// Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, № 2. – P.132-170.
7. Кирилюк В.С. О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством / Кирилюк В.С. // Теоретичечкая и прикладная механика. – 2009. – Вып.46. – С.29-35.
8. Кирилюк В.С. Трехмерная контактная задача для двух пьезокерамических тел с учетом тепловыделения / Кирилюк В.С., Левчук О.И. // Теоретичечкая и прикладная механика. – 2011. – Вып. 3 (49). – С.28-37.

Поступила в редколлегию 26.03.2014.

УДК 539.3

ЛУГОВОЙ П.З., д.т.н., профессор, гл.науч.сотр.
ПРОКОПЕНКО Н.Я., к.т.н., ст.науч.сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

О ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Введение. При анализе воздействия гармонических нагрузок на оболочку необходимо знать динамические характеристики распространяющихся волн [1], и, в частности, их волновые параметры. После определения последних строятся дисперсионные кривые. Задача о построении этих кривых для подкрепленных ребрами замкнутых цилиндрических оболочек рассмотрена в работах [2, 3], в которых оценивается влияние дискретного размещения ребер на число и форму дисперсионных кривых.

Ниже дисперсионные кривые получены для гармонических волн, распространяющихся вдоль замкнутых цилиндрических оболочек, усиленных регулярной сеткой продольных ребер и находящихся на упругом основании Пастернака.

Постановка задачи и уравнения движения. Рассматривается задача о распространении гармонических волн вдоль замкнутых круговых цилиндрических оболочек, шарнирно опертых по краям и подкрепленных продольными ребрами. Дисперсионные уравнения получены в результате точного решения уравнений движения оболочек, усиленных регулярной системой продольных ребер, выведенных с учетом дискретного размещения ребер, на основе предположения, что движение собственно оболочки (обшивки) может быть описано с использованием прикладной теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а движение ребер – прикладной теорией стержней Кирхгофа-Клебша [2]. Рассматривается случай деформирования оболочки, когда профиль волны в окружном направлении имеет узел прогиба на ребре.

Для волн рассматриваемого профиля полученные в [3] дисперсионные уравнения с учетом упругого основания [1] можно представить в виде

$$1 + L_n^{22} + L_n^{44} + L_n^{22} L_n^{44} - L_n^{24} L_n^{42} = 0 \quad \left(n=0,\ \frac{k_1}{2}\delta_{k_1 2s}\right), \tag{1}$$

где $L_n^{22} = C_3 \Phi_1^n \left(\dfrac{N_{n_1}}{1+\delta_{0n_1}} \right) - C_4 \Phi_1^n \left(n_1 M_{n_1} \right);$

$$L_n^{24} = C_6 \Phi_1^n \left(n_1 M_{n_1} \right) + C_4 \Phi_1^n \left(\frac{N_{n_1}}{1 + \delta_{0n_1}} \right);$$

$$L_n^{42} = -C_3 \Phi_1^n \left(n_1 M_{n_1} \right) - C_4 \Phi_1^n \left(n_1^2 F_{n_1} \right);$$

$$L_n^{44} = C_6 \Phi_1^n \left(n_1^2 F_{n_1} \right) - C_4 \Phi_1^n \left(n_1 M_{n_1} \right);$$

$$\Phi_1^n \left(X_{n_1} \right) = X_n + \sum_{l=1}^{\infty} \left(X_{lk_1+n} + X_{lk_1-n} \right); \tag{2}$$

$$N_n = \frac{1}{D_n} \left[a_n^{11} a_n^{33} - \left(a_n^{13} \right)^2 \right]; \quad M_n = \frac{1}{D_n} \left(a_n^{13} a_n^{12} - a_n^{11} a_n^{23} \right);$$

$$F_n = -\frac{1}{D_n} \left[a_n^{11} a_n^{22} - \left(a_n^{12} \right)^2 \right];$$

$$D_n = -a_n^{11} a_n^{22} a_n^{33} - 2 a_n^{12} a_n^{13} a_n^{23} + a_n^{11} \left(a_n^{23} \right)^2 + a_n^{22} \left(a_n^{13} \right)^2 + a_n^{33} \left(a_n^{12} \right)^2;$$

$$a_n^{11} = k^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 - \omega_1^2, \quad a_n^{12} = \frac{1+\nu}{2} kn, \quad a_n^{13} = \nu k;$$

$$a_n^{22} = \left(1 + a^2 \right) n^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(1 + 4a^2 \right) k^2 - \omega_1^2,$$

$$a_n^{23} = n \left[1 + (2-\nu) a^2 k^2 + a^2 n^2 \right];$$

$$a_n^{33} = 1 + a^2 \left(k^2 + n^2 \right)^2 + \overline{C}_1 + \overline{C}_2 (k^2 + n^2) - \omega_1^2;$$

$$C_3 = k^2 \left(\lambda_{1c} k^2 + \mu_c \right) - \overline{\rho}_c \overline{\gamma}_c \omega_1^2 \left(1 - \frac{h_c}{r} \right) - \overline{\rho}_c \overline{\mu}_c \omega_1^2;$$

$$C_4 = k^2 \left(\lambda_{2c} k^2 - \mu_c \right) - \overline{\rho}_c \overline{\delta}_c \omega_1^2 \left(1 - \frac{h_c}{r} \right) + \overline{\rho}_c \overline{\mu}_c \omega_1^2;$$

$$C_6 = k^2 \left(\lambda_{3c} k^2 + \mu_c \right) - \overline{\rho}_c \left(\overline{\mu}_c + \overline{\eta}_c \right) \omega_1^2;$$

$$\omega_1 = \frac{\omega}{\omega_0}, \ \omega_0^2 = \frac{E}{\left(1 - \nu^2 \right) \rho_0 r^2}, \ a^2 = \frac{h^2}{12 r^2}, \ \overline{\rho}_c = \frac{\rho_c}{\rho_0}, \ \overline{\gamma}_c = \frac{F_c k_1}{2\pi r h}, \ \overline{\delta}_c = \frac{h_c}{r} \overline{\gamma}_c;$$

$$\overline{\eta}_c = \left(\frac{h_c}{r} \right)^2 \overline{\gamma}_c, \quad \overline{\mu}_c = \frac{I_{kpc} k_1}{2\pi r^3 h}, \quad \lambda_{1c} = \frac{E_c I_{zc} k_1 \left(1 - \nu^2 \right)}{2\pi r^3 h E}, \quad \lambda_{2c} = \frac{h_c}{r} \lambda_{1c};$$

$$\lambda_{3c} = \left(\frac{h_c}{r} \right)^2 \lambda_{1c}, \quad \mu_c = \frac{G_c}{E_c} \left(1 - \nu^2 \right) \overline{\mu}_c,$$

k – волновой параметр, h, r – толщина оболочки и радиус ее срединной поверхности; E, ν, ρ_0 – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки; ω – круговая частота колебаний, возбуждаемых в оболочке внешним источником; F_c, I_{zc}, I_{kpc} – площадь поперечного сечения ребер, его моменты инерции при изгибе в плоскости, эквидистантной касательной к срединной поверхности обшивки, и при кручении; h_c – эксцентриситет ребер (расстояние от осей ребер до срединной поверхности оболочки, $h_c>0$, если ребро укреплено на внутренней поверхности обшивки);

k_1 – число ребер; E_c, G_c, ρ_c – модуль упругости и модуль сдвига материала ребер, а также его плотность, 2n – параметр, определяющий число узловых точек профиля волны в окружном направлении; $\delta_{k_1 2s}$ (s=1, 2, …) – символ Кронеккера.

Уравнения для вычисления частот запирания могут быть получены из уравнения (1), если в них принять $k = 0$.

Числовые результаты. Вычисления выполнены для оболочки, усиленной продольными ребрами, размещенными на внутренней поверхности обшивки, имеющей такие безразмерные геометрические и механические параметры:

$$\frac{h}{r}=0{,}25\cdot 10^{-2};\quad \frac{F_c}{2\pi rh}=0{,}16\cdot 10^{-1};\quad \frac{h_c}{r}=0{,}14\cdot 10^{-1};\quad \frac{I_{kpc}}{2\pi r^3 h}=0{,}53\cdot 10^{-6};$$

$$\frac{I_{zc}}{2\pi r^3 h}=0{,}13\cdot 10^{-6};\ E_c=E;\ G_c=0{,}3845E;\ \nu=0{,}3.$$

Принято, что характер внешнего воздействия таков, что в оболочке возбуждаются гармонические волны, профиль которых таков, что они описываются дисперсионными уравнениями (1). В табл.1 представлены результаты вычисления частот запирания в зависимости от количества подкрепляющих ребер k_1 для различных значений коэффициентов упругого основания Пастернака для двух случаев, когда $n = 0$ (нагружение ребристой оболочки гармонической нагрузкой циклически симметричной в окружном направлении с периодом $2\pi / k_1$) и $n = k_1 / 2$ (нагружение оболочки гармонической нагрузкой циклически симметричной в окружном направлении с периодом $4\pi / k_1$).

Таблица 1 – Влияние количества ребер и коэффициентов упругого основания Пастернака на частоты запирания

$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	k_1	$\omega_1 \cdot 10$	
			$n = 0$	$n = k_1 / 2$
0,001	0,0001	2	0,326, 0,490, 0,524, 0,939, 1,230, 1,569, 1958	0,230, 0,416, 0,603, 0,833, 1,106, 1,427, 1,796
-“-	-“-	4	0,503, 0,962, 1,602	0,331, 0,711, 1,258, 1,995
-“-	-“-	6	0,710, 1,599	0,412, 1,102
-“-	-“-	8	0,959	0,500, 1,595, 1,608
	-“-	10	1,252	0,598
0,002	0,0002	2	0,470, 0,706, 0,977, 1,286	0,326, 0,585, 0,836, 1,127, 1,456, 1,825
-“-	-“-	4	1,635	0,462, 0,975, 1,632
-“-	-“-	6	0,973	0,589, 1,451
-“-	-“-	8	1,280	0,700
-“-	-“-	10	1,625	0,829
0,003	0,0003	2	0,577, 0,861, 1,183, 1,54 1,9393	0,400, 0,716, 1,017, 1,359, 1,736
-“-	-“-	4	0,859, 1,541	0,572, 1,181, 1,935
-“-	-“-	6	1,179	0,710, 1,730
-“-	-“-	8	1,536	0,854
-“-	-“-	10	1,926	1,008

Из табл.1 видно, что с увеличением количества подкрепляющих ребер значения частот запирания возрастают, а их количество в заданном диапазоне частот возбуждения $(0 \le \omega_1 \le 0,2.)$ уменьшается.

Дисперсионные кривые получены в результате решения уравнения (1) (при выполнении вычислений в рядах (2) удерживалось 100 слагаемых). На рис.1 и 2 показаны дисперсионные кривые для оболочки, нагруженной гармонической нагрузкой циклически симметричной в окружном направлении с периодом $4\pi / k_1$. Кривые на рис.1 соответствуют оболочке без упругого основания, подкрепленной четырьмя ребрами, а на рис.2 – оболочке, подкрепленной восемью ребрами и находящейся на упругом основании Пастернака ($\overline{C}_1$=0,001; $\overline{C}_2$=0,0001). Сравнивая кривые на рис.1 и 2, видим, что увеличение количества подкрепляющих ребер и наличие упругого основания приводит к уменьшению числа дисперсионных кривых в заданном диапазоне частот возбуждения, при этом изменяется форма дисперсионных кривых (они становятся более пологими).

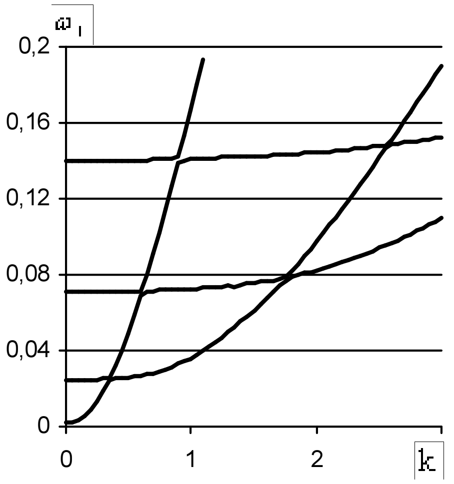

Рисунок 1– Дисперсионные кривые для оболочки без упругого основания ($k_1 = 4$)

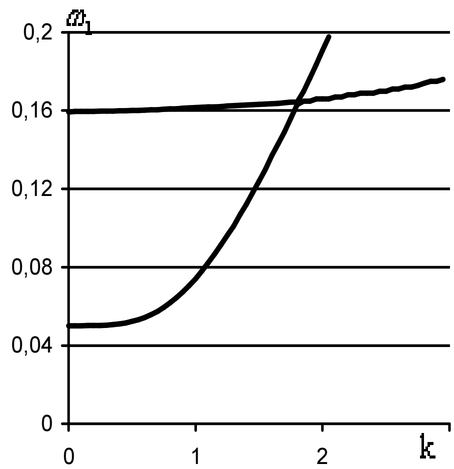

Рисунок 2 – Дисперсионные кривые для оболочки на упругом основании ($k_1 = 8$)

Для показанных на рис.1, 2 дисперсионных кривых наблюдается их незначительное «раздвоение».

Выводы. На основании проведенного исследования можно сделать вывод, что упругое основание Пастернака и усиление подкрепления оболочки приводят к возрастанию частот запирания и уменьшению количества дисперсионных кривых в заданном диапазоне частот возбуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Головко К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. – К.: Изд-во полиграф. центр «Киевский университет», 2012. – 541с.
2. Заруцкий В.А. О влиянии дискретного размещения продольных ребер на распространение гармонических волн вдоль цилиндрических оболочек / Заруцкий В.А., Прокопенко Н.Я. // Прикладная механика. – 2003. – № 4 (39). – С.92-98.
3. Заруцкий В.А. О дисперсионных кривых для гармонических волн, распространяющихся вдоль продольно подкрепленных цилиндрических оболочек / Заруцкий В.А., Прокопенко Н.Я. // Прикладная механика. – 2003. – №6. – С.110-114.

Поступила в редколлегию 26.03.2014.