1313} + \kappa'^{(j)}_{1133}) + k\theta^{(j)} = 0; \\ \gamma^{(j)}(\kappa'^{(j)}_{1313} + \kappa'^{(j)}_{1133})k\alpha^{(j)} + \kappa'^{(j)}_{1331}k^2 + \kappa'^{(j)}_{3333}\alpha^{(j)2} - \rho^{(j)}\omega^2 + \theta^{(j)}\alpha^{(j)} = 0; \\ k\gamma^{(j)} + \alpha^{(j)} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

З (5) одержано чотири розв'язки для $\alpha^{(j)}$: $\alpha_2^{(j)} = -\alpha_1^{(j)}$, $\alpha_4^{(j)} = -\alpha_3^{(j)}$, а також $\gamma_2^{(j)} = -\gamma_1^{(j)}$, $\gamma_4^{(j)} = -\gamma_3^{(j)}$. Після цього вирази (4) переписано у вигляді

$$\begin{aligned} u_3^{(j)(0)} &= A_1^{(j)} e^{i\alpha_1^{(j)} y_3} + A_2^{(j)} e^{-i\alpha_1^{(j)} y_3} + A_3^{(j)} e^{i\alpha_3^{(j)} y_3} + A_4^{(j)} e^{-i\alpha_3^{(j)} y_3}; \\ u_1^{(j)(0)} &= \gamma_1^{(j)}\left(A_1^{(j)} e^{i\alpha_1^{(j)} y_3} - A_2^{(j)} e^{-i\alpha_1^{(j)} y_3} \right) + \gamma_3^{(j)}\left(A_3^{(j)} e^{i\alpha_3^{(j)} y_3} - A_4^{(j)} e^{-i\alpha_3^{(j)} y_3} \right); \\ u_4^{(j)(0)} &= i\theta_1^{(j)}\left(A_1^{(j)} e^{i\alpha_1^{(j)} y_3} - A_2^{(j)} e^{-i\alpha_1^{(j)} y_3} \right) + i\theta_3^{(j)}\left(A_3^{(j)} e^{i\alpha_3^{(j)} y_3} - A_4^{(j)} e^{-i\alpha_3^{(j)} y_3} \right). \end{aligned} \tag{6}$$

Далі розглядаються два сусідні шари, які займають по вісі $0y_3$ області $0 \le y_3 \le h'^{(1)}$ та $-h'^{(2)} \le y_3 \le 0$. При $y_3 = 0$ виконуються умови неперервності

$$u_m^{(1)(0)}(0) = u_m^{(2)(0)}(0); \quad Q'^{(1)(0)}_{3m}(0) = Q'^{(2)(0)}_{3m}(0) \quad (m = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Внаслідок періодичності структури матеріалу також виконуються умови періодичності

$$u_m^{(1)(0)}(h'^{(1)}) = u_m^{(2)(0)}(-h'^{(2)}); \quad Q'^{(1)(0)}_{3m}(h'^{(1)}) = Q'^{(2)(0)}_{3m}(-h'^{(2)}) \quad (m = 1, 2, 3). \tag{8}$$

З формул (7) та (8) отримано однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь восьмого порядку. З умови існування нетривіального розв'язку цієї системи виводиться дисперсійне рівняння.

Частинний випадок. *Квазіпоперечна хвиля.* Для такої хвилі переміщення $(u_3^{(j)})$ симетричні, а $(u_1^{(j)})$ антисиметричні відносно середини відповідних шарів. У зв'язку з цим переміщення (6) записано відносно середини кожного з шарів [1]

$$u_1^{(1)(0)} = \gamma_1^{(1)}\left(B_1^{(1)} e^{i\alpha_1^{(1)}(y_3 - \frac{h'^{(1)}}{2})} - B_2^{(1)} e^{-i\alpha_1^{(1)}(y_3 - \frac{h'^{(1)}}{2})} \right) +$$

$$+ \gamma_3^{(1)}\left(B_3^{(1)} e^{i\alpha_3^{(1)}(y_3 - \frac{h'^{(1)}}{2})} - B_4^{(1)} e^{-i\alpha_3^{(1)}(y_3 - \frac{h'^{(1)}}{2})} \right); \qquad (9)$$

$$u_1^{(2)(0)} = \gamma_1^{(2)}\left(B_1^{(2)} e^{i\alpha_1^{(2)}(y_3 + \frac{h'^{(2)}}{2})} - B_2^{(2)} e^{-i\alpha_1^{(2)}(y_3 + \frac{h'^{(2)}}{2})} \right) +$$

$$+ \gamma_3^{(2)}\left(B_3^{(2)} e^{i\alpha_3^{(2)}(y_3 + \frac{h'^{(2)}}{2})} - B_4^{(2)} e^{-i\alpha_3^{(2)}(y_3 + \frac{h'^{(2)}}{2})} \right),$$

і т. д. для $u_3^{(1)(0)}$, $u_3^{(2)(0)}$, $u_4^{(1)(0)}$ $u_4^{(2)(0)}$ та прийнято $B_1^{(j)} = B_2^{(j)}; B_3^{(j)} = B_4^{(j)}$. В цьому випадку умови контакту та періодичності співпадають, і з формул (7) та (8) одержано систему чотирьох алгебраїчних рівнянь. Прирівнявши визначник цієї системи до нуля отримано дисперсійне рівняння [1].

Числові результати. Дисперсійне рівняння для квазіпоперечних хвиль одержано для довільної форми пружного потенціалу. Для встановлення впливу початкових напружень на закономірності поширення хвиль числове дослідження дисперсійного співвідношення виконаємо в рамках пружного потенціалу типу Трелоара [1]

$$w^{(j)} = c_{10}^{(j)} A_1^{(j)},$$

де $c_{10}^{(j)}$ – пружна стала; $A_1^{(j)}$ – перший алгебраїчний інваріанти тензора деформацій Гріна.

Розрахунки проведемо при наступному початковому стані

$$S_{11}^{0(1)} \neq 0; \quad S_{11}^{0(2)} \neq 0; \quad S_{22}^{0(1)} = S_{33}^{0(1)} = S_{22}^{0(2)} = S_{33}^{0(2)} = 0,$$

та таких відношеннях характеристик шарів

$$\frac{c_{10}^{(1)}}{c_{10}^{(2)}} = 5; \quad \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} = 0{,}7; \quad m = 1 \text{ та } m = 4,$$

де $m = h^{(2)} / h^{(1)}$ – параметр шаруватості.

Результати розрахунків представлені на рисунках 1–6 для перших п’яти мод. Так на рис. 1 зображено криві, які характеризують залежність величини $C^0 / C_S^{0(2)}$ від параметра $\overline{h} = k_S^{(2)} h^{(2)}$, де $k_S^{(2)}$ та $C_S^{0(2)}$ – це відповідно хвильове число та швидкість поперечних хвиль, що поширюються в ізотропному матеріалі другого шару без початкових напружень; C^0 – фазова швидкість квазіпоперечних хвиль, що поширюються у напрямку вісі oy_1 вздовж шарів нестисливого композитного матеріалу без початкових напружень, який складається із шарів з товщинами $h^{(1)}$ і $h^{(2)}$.

Цифрами 0–4 позначено номери мод. Штриховій лінії відповідає довгохвильове наближення [1].

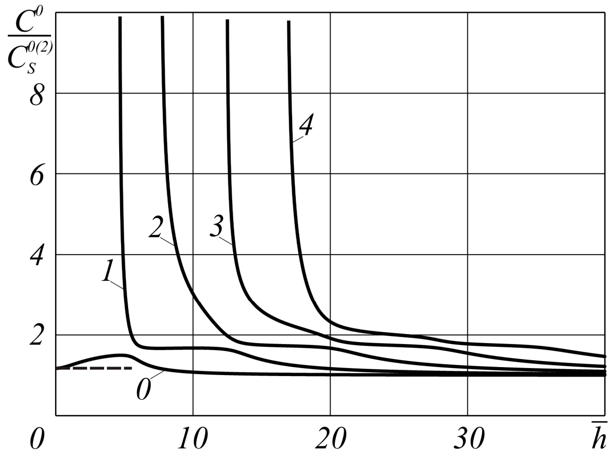

Рисунок 1

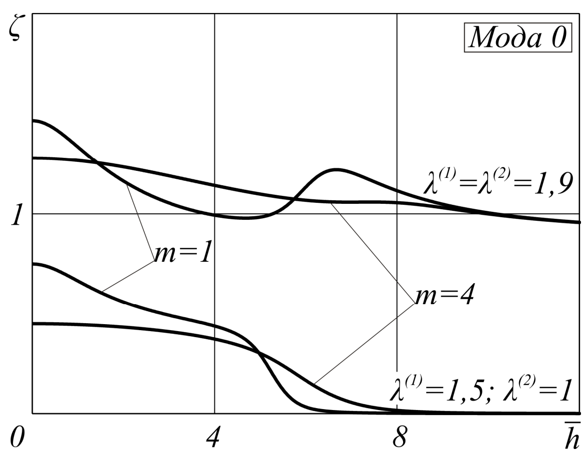

Рисунок 2

На рис. 2–6 відносна зміна фазової швидкості $\zeta = (C^0 - C){C^0}^{-1}$, викликана початковими напруженнями, зображена як функція параметра $\bar{h}$, де C – фазова швидкість хвиль в композитному матеріалі з початковими напруженнями. Розрахунки проводилися як у випадку сумісного деформування шарів $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 1{,}9$, так і у випадку деформування лише першого шару $\lambda^{(1)} = 1{,}5;\ \lambda^{(2)} = 1$. Тут $\lambda^{(1)}$ та $\lambda^{(2)}$ це коефіцієнти видовження у напрямку вісі oy_1 у першому та другому шарі відповідно.

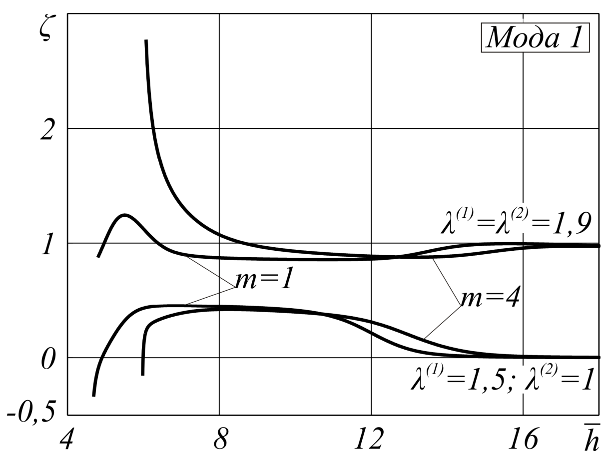

Рисунок 3

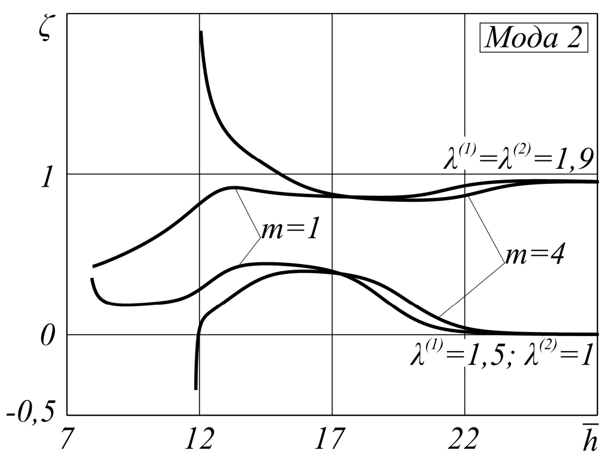

Рисунок 4

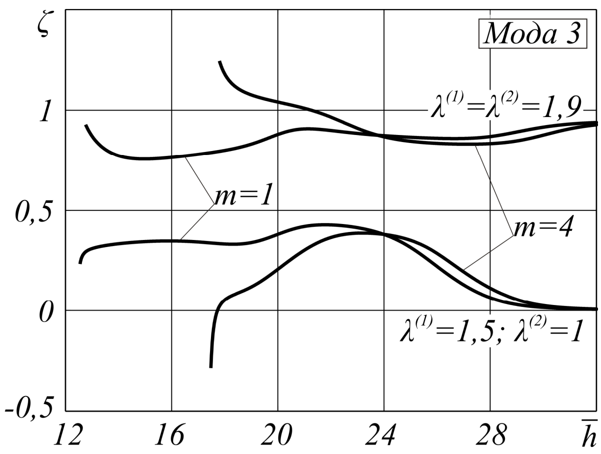

Рисунок 5

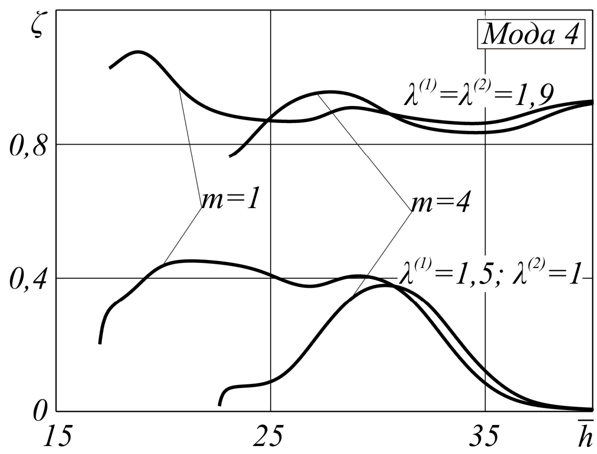

Рисунок 6

Висновки. Проаналізувавши наведені результати можна зробити такі висновки: початкові напруження значно впливають на фазові швидкості хвиль, які зароджуються; кожна мода має діапазон частот, в якому відносна зміна фазової швидкості, викликана початковими напруженнями, істотно залежить від частоти, та існують діапазони, де зміна швидкості мало залежить від частоти; при зміні відношення товщин шарів, змінюються як критичні частоти, так і характер залежності фазової швидкості від початкових напружень та від частоти; при суттєвій зміні коефіцієнтів видовження у випадку сумісного деформування шарів, відбувається значна зміна швидкостей поширення хвиль не лише в околі критичних частот, але й у всьому частотному діапазоні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
2. Ле Минь Кхань. Распространение волн вдоль слоев в слоистых несжимаемых материалах с начальными деформациями // Прикл. механика. – 1976. – 12, № 12. – С. 69-72.

Поступила в редколлегию 29.01.2013

УДК 534.075

НАЗАРЕНКО В.М., д.т.н., професор
ДОВЖИК М.В., провідний інженер

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

РУЙНУВАННЯ ПІВПРОСТОРУ ПІД ЧАС СТИСКУ ВЗДОВЖ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ДИСКОПОДІБНОЇ ТРІЩИНИ, КОЛИ ВІДСТАНЬ МІЖ ТРІЩИНОЮ ТА ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ МАЛА

Вступ. Останнім часом інтенсивно розвивається дослідження руйнування матеріалів при стиску вздовж тріщин. У випадку навантаження матеріалу вздовж площини розташування тріщини використовуються два підходи. Перший базується на використанні наближених розрахункових схем і наближених теорій, в рамках цього підходу найбільше застосування отримало так зване «балочне наближення» [1]. Другий