РОЗДІЛ «ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ»

УДК 519.237(.245) АВРАМЕНКО В.І., к. т. н., доцент

Дніпродзержинський державний технічний університет

МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН З ЗАДАНИМИ ПАРНИМИ І ЧАСТИННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ КОРЕЛЯЦІЇ

Вступ. При аналізі складних систем, зокрема в економіці, припущення про незалежність між різними складовими системи чи факторами не завжди є слушним. Крім того, при використанні методу Монте-Карло генератори випадкових чисел для обмежених вибірок довжиною *n* також не гарантують отримання незалежних послідовностей. Часто степінь зв'язку між факторами системи чи результатами моделювання оцінюється парними і/або частинними коефіцієнтами кореляції. Тому при статистичному моделюванні таких систем виникає задача отримання матриці вихідних даних з заданими наперед величинами коефіцієнтів кореляції між елементами стовпців матриці. В статті розглянуто метод моделювання систем випадкових величин з заданими кореляційними властивостями.

Постановка задачі. Розглянемо генеровану з використанням деякого генератора випадкових чисел матрицю X розмірності $n\times m$, де n – кількість рядків матриці (довжина вибірки), m – кількість стовпців (число параметрів системи). Відомими перетвореннями [1] перейдемо до матриці тієї ж розмірності стандартизованих величин Y, коли для кожного стовпця матриці виконуються рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} y_{ij}^{\ 2} = n-1. \qquad (1)$$

Для обмежених вибірок кореляційна матриця генерованих даних в загальному випадку не є одиничною. Позначимо

$$Y^T\cdot Y = \mathfrak{R}\cdot(n-1),$$

де $Y^{\grave{O}}$ – транспонована матриця генерованих даних, $\mathfrak{R}$ – кореляційна матриця парних коефіцієнтів кореляції розмірності $m\times m$. Слід знайти таке перетворення матриці Y, яке б забезпечило отримання матриці з заданими парними коефіцієнтами кореляції.

Результати роботи. Будемо шукати таку матрицю перетворення P вихідних даних, яка дозволить отримати систему випадкових величин з заданою наперед кореляційною матрицею R (в тому числі і одиничною). В такому випадку повинна виконуватись умова

$$(Y\cdot P^T)^T\cdot(Y\cdot P^T) = R\cdot(n-1).$$

Після тотожних перетворень отримуємо матричне рівняння, яке містить невідому матрицю перетворення P:

$$\mathfrak{R}\cdot P^T = P^{-1}\cdot R. \qquad (2)$$

Розмірність кожної матриці $m\times m$.

В окремих випадках, якщо стовпці вихідної послідовності статистично незалежні, матриця $\mathfrak{R}$ є одиничною I_m порядку m, і рівняння (2) приймає вигляд

$$P\cdot P^T = R. \qquad (3)$$

Аналогічно, якщо з довільної кореляційної матриці $\mathfrak{R}$ слід отримати послідовність лінійно незалежних випадкових величин з одиничною кореляційною матрицею, то рівняння (2) запишеться так:

$$\mathfrak{R}\cdot P^{T}=P^{-1}. \qquad (4)$$

Для зменшення кількості невідомих пропонується використовувати нижню трикутну матрицю перетворення [2], причому, враховуючи формули (2), без обмеження загальності можна покласти елемент матриці перетворення $p_{11}=\pm 1{,}00$. Наприклад, для системи двох випадкових величин

$$\mathfrak{R}=\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix};\quad R=\begin{pmatrix}1 & r\\ r & 1\end{pmatrix};\quad P=\begin{pmatrix}p_{11} & 0\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$$

розв’язки мають вигляд $p_{22}=\pm\sqrt{\dfrac{1-r^2}{1-\rho^2}}$, $p_{21}=r-\rho\cdot p_{11}\cdot p_{22}$, (5)

де ρ та r – недіагональні елементи матриць відповідно $\mathfrak{R}$ та R. Неважко впевнитись, що виконується властивість

$$(\det P)^2=\frac{\det R}{\det \mathfrak{R}}, \qquad (6)$$

де det – оператор обчислення визначника матриці. Для окремих випадків матриць $\mathfrak{R}$ та R елементи матриці перетворення приймають значення:

$$\text{при } \rho=0 \quad p_{22}=\pm\sqrt{1-r^2};\quad p_{21}=r;$$

$$\text{при } r=0 \quad p_{22}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\rho^2}};\quad p_{21}=\frac{-\rho\cdot p_{11}}{\pm\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Для матриць більшої розмірності матричне рівняння (2) пропонується розв’язувати числовими методами, зокрема використовувати метод найменших квадратів в такій постановці: шукати такі значення елементів матриці P, щоб сума квадратів відхилів елементів добутку двох матриць в лівій і правій частинах рівняння (2) була мінімальною. Мінімум шукається довільним стандартним методом багатовимірної оптимізації. Значення мінімуму суми квадратів відхилів знаходиться в межах похибки обчислень $1\cdot 10^{-11}$ – $1\cdot 10^{-13}$. В загальному випадку розв’язок не єдиний. Кількість різних розв’язків складає 2^m, отже для системи двох величин має місце чотири розв’язки, для системи трьох – вісім, але кожен з них забезпечує отримання кореляційної матриці заданого виду і має однаковий визначник.

Після знаходження елементів матриці перетворення P послідовність з заданою наперед кореляційною матрицею R шукається за формулою

$$Z=Y\cdot P^{T}. \qquad (7)$$

Отримана система величин Z розмірності $n\times m$ містить, як і сукупність Y, стандартизовані значення. Лінійними перетвореннями для кожного стовпця матриці Z можна отримати задані наперед статистичні характеристики – середнє значення і середнє квадратичне відхилення, кореляційна матриця при цьому не змінюється.

В табл.1 наведено кореляційні матриці $\mathfrak{R}$ загального та одиничного виду розмірності 4×4, відповідні матриці перетворення P, які отримані методом найменших квадратів, і види кореляційних матриць R сукупності Z, які в точності відповідають заданим. В усіх випадках слушне рівняння (6).

Таблиця 1 – Результати моделювання

Кореляційна матриця R				Матриця перетворення P				Кореляційна матриця R			
1	0,10	0,20	0,30	1	0	0	0	1	0,30	0,20	0,10
0,10	1	-0,10	-0,20	0,204	0,959	0	0	0,30	1	0,40	0,50
0,20	-0,10	1	0,10	-0,035	0,472	0,939	0	0,20	0,40	1	0,60
0,30	-0,20	0,10	1	-0,303	0,736	0,445	0,802	0,10	0,50	0,60	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0,30	0,20	0,10
0	1	0	0	0,300	0,954	0	0	0,30	1	0,40	0,50
0	0	1	0	0,200	0,356	0,913	0	0,20	0,40	1	0,60
0	0	0	1	0,100	0,493	0,443	0,742	0,10	0,50	0,60	1
1	0,10	0,20	0,30	1	0	0	0	1	0	0	0
0,10	1	-0,10	-0,20	-0,101	1,005	0	0	0	1	0	0
0,20	-0,10	1	0,10	-0,218	0,125	1,028	0	0	0	1	0
0,30	-0,20	0,1	1	-0,346	0,249	-0,010	1,081	0	0	0	1

Слід відмітити, що елементи заданої кореляційної матриці R не можуть бути довільними, бо будь-яка кореляційна матриця повинна бути симетричною додатно визначеною, тобто її визначник і всі головні мінори M_{ii} повинні бути додатними [3].

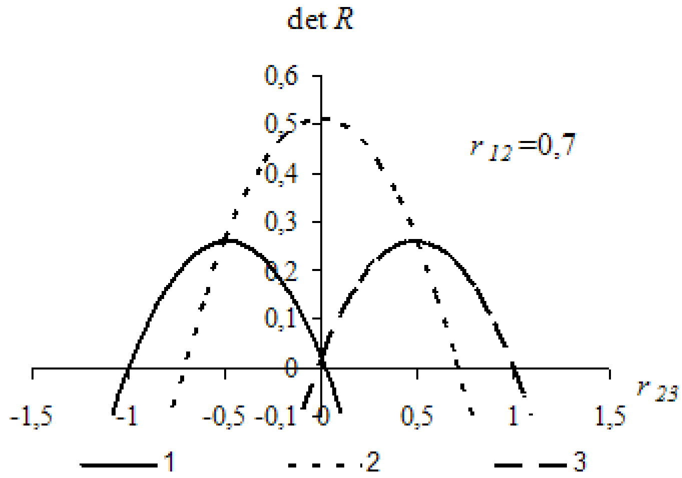
Розглянемо для прикладу матрицю третього порядку. Нехай парні коефіцієнти кореляції r_{12} і r_{13} задані, визначимо межі можливих значень елементу r_{23}:

$$det\,R = 1 + 2 \cdot r_{12} \cdot r_{13} \cdot r_{23} - r_{12}^{\ 2} - r_{13}^{\ 2} - r_{23}^{\ 2} > 0\,.$$

Після перетворень отримуємо нерівність відносно r_{23}, яка слушна на інтервалі

$$r_{12} \cdot r_{13} - \sqrt{(1 - r_{12}^{\ 2})(1 - r_{13}^{\ 2})} < r_{23} < r_{12} \cdot r_{13} + \sqrt{(1 - r_{12}^{\ 2})(1 - r_{13}^{\ 2})}\,.$$

На рис.1 показано графіки залежності значення визначника кореляційної матриці R від величини елемента r_{23} для різних величин парних коефіцієнтів кореляції r_{12} і r_{13}. Припустимі значення коефіцієнта r_{23} знаходяться на інтервалі, де величини визначника є додатними.



1 – r_{13}= – 0,7;   2 – r_{13}=0;   3 – r_{13}=0,7.

Рисунок 1 – Графіки значень визначника матриці R

Як відомо, степінь виокремленого зв'язку між величинами, які входять до складу системи, відображається частинними коефіцієнтами кореляції. Позначимо їх q_{ij}. Для системи трьох випадкових величин частинний коефіцієнт кореляції [1] між другим і третім факторами при незмінному першому обчислюється за формулою

$$q_{23} = \frac{r_{23} - r_{13} 2 \cdot r_{13}}{\sqrt{(1 - r_{12}{}^{2})(1 - r_{13}{}^{2})}}.$$

При $r_{23} = r_{12} \cdot r_{13}$ величина q_{23}=0; на лівій границі припустимих значень r_{23} величина q_{23}=-1, на правій q_{23}=+1. В центрі інтервалів, при $r_{23} = r_{12} \cdot r_{13}$ величини z_2 і z_3 матриці Z можуть вважатись незалежними, на границях припустимих інтервалів значень r_{23} між величинами z_3 і z_2 існує суттєвий зв'язок.

Таким чином, при заданих парних коефіцієнтах кореляції r_{12} і r_{13} можна, змінюючи величину r_{23}, моделювати системи випадкових величин з заданими наперед величинами частинних коефіцієнтів кореляції. Ця задача є важливою, коли слід оцінити вплив на залежну змінну окремо кожного фактора.

Вирази для частинних коефіцієнтів кореляції

$$q_{13} = \frac{r_{13} - r_{12} \cdot r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}{}^{2})(1 - r_{23}{}^{2})}}; \quad q_{23} = \frac{r_{13} - r_{12} \cdot r_{213}}{\sqrt{(1 - r_{12}{}^{2})(1 - r_{13}{}^{2})}}$$

розв'яжемо відносно парних коефіцієнтів кореляції; отримуємо

$$\begin{cases} r_{13} = r_{12} \cdot r_{23} - q_{13} \cdot \sqrt{(1 - r_{12}{}^{2})(1 - r_{23}{}^{2})} \\ r_{23} = r_{12} \cdot r_{13} - q_{23} \cdot \sqrt{(1 - r_{12}{}^{2})(1 - r_{13}{}^{2})} \end{cases}. \quad (8)$$

Система нелінійних рекурсивних рівнянь може бути розв'язана числовими методами. В табл.2 наведено деякі види кореляційних матриць R з заданими наперед частинними коефіцієнтами кореляції q_{13} і q_{23} при незмінному r_{12}=0,7 і q_{13}=0,4.

Таблиця 2 – Значення елементів кореляційної матриці *R*

q_{23}	0,00			0,40			-0,40			0,99		
R	1	0,70	0,521	1	0,70	0.689	1	0,70	0,166	1	0,70	0,726
	0,70	1	0,365	0,70	1	0,689	0,70	1	-0,166	0,70	1	0,994
	0,521	0,365	1	0,689	0,689	1	0,166	-0,166	1	0,726	0,994	1
q_{12}	0,642			0,428			0,748			-0,305		

В останньому рядку табл.2 наведено значення частинного коефіцієнта кореляції q_{12}, який відповідає отриманій матриці *R.* Як видно з таблиці, при q_{23}=0,00 величина $r_{23} = r_{12} \cdot r_{13}$.

Використовуючи отримані матриці *R*, за формулами (2) можна відшукати матрицю перетворення *P* і отримати модель системи випадкових величин з заданими частинними коефіцієнтами кореляції.

В загальному випадку, для систем з більшою кількістю чинників, для знаходження елементів матриці парних коефіцієнтів кореляції *R* з заданими величинами частинних коефіцієнтів кореляції *Q* також можна використати метод найменших квадратів. Задається довільна симетрична матриця парних коефіцієнтів кореляції *R* розмірності $m \times m$, для неї обчислюється обернена матриця R^{-1}, за елементами якої за відомими формулами [3] знаходяться елементи q_{ij} матриці частинних коефіцієнтів кореляції Q і формулюється оптимізаційна задача: міняючи елементи матриці R, відшукати мінімум суми квадратів відхилів між елементами матриці Q і заданої матриці частинних коефіцієнтів кореляції S. Розв'язок є стійким і єдиним.

Таблиця 3 – Приклад заданої матриці Q і відповідної матриці R

Матриця Q частинних коефіцієнтів кореляції						Матриця R парних коефіцієнтів кореляції				
1	0	0,300	0,400	0,500		1	0,596	0,639	0,709	0,788
0	1	0	0,400	0,300		0,596	1	0,425	0,660	0,635
0,300	0	1	0	0,200		0,639	0,425	1	0,470	0,604
0,400	0,400	0	1	0		0,709	0,660	0,470	1	0,620
0,500	0,300	0,200	0	1		0,788	0,635	0,604	0,620	1

В табл.3 наведено задану матрицю Q частинних коефіцієнтів кореляції розмірності 5×5 і відповідну їй матрицю R парних коефіцієнтів кореляції. Взаємний вплив чинників системи є досить складним і наведена вище властивість для елементів матриці 3×3 (при $q_{23}=0$ має місце $r_{23}=r_{12}\cdot r_{13}$) не є слушною.

Висновки. Запропоновані алгоритми дозволяють моделювати матриці вихідних даних з заданими кореляційними властивостями, що є корисним при моделюванні і аналізі складних систем.

ЛІТЕРАТУРА

1. Назаренко О.М. Основи економетрики: підручник / Назаренко О.М. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 392с.
2. Ермаков С.М. Курс статистического моделирования / С.М.Ермаков, Г.А.Михайлов – М.: Наука, 1976. – 320с.
3. Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики: учебник для вузов / С.А.Айвазян, В.С.Мхитарян. – М.:ЮНИТИ, 1998. – 1022с.

Надійшла до редколегії 25.04.2013.

УДК 004.031.43

ЗАВГОРОДНИЙ В.В., ст. преподаватель
ЯЛОВАЯ Е.Н., к.т.н., доцент
ЯШИНА К.В., к.т.н., ст. преподаватель

Днепродзержинский государственный технический университет

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ТЕХНОЛОГИИ РАЗРАБОТКИ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Введение. Современный этап развития производственных предприятий (ПП) характеризуется повышением внимания к вопросам эффективного управления этими предприятиями, как стратегического, так и оперативного. Это обусловлено тем, что современное ПП должно функционировать в условиях постоянно меняющейся рыночной ситуации, обеспечивая при этом экономическую эффективность реализации целей самого ПП. Наиболее часто политика автоматизации ПП не реализуется по единому принципу, что приводит к тому, что на одном ПП могут функционировать несколько локальных ин-