– 1989. – № 10 (025). – С.41-47.
8. Шульга Н.А. Электроупругие колебания радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра с частично электродированными боковыми поверхностями / Шульга Н.А., Борисенко Л.В. // Прикладная механика. – 1990. – № 1 (26). – С.43-47.
9. Шульга Н.А. Электроупругие колебания секционированного пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией / Шульга Н.А., Борисенко Л.В. // Прикладная механика. – 1990. – № 2 (26). – С.63-67.
10. Шульга Н.А. Сравнительный анализ упругоэлектрических толщинных колебаний слоев с искривленными границами / Шульга Н.А., Григорьева Л.О. // Прикладная механика. – 2011. – № 2 (47). – С.86-95.
11. Allik H. Finite element method for piezoelectric vibration / Allik H., Hughes T.J.R. // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1970. – N 2. – P.151-157.
12. Allik H. Vibrational response of sonar transducers using piezoelectric finite elements / Allik H., Webman K.M., Hunt J.T. // J. Acoust. Soc. Amer. – 1974. – N 6 (56). – P.1782-1791.
13. Kagawa Y. A new approach to analysis and design of electromechanical filters by finite element technique / Kagawa Y. //J. Acoust Soc. Amer. – 1971. – – N 5a (49) – P.1348-1356.
14. Kagawa Y. Application of finite element method to vibration problems in which electrical and mechanical systems are coupled – An analysis of flexure type vibrators with electrostrictive transducers / Kagawa Y., Gladwell G.M.L. // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. – 1970. – SU-17. – P.41-52.
15. Tomikawa V. Analysis of electrical equivalent circuit elements of piezo-tuning forks by the finite element method / Tomikawa V., Miura H., Dong S.B. // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. – 1978. – SU-25. – P.206-212.

Надійшла до редколегії 24.03.2014.

УДК 539.3

КИРИЛЮК В.С., д.физ.-мат.н., вед.науч.сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ О ВДАВЛИВАНИИ ДВУХ ЖЕСТКИХ ШТАМПОВ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Введение. Методы решения пространственных контактных задач для упругих тел достаточно хорошо разработаны. Среди работ в данной области можно выделить [1-3] и др., а также [4, 5]. В то же время, все возрастающее использование электроупругих материалов, которые отличаются значительной хрупкостью, вызывает необходимость детального изучения распределения силовых и электрических полей в электроупругих телах вблизи трещин, штампов [6]. Однако, решение трехмерных задач электроупругости сопряжено со значительными математическими трудностями, поскольку исходная система дифференциальных уравнений является связанной относительно силовых и электрических полей. Решению отдельных контактных задач для электроупругих тел посвящены работы [6-8]. Однако до настоящего времени контактное взаимодействие двух жестких штампов кругового сечения с электроупругим полупространством не изучено.

В данной работе рассмотрены задачи контактного взаимодействия двух жестких штампов (плоских и неплоских) кругового сечения. Получены решения новых задач, найдены аналитические выражения для распределения контактного давления под штампами (плоскими и неплоскими), для неплоских штампов найдено соотношение для нахождения неизвестной области контакта. Исследовано влияние электроупругих свойств полупространства на контактное взаимодействие со штампами.

Постановка задачи. Пусть два жестких штампа кругового сечения вдавливаются в электроупругое полупространство $z \le 0$. Полагаем, что ось $0z$ совпадает с осью симметрии (поляризации) пьезоэлектрического тела. Также считаем поверхность полупространства неэлектродированной. Граничные условия при гладком контакте (без трения) принимают вид

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0,\ D_z(x,y) = 0 \text{ при } z = 0;\ \sigma_{zz} = 0 \text{ при } (x,y) \notin \Omega;$$
$$\sigma_{zz} = -p(x,y) \text{ при } (x,y) \in \Omega, \qquad (1)$$

где $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ – область контакта штампов с полупространством, $p(x,y)$ – распределение контактного давления под штампами, D_z – нормальная компонента вектора электрической индукции. Перемещения u_z точек основания штампов имеют вид

$$u_z^{(i)}(x_i, y_i, 0) = \delta_i - \beta_{y_i}^{(i)} x_i + \beta_{x_i}^{(i)} y_i - \varphi_i(x_i, y_i) \text{ при } (x_i, y_i) \in \Omega_i, \qquad (2)$$

где δ_i – поступательное перемещение каждого штампа вдоль оси $0z$; β_x, β_y – проекции вектора поворота на оси $0x$ и $0y$; $z_i = \varphi_i(x,y)$ – уравнение поверхности основания каждого штампа. Для плоского основания штампа $\varphi(x,y) \equiv 0$.

Основные уравнения и соотношения. Система связанных уравнений статики электроупругости для трансверсально-изотропного тела относительно перемещений u_x, u_y, u_z и электрического потенциала Ψ принимает вид [6]:

$$c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} +$$
$$+ (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = 0;$$
$$c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} +$$
$$+ (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = 0; \qquad (3)$$
$$(c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = 0;$$
$$(e_{31} + e_{15})(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15}(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33} u_{z,zz} - \varepsilon_{11}^S(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = 0,$$

где c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E – независимые модули упругости; e_{31}, e_{15}, e_{33} – пьезомодули; ε_{11}^S, ε_{33}^S – диэлектрические проницаемости.

Согласно [6] компоненты перемещений и электрический потенциал можно записать в виде

$$u_x = \sum_{j=1}^{3} \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y};\ u_y = \sum_{j=1}^{3} \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x};\ u_z = \sum_{j=1}^{3} k_j \Phi_{j,z};\ \Psi = \sum_{j=1}^{3} l_j \Phi_{j,z}, \qquad (4)$$

где k_j, l_j – некоторые постоянные, которые подлежат определению. Функции Φ_j удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \ (j = 1, 2, 3, 4), \qquad (5)$$

где $\nu_4 = 2c_{44}^E/(c_{11}^E - c_{12}^E)$, остальные значения ν_i ($i =$ 1, 2, 3) являются корнями алгебраического уравнения третьего порядка. Постоянные k_j, l_j ($j =$ 1, 2, 3) связаны с корнями уравнения ν_j следующими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{e_{33} k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = \nu_j \quad (j = 1, 2, 3), \tag{6}$$

где $$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j;\; d_j = e_{15}(1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Далее получаем

$$k_j = \frac{[(\nu_j c_{11}^E - c_{44}^E)(e_{15}\nu_j - e_{33}) + \nu_j (c_{44}^E + c_{13}^E)(e_{31} + e_{15})]}{[(c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15}\nu_j - e_{33}) - (c_{44}^E \nu_j - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15})]};$$

$$l_j = \frac{[(\nu_j c_{11}^E - c_{44}^E)(\nu_j c_{44}^E - c_{33}^E) + \nu_j (c_{44}^E + c_{13}^E)^2]}{[(\nu_j c_{44}^E - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15}) - (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15}\nu_j - e_{33})]} \quad (j = 1,2,3). \tag{8}$$

После введения обозначений $z_j = \nu_j^{-1/2} z$ видно, что функции $\varPhi_j$ являются гармоническими в системах координат (x, y, z_j).

Метод решения и основные результаты. Выберем потенциальные функции следующим образом:

$$\varPhi_i(x, y, z_1) = \frac{1}{2\pi} \alpha_i^* \iint\limits_{\Omega_1 \bigcup \Omega_2} p(\xi, \eta) \ln(\rho_i + z_i) d\xi d\eta \quad (i = 1,2,3), \tag{9}$$

где $\rho_i = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2}$, α_i^* – постоянные, которые находим из системы трех линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \left(c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j\right) = 1; \quad \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \left(c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j\right) / \sqrt{\nu_j} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \left(e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j\right) = 0. \tag{10}$$

Также положим $\varPhi_4^{(2)} = \varPhi_5^{(2)} = 0$. В результате такого выбора потенциальных функций контактную задачу электроупругости о вдавливании двух жестких штампов кругового сечения в электроупругое полупространство приводим к нахождению неизвестной плотности потенциала простого слоя по области $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$, при которой нормальные компоненты перемещения под штампами связаны со значениями контактного давления следующим образом:

$$u_z(x, y, 0) = \frac{A^{Piezo}}{2\pi} \iint\limits_{\Omega_1 \bigcup \Omega_2} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}. \tag{11}$$

Значение A^{Piezo} определяем согласно выражению $A^{Piezo} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^* k_j / \sqrt{\nu_j}$. (12)

Следовательно, как и в случае классической контактной задачи теории упругости для изотропного полупространства, задача электроупругости сведена к нахождению неизвестной плотности потенциала простого слоя в областях контакта.

Задача 1. Рассмотрим вначале случай вдавливания в электроупругое полупространство (с неэлектродированной поверхностью) двух одинаковых плоских круговых штампов радиуса a, оси которых проходят через точки с координатами $(0,0)$ и $(s,0)$. Используя метод разложения по малому параметру (аналогично задаче классической теории упругости [5]), получаем распределение контактного давления под штампом с центром в точке $(0,0)$ в виде

$$p(x,y) = \frac{\delta}{A^{Piezo}\pi\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi}\varepsilon - \frac{4x}{\pi a}\varepsilon^2 + \frac{4}{\pi^2}\varepsilon^2 - \frac{6x^2}{\pi a^2}\varepsilon^3 + \frac{2y^2}{\pi a^2}\varepsilon^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{8x}{\pi^2 a}\varepsilon^3 + \frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\pi^2}{12} - 1\right)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \right\},\ \varepsilon = a/s, \tag{13}$$

где δ – перемещения штампа. Связь между силой вдавливания P, которая действует на каждый плоский штамп, и его перемещением принимает вид

$$P = \frac{4a\delta}{A^{Piezo}\pi}\left[1 - \frac{2}{\pi}\varepsilon + \frac{4}{\pi^2}\varepsilon^2 - \frac{8}{\pi^3}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)\right]. \tag{14}$$

Отметим, что малым параметром в приведенных выражениях является отношение радиусов штампов к расстоянию между их центрами.

Задача 2. Исследуем случай вдавливания в электроупругое полупространство, поверхность которого не содержит электродного покрытия, двух шарообразных штампов одинакового радиуса b, центры которых удалены один от другого на расстоянии s. При этом предполагаем, радиус $b >> \delta$, поэтому перемещение точек полупространства под основаниями штампов приближенно можно представить $u_z = \delta - r^2/(2b)$.

Применяя метод последовательных приближений к системе интегральных уравнений и разложения по малому параметру, подобно [5] для классической задачи теории упругости, распределение контактного давления под штампом с центром в $(0,0)$ получаем в виде

$$p(r,\alpha) = \frac{2}{\pi A^{Piezo}}\sqrt{\frac{R(\alpha) - r}{R(\alpha) + r}}\left\{\sqrt{\frac{\delta}{b}}\left[4 - 0{,}8492\varepsilon + 0{,}1800\varepsilon^2 + \right.\right.$$

$$+ 3{,}0328\varepsilon^3 - (0{,}7423 + 0{,}0394\varepsilon)\varepsilon^2 cos\alpha\Big] + \big[-2 + 0{,}8492\varepsilon^3 + (0{,}0265 - 0{,}0084\varepsilon)\varepsilon^2\cos\alpha +$$

$$\left. + 0{,}4246\varepsilon^3 + \cos 2\alpha\big]b^{-1}[R(\alpha) - r] + o\left(\varepsilon^4\right)\right\}, \tag{15}$$

где $\varepsilon = \sqrt{\delta b}/s$, $0 \le \varepsilon < 0{,}5$. При этом радиус-вектор контура штампа находим в виде

$$R(\alpha) = \sqrt{\delta b}\left[1 - 0{,}2123\varepsilon + 0{,}0450\varepsilon^2 + 0{,}3336\varepsilon^3 - \varepsilon^2\cos\beta(0{,}4244 - 0{,}1394\varepsilon) - \right.$$

$$\left. - 0{,}2123\varepsilon^3\cos 2\alpha + o\left(\varepsilon^4\right)\right].$$

Радиус области контакта для неплоского штампа определяется согласно выражению

$$a = \sqrt{\delta b}\left[1 - 0{,}2123\varepsilon - 0{,}3794\varepsilon^2 + 0{,}2607\varepsilon^3 + o\left(\varepsilon^4\right)\right]. \qquad (16)$$

С помощью формул (15), (16) находим контактное давление и размеры области контакта под одинаковыми шарообразными штампами.

Анализ результатов численных исследований. Рассмотрим случай вдавливания двух плоских круговых штампов в пьезоэлектрическое полупространство. Согласно выражениям (14), связывающим силу вдавливания штампа P с величиной перемещения штампа δ, электроупругие свойства материала полупространства входят в эти выражения через значение A^{Piezo}. Из формул (14) следует, что при заданной силе вдавливания плоских штампов, перемещения штампов δ (их осадка) обратно пропорциональны значению A^{Piezo}, что позволяет провести оценку влияния связанности силовых и электрических полей на параметры контактного взаимодействия. Для сравнения со случаем вдавливания плоских штампов в чисто упругое трансверсально-изотропное полупространство (с теми же упругими свойствами, что и исходный пьезоэлектрик) вычислим также значение A^{Trans}, которое находим из A^{Piezo}, полагая близкими нулю пьезомодули и диэлектрические проницаемости для соотвествующего пьезоэлектрического материала. В результате вычислений для пьезокерамических материалов PZT-5H и P-7 имеем $A^{Piezo} / A^{Trans} = 0{,}784$ и $0{,}711$ соответственно. Это означает, что связанность силовых и электрических полей для приведенных электроупругих материалов значительно уменьшает величину перемещений под плоскими штампами по сравнению со случаем упругого трансверсально-изотропного материала (с теми же упругими свойствами, что и электроупругий материал). Для материалов PZT-5H и P-7 такое уменьшение составляет 21,6% и 28,8%.

Выводы. Таким образом, в настоящей работе получены аналитические приближенные решения новых задач электроупругости о вдавливании двух плоских и неплоских (шарообразных) штампов кругового сечения в электроупругое полупространство с неэлектродированной поверхностью. Найдены выражения для распределений контактных давлений под штампами, перемещений штампов, а также формулы для вычисления размеров области контакта для неплоских штампов. Дана оценка влияния связанности силовых и электрических полей на перемещения плоских жестких штампов при вдавливании в полупространство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Галин Л.А. – М.: Наука, 1980. – 304с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / Джонсон К. – М.: Мир, 1989. – 509с.
3. Лурье А.И. Теория упругости / Лурье А.И. – М.: Наука, 1970. – 939с.
4. Babich S.Yu. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches / Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitskii V.B. // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, № 7. – P.744-765.
5. Андрейкив А.Е. Вдавливание в упругое полупространство системы штампов / Андрейкив А.Е. // Изв. АН СССР. МТТ. – 1975. – № 2. – С.125-131.
6. Podil'chuk Yu.N. Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems / Podil'chuk Yu.N.

// Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, № 2. – P.132-170.
7. Кирилюк В.С. О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством / Кирилюк В.С. // Теоретичечкая и прикладная механика. – 2009. – Вып.46. – С.29-35.
8. Кирилюк В.С. Трехмерная контактная задача для двух пьезокерамических тел с учетом тепловыделения / Кирилюк В.С., Левчук О.И. // Теоретичечкая и прикладная механика. – 2011. – Вып. 3 (49). – С.28-37.

Поступила в редколлегию 26.03.2014.

УДК 539.3

ЛУГОВОЙ П.З., д.т.н., профессор, гл.науч.сотр.
ПРОКОПЕНКО Н.Я., к.т.н., ст.науч.сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

О ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Введение. При анализе воздействия гармонических нагрузок на оболочку необходимо знать динамические характеристики распространяющихся волн [1], и, в частности, их волновые параметры. После определения последних строятся дисперсионные кривые. Задача о построении этих кривых для подкрепленных ребрами замкнутых цилиндрических оболочек рассмотрена в работах [2, 3], в которых оценивается влияние дискретного размещения ребер на число и форму дисперсионных кривых.

Ниже дисперсионные кривые получены для гармонических волн, распространяющихся вдоль замкнутых цилиндрических оболочек, усиленных регулярной сеткой продольных ребер и находящихся на упругом основании Пастернака.

Постановка задачи и уравнения движения. Рассматривается задача о распространении гармонических волн вдоль замкнутых круговых цилиндрических оболочек, шарнирно опертых по краям и подкрепленных продольными ребрами. Дисперсионные уравнения получены в результате точного решения уравнений движения оболочек, усиленных регулярной системой продольных ребер, выведенных с учетом дискретного размещения ребер, на основе предположения, что движение собственно оболочки (обшивки) может быть описано с использованием прикладной теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а движение ребер – прикладной теорией стержней Кирхгофа-Клебша [2]. Рассматривается случай деформирования оболочки, когда профиль волны в окружном направлении имеет узел прогиба на ребре.

Для волн рассматриваемого профиля полученные в [3] дисперсионные уравнения с учетом упругого основания [1] можно представить в виде

$$1 + L_n^{22} + L_n^{44} + L_n^{22}L_n^{44} - L_n^{24}L_n^{42} = 0 \quad \left(n=0,\ \frac{k_1}{2}\delta_{k_1 2s}\right), \tag{1}$$

где $L_n^{22} = C_3\Phi_1^n\left(\dfrac{N_{n_1}}{1+\delta_{0n_1}}\right) - C_4\Phi_1^n\left(n_1 M_{n_1}\right);$