

Рисунок 5

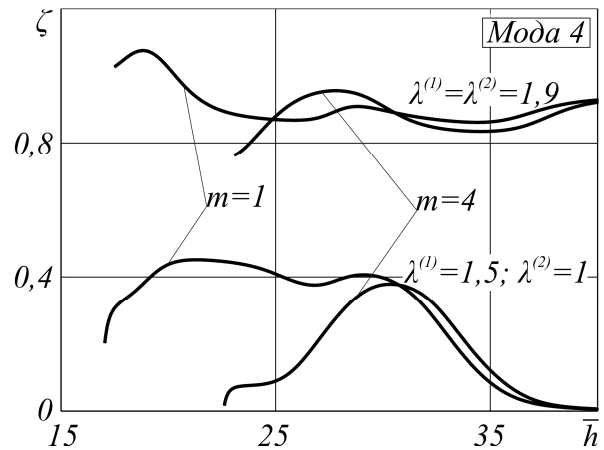


Рисунок 6

Висновки. Проаналізувавши наведені результати можна зробити такі висновки: початкові напруження значно впливають на фазові швидкості хвиль, які зароджуються; кожна мода має діапазон частот, в якому відносна зміна фазової швидкості, викликана початковими напруженнями, істотно залежить від частоти, та існують діапазони, де зміна швидкості мало залежить від частоти; при зміні відношення товщин шарів, змінюються як критичні частоти, так і характер залежності фазової швидкості від початкових напружень та від частоти; при суттєвій зміні коефіцієнтів видовження у випадку сумісного деформування шарів, відбувається значна зміна швидкостей поширення хвиль не лише в околі критичних частот, але й у всьому частотному діапазоні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
2. Ле Минь Кхань. Распространение волн вдоль слоев в слоистых несжимаемых материалах с начальными деформациями // Прикл. механика. – 1976. – 12, № 12. – С. 69-72.

Поступила в редколлегию 29.01.2013

УДК 534.075

НАЗАРЕНКО В.М., д.т.н., професор
ДОВЖИК М.В., провідний інженер

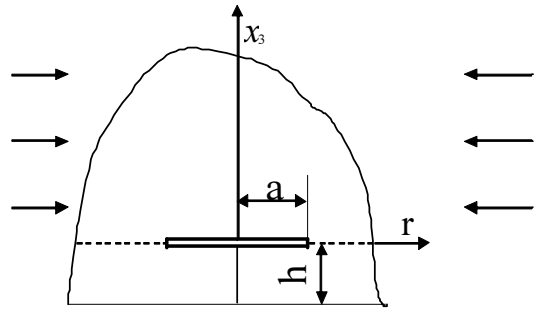
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

РУЙНУВАННЯ ПІВПРОСТОРУ ПІД ЧАС СТИСКУ ВЗДОВЖ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ДИСКОПОДІБНОЇ ТРІЩИНИ, КОЛИ ВІДСТАНЬ МІЖ ТРІЩИНОЮ ТА ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ МАЛА

Вступ. Останнім часом інтенсивно розвивається дослідження руйнування матеріалів при стиску вздовж тріщин. У випадку навантаження матеріалу вздовж площини розташування тріщини використовуються два підходи. Перший базується на використанні наближених розрахункових схем і наближених теорій, в рамках цього підходу найбільше застосування отримало так зване «балочне наближення» [1]. Другий

запропонований в роботах О.М. Гузя [2]. В якості критерію руйнування в цьому випадку використовується критерій локальної втрати стійкості матеріалу в околі тріщини, в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності. У відповідності з цим підходом, процес руйнування ініціюється моментом локальної втрати стійкості матеріалу поблизу тріщини, а критичні параметри стиску визначаються з розв'язання відповідних задач на власні значення, в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл.

В роботах [2, 3] для різних схем розташування взаємодіючих тріщин визначені критичні укорочення і напруження стиску в залежності від відстаней між тріщинами або тріщиною та вільною поверхнею. Наприклад, для приповерхневої дископодібної тріщини рис.1 $\beta = ha^{-1}$, (h - відстань між вільною поверхнею і площиною тріщини, a - радіус тріщини), в роботі [3] для різних типів потенціалів отримані залежності між β і критичними укороченнями, (напруженнями).



Рисунк 1

При цьому також важливо знати поведінку критичних параметрів для асимптотичних випадків $\beta \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow 0$. У випадку $\beta \rightarrow \infty$, подібна асимптотика отримана в ряді работ, наприклад [3]. В цьому випадку критичні значення напружень стиску прямують до значень, що відповідають ізольованій тріщині.

Для $\beta \rightarrow 0$ в роботах [4, 5] була запропонована аналітично чисельна методика розв'язання таких задач в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності. Використання наближених розрахункових схем в цьому випадку не дозволяє дослідити це питання, так як для виділеної тріщинами тонкої пластини умови закріплення обираються від вільного опирання до жорсткого закріплення, що дає відмінності в 3.5 рази для круглї пластини під час рівномірного двохвісного стиску.

Постановка задачі. Робота присвячується дослідженню в осесиметричній постановці $S_{33}^0 = 0$, $S_{11}^0 = S_{22}^0 \neq 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_j = const$, задач про руйнування пружного півпростору $x_3 \geq -h$ з приповерхневою дископодібною тріщиною радіуса a у площині $x_3 = 0$, паралельній вільній площині, під час стиску вздовж площини тріщини рис. 1.

За загальною методикою, запропонованою та розвинутою в роботі [3], виконано строгу математичну постановку відповідних граничних задач за допомогою представлення загальних розв'язків через гармонічні потенціальні функції, які за допомогою інтегральних перетворень Ганкеля нульового порядку як у випадку рівних коренів характеристичного рівняння, так і у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння зведено до розв'язуючих систем інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з додатковою умовою

$$\begin{aligned} f(\xi) + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 M_1(\xi, \eta) f(\eta) d\eta - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 N_1(\xi, \eta) g(\eta) d\eta &= 0; \\ g(\xi) + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 M_2(\xi, \eta) g(\eta) d\eta - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 N_2(\xi, \eta) f(\eta) d\eta + \tilde{C}_1 &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\int_0^1 g(\xi) d\xi = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1),$$

де \tilde{C}_1 – невідома стала, пов'язана з допоміжною умовою.

Ядра інтегральних рівнянь мають вигляд

$$\begin{aligned} M_1(\xi, \eta) &= R_1(\eta + \xi) - R_1(1 + \xi) + R_1(\eta - \xi) - R_1(1 - \xi); \\ N_1(\xi, \eta) &= S_1(\eta + \xi) + S_1(\eta - \xi); \quad M_2(\xi, \eta) = S_2(\eta + \xi) + S_2(\eta - \xi); \\ N_2(\xi, \eta) &= R_2(\eta + \xi) - R_2(1 + \xi) + R_2(\eta - \xi) - R_2(1 - \xi). \end{aligned} \quad (2)$$

Функції, що входять в ядра, обраховуються наступним чином:

- для нерівних коренів характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} R_1(\zeta) &= 2 \left\{ 2 \frac{k_2}{k} I_0(\beta_1 + \beta_2, \zeta) - \frac{1}{2} \frac{(k_1 + k_2)}{k} \left[\frac{k_2}{k_1} I_0(2\beta_2, \zeta) + I_0(2\beta_1, \zeta) \right] \right\}; \\ S_1(\zeta) &= \frac{(k_1 + k_2)}{k} \left\{ I_1(\beta_1 + \beta_2, \zeta) - \frac{1}{2} [I_1(2\beta_1, \zeta) + I_1(2\beta_2, \zeta)] \right\}; \\ S_2(\zeta) &= 2 \left\{ 2 \frac{k_1}{k_2} I_0(\beta_1 + \beta_2, \zeta) - \frac{1}{2} \frac{(k_1 + k_2)}{k} \left[\frac{k_1}{k_2} I_0(2\beta_2, \zeta) + I_0(2\beta_1, \zeta) \right] \right\}; \\ R_2(\zeta) &= \frac{(k_1 + k_2)}{k} \left\{ I_{-1}(\beta_1 + \beta_2, \zeta) - \frac{1}{2} [I_{-1}(2\beta_1, \zeta) + I_{-1}(2\beta_2, \zeta)] \right\}; \\ I_0(\rho, \zeta) &= \rho(\zeta^2 + \rho^2)^{-1}; \quad I_{-1}(\rho, \zeta) = -\frac{1}{2\beta} \ln(\zeta^2 + \rho^2); \end{aligned} \quad (3)$$

$$I_1(\rho, \zeta) = \beta(\rho^2 - \zeta^2)(\zeta^2 + \rho^2)^{-2}; \quad \beta = ha^{-1}; \quad \beta_i = \beta(n_i^0)^{-1/2}, \quad i = 1, 2;$$

- для рівних коренів характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} R_1(\zeta) &= -2 \left[\frac{k}{2} L_0(\zeta) + \frac{1}{k} L_2(\zeta) + L_1(\zeta) \right]; \quad R_2(\zeta) = -\frac{1}{k} L_1(\zeta); \\ S_1(\zeta) &= -\frac{1}{k} L_3(\zeta); \quad S_2(\zeta) = -2 \left[\frac{k}{2} L_0(\zeta) + \frac{1}{k} L_2(\zeta) - L_1(\zeta) \right]; \quad L_0(\zeta) = \frac{\beta_1}{\beta_1^2 + \zeta^2}; \\ L_1(\zeta) &= \frac{\beta_1}{2} \frac{\beta_1^2 - \zeta^2}{(\beta_1^2 + \zeta^2)^2}; \quad L_2(\zeta) = \frac{\beta_1^3}{2} \frac{4\beta_1^2 - 3\zeta^2}{(\beta_1^2 + \zeta^2)^3}; \quad L_3(\zeta) = \frac{\beta_1}{2} \frac{\zeta^4 - 6\beta_1^2 \zeta^2 + \beta_1^4}{(\beta_1^2 + \zeta^2)^4}; \\ \beta_1 &= 2(n_1^0)^{-1/2} \beta, \quad \beta = ha^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Методи обчислення. Для подальших досліджень використовувався метод запропонований в роботах [4, 5]. Для пошуку критичних укорочень, видовжень і напружень з інтегральних рівняннях (1) розроблено процедуру, побудовану на методі Бубнова-Гальоркіна. В якості системи координатних функцій використовувались степеневі функції

$$f(x) = \sum_{i=0}^N F_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^N G_i x^i. \quad (5)$$

На відміну від попередніх робіт [2, 3], де після підстановки координатних функцій (5) у систему інтегральних рівнянь (1) при подальшому дослідженні відразу проводилось чисельне інтегрування системи, запропонована чисельно-аналітична методика, яка дозволяє, використовуючи сучасний пакет символічних розрахунків,

аналітично порахувати інтеграли від ядер інтегральних рівнянь для обраної системи координатних функцій. Це дозволило при подальших розрахунках отримати більшу точність за рахунок виключення похибок чисельного інтегрування, та того, що чисельні обрахунки проводились на самому останньому етапі дослідження.

Для збільшення швидкості розрахунків інтегралів було використано алгоритм, який використовує рекурентні співвідношення. Для подальших розрахунків використано наступні функції:

$$\begin{aligned} L(n) &= \int_0^1 \frac{x^n}{(a^2 + (x+y)^2)^2} dx; & V(n) &= \int_0^1 \frac{x^n}{(a^2 + (x-y)^2)^2} dx; \\ LL(n) &= \int_0^1 \frac{x^n}{(a^2 + (x+y)^2)^4} dx; & VV(n) &= \int_0^1 \frac{x^n}{(a^2 + (x-y)^2)^4} dx, \end{aligned} \quad (6)$$

для обрахунку яких отримано наступні рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} L(n) &= \frac{1}{n-3} \left(\frac{1}{a^2 + (1+y)^2} - 2y(n-2)L(n-1) - (a^2 + y^2)(n-1)L(n-2) \right); & (n \neq 3) \\ V(n) &= \frac{1}{n-3} \left(\frac{1}{a^2 + (1-y)^2} + 2y(n-2)V(n-1) - (a^2 + y^2)(n-1)V(n-2) \right); & (n \neq 3) \\ LL(n) &= \frac{1}{n-7} \left(\frac{1}{(a^2 + (x+y)^2)^3} - 2y(n-4)LL(n-1) - (a^2 + y^2)(n-1)LL(n-2) \right); & (n \neq 7) \\ VV(n) &= \frac{1}{n-7} \left(\frac{1}{(a^2 + (1-y)^2)^3} + 2y(n-4)VV(n-1) - (a^2 + y^2)(n-1)VV(n-2) \right). & (n \neq 7) \end{aligned}$$

Використання рекурентних співвідношень дозволило суттєво скоротити час, який витрачає математичний пакет на обрахунки інтегралів з функцій (3), (4), які входять в ядра (2) системи інтегральних рівнянь (1).

Після підстановки координатних функцій (2) в парні інтегральні рівняння (1) та використання функцій (6), для інтегрування ядер інтегральних рівнянь Фредгольма, систему інтегральних рівнянь (1) як у випадку рівних коренів, так і в випадку нерівних коренів, було зведено до системи з $2(N+1)+1$ рівнянь з такою самою кількістю невідомих величин $F_i, G_i, \tilde{C}_1, i \in [0, N]$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N F_i F_{1ji} + \sum_{i=0}^N G_i G_{1ji} = 0; & \quad \sum_{i=0}^N F_i F_{2ji} + \sum_{i=0}^N G_i G_{2ji} + \tilde{C}_1 = 0; \\ \sum_{i=0}^N \frac{1}{i+1} G_i = 0, & \quad 0 \leq j \leq N, \end{aligned} \quad (7)$$

де F_{kji}, G_{kji} – точні вирази, пораховані використовуючи символні розрахунки, які залежать від безрозмірної відстані між тріщиною і вільною поверхнею $\beta = ha^{-1}$ та величин $n_1^0, n_2^0, k_1, k_2, k$.

Результати роботи. На прикладі різних матеріалів наводяться результати чисельних досліджень системи (7), отримані для випадку *нерівних коренів* – матеріал з потенціалом Трелоара; випадку *рівних коренів* – матеріали з потенціалом Бартенєва-Хазановича. У всіх випадках під час розрахунків використовувалось 20 координатних функцій.

Таблиця 1

β	ε_{Tr}	A_{Tr}	ε_B	A_B
$9 \cdot 10^{-2}$	$5.961 \cdot 10^{-3}$	-8.831	$5.960 \cdot 10^{-3}$	-2.248
$8 \cdot 10^{-2}$	$4.761 \cdot 10^{-3}$	-8.928	$4.761 \cdot 10^{-3}$	-2.264
$7 \cdot 10^{-2}$	$3.685 \cdot 10^{-3}$	-9.025	$3.685 \cdot 10^{-3}$	-2.281
$6 \cdot 10^{-2}$	$2.737 \cdot 10^{-3}$	-9.125	$2.737 \cdot 10^{-3}$	-2.300
$5 \cdot 10^{-2}$	$1.922 \cdot 10^{-3}$	-9.228	$1.922 \cdot 10^{-3}$	-2.320
$4 \cdot 10^{-2}$	$1.244 \cdot 10^{-3}$	-9.333	$1.244 \cdot 10^{-3}$	-2.342
$3 \cdot 10^{-2}$	$7.081 \cdot 10^{-4}$	-9.442	$7.081 \cdot 10^{-4}$	-2.365
$2 \cdot 10^{-2}$	$3.184 \cdot 10^{-4}$	-9.553	$3.184 \cdot 10^{-4}$	-2.391
$1 \cdot 10^{-2}$	$8.057 \cdot 10^{-5}$	-9.669	$8.057 \cdot 10^{-5}$	-2.418
$1 \cdot 10^{-3}$	$8.146 \cdot 10^{-7}$	-9.775	$8.146 \cdot 10^{-7}$	-2.444
$1 \cdot 10^{-4}$	$8.151 \cdot 10^{-9}$	-9.781	$8.151 \cdot 10^{-9}$	-2.445
$1 \cdot 10^{-5}$	$8.148 \cdot 10^{-11}$	-9.777	$8.148 \cdot 10^{-11}$	-2.444
$1 \cdot 10^{-6}$	$8.146 \cdot 10^{-13}$	-9.775	$8.146 \cdot 10^{-13}$	-2.444
$1 \cdot 10^{-9}$	$8.146 \cdot 10^{-19}$	-9.775	$8.146 \cdot 10^{-15}$	-2.444

Так, в другій та четвертій колонках таблиці 1 наведені результати чисельного розрахунку залежностей критичних укорочень ($\varepsilon = 1 - \lambda_1$) від малих безрозмірних відстані між вільною площиною та площиною тріщини $\varepsilon(\beta)$ в матеріалі з потенціалом Трелоара та потенціалом Бартенєва-Хазановича.

При використанні наближених розрахункових схем критичні напруження для плоскої пластини підчас стиску мають наступний вигляд:

$$\sigma_{кр} = K \frac{E}{12(1-\nu^2)} \frac{b^2}{a^2}, \quad (8)$$

де a – товщина пластини, b – радіус пластини, K – коефіцієнт, який залежить від способу закріплення пластини.

Так, для тонкої пластини критичні напруження (8) можна знайти у вигляді $\sigma_{кр} = A_{кр} \beta^2 C_{10}$ для матеріалу з потенціалом Трелоара, де $A_{кр}$ – коефіцієнт, який залежить від способу закріплення пластини: для жорстко закріпленої пластини $A_{кр} = -9.787$, для вільно опертої пластини $A_{кр}^* = -2.8$. Для матеріалу з потенціалом Бартенєва-Хазановича відповідно $\sigma_{кр} = (2\mu) A_{кр} \beta^2$, для жорстко закріпленої пластини $A_{кр} = -2.447$, для вільно опертої пластини $A_{кр}^* = -0.700$.

Із припущення, що для малих β критичні напруження σ_{11}^0 поводять себе, як $\sigma_{11}^0 = A_{Tr} \beta^2 C_{10}$ - для матеріалу з потенціалом Трелоара або $\sigma_{кр} = (2\mu) A_B \beta^2$ - для матеріалу з потенціалом Бартенєва-Хазановича, в таблиці 1 визначені значення коефіцієнту A .

Наведені в таблиці 1 результати показують, що вже при $\beta < 0.01$ розбіжність отриманих результатів та результатів для наближених розрахункових схем у випадку жорсткого закріплення кругової пластини буде менше 1%.

Найменші значення безрозмірної відстані β , для якої були проведені розрахунки, дорівнює 10^{-9} , при цьому різниця в значеннях між отриманими значеннями коефіцієнта A і $A_{кр}$ не перевищила 0.2%.

Висновки. Для тіла з при поверхневою тріщиною отримані критичні параметри руйнування для малих значень відносних відстаней між тріщиною та вільною поверхнею аж до 10^{-9} . Показано, що при малих β різниця між критичними напруженнями для приповерхневої дископодібної тріщини і критичними напруженнями для жорстко закріпленої пластини, якою моделюють матеріал з тріщиною в наближених розрахункових схемах для всіх типів розглянутих потенціалів менше 1% для відстаней менших 0.01.

З аналізу отриманих результатів можна визначити критерії застосовності наближених розрахункових схем як з точки зору тонкостінності елемента, що відокремлюється: – наближені розрахункові схеми працюють для $\beta < 0.01$, так і з точки зору умов закріплення: – в наближених розрахункових схемах для приповерхневої дископодібної тріщини необхідно обирати жорстке закріплення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Obreimoff I.W. The splitting strength of mica / Obreimoff I.W. // Proc. Roy. Soc. of London. – 1930. – 127 A. – P. 290–297.
2. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями / Гузь А.Н. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
3. Гузь А.Н. Механика разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор). Высокоэластичные материалы / Гузь А.Н., Назаренко В.М. // Прикл. механика. – 1989 – 25, №9. – С 3–32.
4. Гузь А.Н. Разрушение материалов при сжатии вдоль приповерхностной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной / Гузь А.Н., Довжик М.В., Назаренко В.М. // Прикл. механика. – 2011. – 47, №6. – С. 28 – 37.
5. Довжик М.В. Разрушение полупространства при сжатии вдоль приповерхностной дискообразной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной / Довжик М.В. // Прикл. механика. – 2012. – 48, №3. – С. 79 – 88.

Поступила в редколлегию 08.02.2013

УДК 519.6

ТОНКОНОГ Е.А. ассистент
ХУДАЯ Ж.В. к.физ.-мат.н., доцент
СТЕБЛЯНКО П.А. д.физ.-мат.н., профессор

Днепродзержинский государственный технический университет

ПОСТРОЕНИЕ НА ОСНОВЕ СПЛАЙНОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

Введение. Рассматривается задача о движении тела с вязким трением. Сила вязкого трения пропорциональна скорости относительного движения тела. При увеличении скорости тела меняется сопротивление. Рассмотрим ситуацию, когда с увеличением скорости сопротивление уменьшается, а когда скорость достигает определенного значения ситуация меняется. Скорость начинает падать, а сила сопротивления начинает увеличиваться. Моделью описанного процесса является задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, характеризующими состояние динамического объекта. На первом этапе находится решение задачи, в которой слагаемое характеризующее