РОЗДІЛ «МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ»

УДК 539.3

БЕЗВЕРХИЙ О.І., д.фіз.-мат.н., професор

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

ПРО ОДИН МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ

Вступ. Природні і синтезовані п’єзоелектричні матеріали завдяки їх здатності перетворення електричного поля в механічні деформації (обернений п’єзоефект) та механічних деформацій в електричне поле (прямий п’єзоефект) знаходять широке застосування в пристроях радіоелектроніки і зв’язку, обчислювальної техніки, автоматики, вимірювальної техніки, приладах для контролю технологічних процесів, генераторах і приймачах механічних (акустичних) коливань в кіло-і мегагерцевому діапазоні. Експериментальні і теоретичні дослідження зв’язаного деформування п’єзоелектричних елементів мають велике фундаментальне і прикладне значення. У зв’язку з цим актуальними є розробка і вдосконалення теоретичних та чисельних методів аналізу пружноелектричних гармонічних та нестаціонарних коливань на основі дискретних просторових континуальних рівнянь електропружності і їх варіаційних тлумачень з використанням сіткових апроксимацій по просторовій координаті, реалізація розроблених алгоритмів і проведення аналізу коливань напружено-деформованого стану і електричного поля типових п’єзокерамічних елементів.

Для розв’язку задач електропружності широко застосовуються різні методи сіткових апроксимацій, які або безпосередньо алгебраізують задачу або зменшують її розмірність.

В роботах Москалькова М.Н. [3], Мельника В.Н. і Москалькова М.Н. [4] вивчаються переважно математичні питання сіткових різницевих апроксимацій рівнянь електропружності.

Варіаційно-різницевий метод (ВРМ) побудови сіткових апроксимацій запропоновано в роботах [7-9]. Більш низький порядок похідних, забезпечує перевагу ВРМ над безпосередньою різницевою апроксимацією диференціальних рівнянь коливань. При побудові рівнянь за допомогою ВРМ вдається уникнути протиріч в кутових точках області. У порівнянні з варіаційними методами, в яких використовується єдина для всього тіла система базисних функцій, ВРМ має перевагу через відсутність проблеми вибору цих функцій. Матриця розв’язуючої системи ВРМ має симетричну стрічкову структуру.

На початку 70-х років для розв’язання крайових задач про гармонічні електропружні коливання був застосований метод скінченних елементів (МСЕ) [11–15]. Більшість робіт, опублікованих пізніше [2 та ін.], присвячені аналізу коливань п'єзоелектричних тіл, здійснюваному в рамках двовимірного підходу. Просторовий тривимірний аналіз коливань п’єзоелектичного перетворювача наводиться в роботі [12], в якій використано ізопараметричні елементи другого порядку у вигляді двадцятивузлового гексаедра. Восьмивузловий гексаедричний елемент з нижчою апроксимацією переміщень і електричного потенціалу застосовано для тривимірного аналізу в роботі [15]. Питання теорії і реалізації МСЕ частково описані в монографії [5].

Редукція системи рівнянь гармонічних електропружних коливань п’єзокерамічного циліндру на основі сплайн-апроксимацій застосовується в статті [1].

В статті [10] використовуються рівняння гамільтонового типу по товщинній координаті для аналізу одномірних гармонічних коливань кулі, циліндру і плоского шару.

Закладена в цій статті ідея узагальнюється у цій роботі для осесиметричної задачі електропружності для циліндру.

Постановка задачі. В теорії електропружності загальноприйнятим [2, 5, 6 та ін.] є використання системи рівнянь коливань деформацій твердого тіла

$$\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{k2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial x_3}, \qquad k = 1,2,3 \tag{1.1}$$

та квазістатичного наближення рівнянь Максвелла для електричного поля

$$div\mathbf{D} = 0, \qquad rot\,\mathbf{E} = 0 \tag{1.2}$$

разом з матеріальними залежностями для поляризованої п'єзоелектричної кераміки (п'єзокераміки) і п'єзоелектриків гексагональної системи класу $6mm$ з віссю симетрії шостого порядку та враховані формули Коші для деформацій.

Система рівнянь зводиться до чотирьох рівнянь типу Ламе

$$\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = L_k(u_1, u_2, u_3, \varphi), \quad 0 = L_4(u_1, u_2, u_3, \varphi), \quad k = 1,2,3$$

відносно компонент вектора механічних переміщень $u_k(x_1, x_2, x_3, t)$ і електричного потенціалу $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$, який вводиться градієнтним розв'язком $\mathbf{E} = -grad\varphi$ другого з рівнянь (1.2).

Система рівнянь доповнюється граничними умовами $u_S = \overset{o}{u}_S \vee \sigma_n = \overset{o}{\sigma}_n$ для механічних переміщень і напружень, і граничними умовами $\varphi = \overset{o}{\varphi} \vee D_n = \overset{o}{D}_n$ для електричних величин на граничній поверхні S .

При необхідності треба сформулювати початкові умови; при усталених гармонічних коливаннях початкові умови не формулюються.

Метод розв'язку. Система рівнянь електропружності осесиметричних гармонічних коливань ($f(r,z,t) = Re\, f^a(r,z) exp\, i\omega t$) в циліндричних координатах при радіальній поляризації складається з рівнянь механічних коливань

$$\frac{\partial \sigma_{zr}^a}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^a}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}^a}{r} + \rho\omega^2 u_z^a = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^a}{\partial r} + \frac{\sigma_{\theta\theta}^a - \sigma_{rr}^a}{r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^a}{\partial z} + \rho\omega^2 u_r^a = 0, \tag{2.1}$$

квазістатичного наближення рівнянь Максвелла

$$\frac{\partial D_z^a}{\partial z} + \frac{\partial D_r^a}{\partial r} + \frac{D_r^a}{r} = 0,$$

$$rot\vec{E}^a = 0 \;\rightarrow\; E_z^a = -\frac{\partial \varphi^a}{\partial z},\; E_r^a = -\frac{\partial \varphi^a}{\partial r} \tag{2.2}$$

і матеріальних залежностей для поляризованої вздовж осі r п'єзокераміки

$$\sigma^a_{\theta\theta} = c^E_{11}\frac{u^a_r}{r} + c^E_{12}\frac{\partial u^a_z}{\partial z} + c^E_{13}\frac{\partial u^a_r}{\partial r} + e_{13}\frac{\partial \varphi^a}{\partial r},$$

$$\sigma^a_{zz} = c^E_{21}\frac{u^a_r}{r} + c^E_{11}\frac{\partial u^a_z}{\partial z} + c^E_{13}\frac{\partial u^a_r}{\partial r} + e_{13}\frac{\partial \varphi^a}{\partial r}$$

$$\sigma^a_{rr} = c^E_{31}\frac{u^a_r}{r} + c^E_{31}\frac{\partial u^a_z}{\partial z} + c^E_{33}\frac{\partial u^a_r}{\partial r} + e_{33}\frac{\partial \varphi^a}{\partial r},$$

$$\sigma^a_{zr} = c^E_{55}\left(\frac{\partial u^a_r}{\partial z} + \frac{\partial u^a_z}{\partial r}\right) + e_{51}\frac{\partial \varphi^a}{\partial z},$$

$$D^a_z = e_{51}\left(\frac{\partial u^a_z}{\partial r} + \frac{\partial u^a_r}{\partial z}\right) - \varepsilon^K_{11}\frac{\partial \varphi^a}{\partial z},$$

$$D^a_r = e_{31}\left(\frac{u^a_r}{r} + \frac{\partial u^a_z}{\partial z}\right) + e_{33}\frac{\partial u^a_r}{\partial r} - \varepsilon^K_{33}\frac{\partial \varphi^a}{\partial r}. \tag{2.3}$$

Далі верхні індекси «a», «E» і «K» будемо опускати.

Зведемо систему рівнянь (2.1)-(2.3) до операторної гамільтонової системи по радіальній координаті відносно функцій $\overline{\sigma}_{rr}$, u_z, $\overline{D}_r$, u_r, $\overline{\sigma}_{rz}$, φ ($\overline{\sigma}_{rz} = r\sigma_{rz}$, $\overline{\sigma}_{rr} = r\sigma_{rr}$, $\overline{D}_r = rD_r$). Після необхідних перетворень одержимо

$$\frac{\partial\overline{\sigma}_{rr}}{\partial r} = \frac{c_{13*}}{c_{33*}}\frac{\overline{\sigma}_{rr}}{r} + \left(c_{13} - c_{13}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\frac{\overline{D}_r}{r} +$$
$$+\left[-r\rho\omega^2 + \frac{1}{r}\left(c_{11} - c_{12}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\right]u_r - \frac{\partial\overline{\sigma}_{rz}}{\partial z};$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = -\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{c_{55}}\frac{\overline{\sigma}_{rz}}{r} - \frac{e_{51}}{c_{55}}\frac{\partial\varphi}{\partial z};\quad \frac{\partial\overline{D}_r}{\partial r} = -\frac{e_{51}}{c_{55}}\frac{\partial\overline{\sigma}_{rz}}{\partial z} + \varepsilon_{11*}r\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{c_{33*}}\frac{\overline{\sigma}_{rr}}{r} - \frac{c_{13*}}{c_{33*}}\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}c_{33*}}\frac{\overline{D}_r}{r} - \frac{c_{13*}}{c_{33*}}\frac{u_r}{r};$$

$$\frac{\partial\overline{\sigma}_{rz}}{\partial r} = -\frac{c_{13*}}{c_{33*}}\frac{\partial\overline{\sigma}_{rr}}{\partial z} + r\left[-\rho\omega^2 u_z - \left(c_{11} - c_{13}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\right]\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} +$$
$$+\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\frac{\partial\overline{D}_r}{\partial z} - \left(c_{13} - c_{13}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\frac{\partial u_r}{\partial z};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}c_{33*}}\frac{\overline{\sigma}_{rr}}{r} + \frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_{33}}{\varepsilon_{33}c_{33*}}\frac{\overline{D}_r}{r} + \frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\frac{u_r}{r}. \tag{2.4}$$

В попередніх рівняннях використані позначення

$$c_{j3*} = c_{j3} + e_{j3}\frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}},\ j = 1{,}3;\ e_{j3*} = e_{j3} - c_{j3}\frac{e_{33}}{c_{33}},\ j = 1{,}3;$$

$$\varepsilon_{11*} = \varepsilon_{11} + \frac{e^2_{51}}{c_{55}},\ \varepsilon_{33*} = \varepsilon_{33} + \frac{e^2_{33}}{c_{33}}.$$

Величини $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz}, D_z, які не увійшли в систему (2.4), визначаються через основні функції σ_{rr}, u_z, D_r, u_r, σ_{rz}, φ формулами

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{c_{13*}}{c_{33*}}\sigma_{rr} + \left(c_{12} - c_{13}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\frac{\partial u_z}{\partial z} -$$
$$-\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}D_r + \left(c_{11} - c_{13}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\frac{u_r}{r},$$
$$\sigma_{zz} = \frac{c_{13*}}{c_{33*}}\sigma_{rr} + \left(c_{11} - c_{13}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\frac{\partial u_z}{\partial z} -$$
$$-\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}D_r + \left(c_{12} - c_{13}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\frac{u_r}{r},$$
$$D_z = \frac{e_{51}}{c_{55}}\sigma_{zr} - \left(\varepsilon_{11} + e_{51}\frac{e_{51}}{c_{55}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{2.5}$$

Приведемо систему рівнянь (2.4) до системи звичайних диференціальних рівнянь на основі різницевих апроксимацій по осьовій координаті.

Розглянемо п'єзокерамічний циліндр $r_0 < r < r_1$, $0 < z < l$. Введемо розбиття відрізку $(0, l)$ по осі z на інтервали точками $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n$ і в формулах (2.4) апроксимуємо похідні по z скінченними різницями. В результаті одержимо систему $6(n-2)$ звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\bar{\sigma}_{rr,i}}{dr} = \frac{c_{13*}}{c_{33*}}\frac{\bar{\sigma}_{rr,i}}{r} + \left(c_{13} - c_{13}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta_z} - \frac{c_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\frac{\bar{D}_{r,i}}{r} +$$
$$+\left[-r\rho\omega^2 + \frac{1}{r}\left(c_{11} - c_{12}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\right]u_{r,i} - \frac{\bar{\sigma}_{rz,i+1} - \bar{\sigma}_{rz,i-1}}{2\Delta_z};$$
$$\frac{du_{z,i}}{dr} = -\frac{u_{r,i+1} - u_{r,i-1}}{2\Delta_z} + \frac{1}{c_{44}}\frac{\bar{\sigma}_{rz,i}}{r} - \frac{e_{51}}{c_{55}}\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta_z};$$
$$\frac{d\bar{D}_{r,i}}{dr} = -\frac{e_{51}}{c_{55}}\frac{\bar{\sigma}_{rz,i+1} - \bar{\sigma}_{rz,i-1}}{2\Delta_z} + \varepsilon_{22*}r\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{\Delta_z^2};$$
$$\frac{du_{r,i}}{dr} = \frac{1}{c_{33*}}\frac{\bar{\sigma}_{rr,i}}{r} - \frac{c_{23*}}{c_{33*}}\frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta_z} - \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}c_{33*}}\frac{\bar{D}_{r,i}}{r} - \frac{c_{13*}}{c_{33*}}\frac{u_{r,i}}{r};$$
$$\frac{d\bar{\sigma}_{rz,i}}{dr} = -\frac{c_{13*}}{c_{33*}}\frac{\bar{\sigma}_{rr,i+1} - \bar{\sigma}_{rr,i-1}}{2\Delta_z} + r\Big[-\rho\omega^2 u_{z,i} -$$
$$-\left(c_{22} - c_{13}\frac{c_{23*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{23*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\frac{u_{z,i+1} - 2u_{z,i} + u_{z,i-1}}{\Delta_z^2}\Big] +$$
$$+\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\frac{\bar{D}_{r,i+1} - \bar{D}_{r,i-1}}{2\Delta_z} - \left(c_{13} - c_{13}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\frac{u_{r,i+1} - u_{r,i-1}}{2\Delta_z};$$
$$\frac{d\varphi_i}{dr} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}c_{33*}}\frac{\bar{\sigma}_{rr,i}}{r} + \frac{e_{23*}}{\varepsilon_{33*}}\frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta_z} - \frac{c_{33}}{\varepsilon_{33}c_{33*}}\frac{\bar{D}_{r,i}}{r} + \frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\frac{u_{r,i}}{r}; \tag{2.6}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-2, n-1.$$

Для виконання граничних умов при $z = z_0 = 0$ і $z = z_n = l$ необхідно записати різницевий аналог для σ_{zz}, D_z. Скориставшись формулами (2.5), одержимо

$$\sigma_{zz,0} = \frac{c_{13*}}{c_{33*}}\sigma_{rr,0} + \left(c_{11} - c_{13}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\frac{u_{z,1} - u_{z,0}}{\Delta_z} -$$

$$- \frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}} D_{r,0} + \left(c_{12} - c_{13}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\frac{u_{r,0}}{r},$$

$$D_{z,0} = \frac{e_{51}}{c_{55}}\sigma_{zr,0} - \left(\varepsilon_{11} + e_{51}\frac{e_{51}}{c_{55}}\right)\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta_z}.$$

$$\sigma_{zz,n} = \frac{c_{13*}}{c_{33*}}\sigma_{rr,n} + \left(c_{11} - c_{13}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\frac{u_{z,n} - u_{z,n-1}}{\Delta_z} -$$

$$- \frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}} D_{r,n} + \left(c_{12} - c_{13}\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}}\right)\frac{u_{r,n}}{r},$$

$$D_{z,n} = \frac{e_{51}}{c_{55}}\sigma_{zr,n} - \left(\varepsilon_{11} + e_{51}\frac{e_{51}}{c_{55}}\right)\frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{\Delta_z}. \qquad (2.7)$$

Користуючись формулами (2.7) і апроксимаціями необхідних величин з матеріальних залежностей (2.3) та відповідними граничними умовами, знайдемо невідомі значення основних функцій $\overline{\sigma}_{rr}$, u_z, $\overline{D}_r$, u_r, $\overline{\sigma}_{rz}$, φ на границях $z = z_0 = 0$ і $z = z_n = l$. У результаті отримаємо замкнену систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Висновки. Запропоновано новий метод редукції рівнянь гармонічних електропружних коливань в циліндричних координатах до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на основі гамільтонового формалізму по радіальній координаті і різницевих апроксимацій по осьовій координаті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Григоренко А.Я. Исследование свободных колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины с осевой поляризацией / А.Я.Григоренко, Т.Л.Ефимова, И.А.Лоза // Прикладная механика. – 2011. – № 6 (46). – С.17-26.
2. Механика связанных полей в элементах конструкций в 5-ти томах / под общ. ред. А.Н.Гузя. Т. 5. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., ШульгаН.А. – К.: Наукова думка, 1989. – 280с.
3. Москальков М.Н. Исследование разностной схемы решения задачи излучения звука цилиндрическим пьзовибратором / М.Н.Москальков // Дифференциальные уравнения. –1986. – №7 (22). – С.1220-1226.
4. Мельник В.Н. Разностные схемы и анализ приближенных решений для двумерных нестационарных задач связанной электроупругости / В.Н.Мельник, М.Н.Москальков // Дифференциальные уравнения. – 1991. – №7 (27). – С.1220-1229.
5. Шульга Н.А. Колебания пьезокермических тел / Шульга Н.А., Болкисев А.М. – К.: Наукова думка, 1990. – 228с.
6. Шульга М.О. Резонансні електромеханічні коливання п’єзоелектричних пластин / Шульга М.О., Карлаш В.Л. – К.: Наукова думка, 2007. – 186с.
7. Шульга Н.А. Колебания пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией при электрическом нагружении / Шульга Н.А., БорисенкоЛ.В. // Прикладная механика.

– 1989. – № 10 (025). – С.41-47.
8. Шульга Н.А. Электроупругие колебания радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра с частично электродированными боковыми поверхностями / Шульга Н.А., Борисенко Л.В. // Прикладная механика. – 1990. – № 1 (26). – С.43-47.
9. Шульга Н.А. Электроупругие колебания секционированного пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией / Шульга Н.А., Борисенко Л.В. // Прикладная механика. – 1990. – № 2 (26). – С.63-67.
10. Шульга Н.А. Сравнительный анализ упругоэлектрических толщинных колебаний слоев с искривленными границами / Шульга Н.А., Григорьева Л.О. // Прикладная механика. – 2011. – № 2 (47). – С.86-95.
11. Allik H. Finite element method for piezoelectric vibration / Allik H., Hughes T.J.R. // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1970. – N 2. – P.151-157.
12. Allik H. Vibrational response of sonar transducers using piezoelectric finite elements / Allik H., Webman K.M., Hunt J.T. // J. Acoust. Soc. Amer. – 1974. – N 6 (56). – P.1782-1791.
13. Kagawa Y. A new approach to analysis and design of electromechanical filters by finite element technique / Kagawa Y. //J. Acoust Soc. Amer. – 1971. – – N 5a (49) – P.1348-1356.
14. Kagawa Y. Application of finite element method to vibration problems in which electrical and mechanical systems are coupled – An analysis of flexure type vibrators with electrostrictive transducers / Kagawa Y., Gladwell G.M.L. // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. – 1970. – SU-17. – P.41-52.
15. Tomikawa V. Analysis of electrical equivalent circuit elements of piezo-tuning forks by the finite element method / Tomikawa V., Miura H., Dong S.B. // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. – 1978. – SU-25. – P.206-212.

Надійшла до редколегії 24.03.2014.

УДК 539.3

КИРИЛЮК В.С., д.физ.-мат.н., вед.науч.сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ О ВДАВЛИВАНИИ ДВУХ ЖЕСТКИХ ШТАМПОВ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Введение. Методы решения пространственных контактных задач для упругих тел достаточно хорошо разработаны. Среди работ в данной области можно выделить [1-3] и др., а также [4, 5]. В то же время, все возрастающее использование электроупругих материалов, которые отличаются значительной хрупкостью, вызывает необходимость детального изучения распределения силовых и электрических полей в электроупругих телах вблизи трещин, штампов [6]. Однако, решение трехмерных задач электроупругости сопряжено со значительными математическими трудностями, поскольку исходная система дифференциальных уравнений является связанной относительно силовых и электрических полей. Решению отдельных контактных задач для электроупругих тел посвящены работы [6-8]. Однако до настоящего времени контактное взаимодействие двух жестких штампов кругового сечения с электроупругим полупространством не изучено.

В данной работе рассмотрены задачи контактного взаимодействия двух жестких штампов (плоских и неплоских) кругового сечения. Получены решения новых задач, найдены аналитические выражения для распределения контактного давления под