

- В.Д.Кубенко. – Киев.:Наукова думка, 1979. – 184с.
3. Нигул У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек / У.К.Нигул // Труды VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С.593-599.
  4. Сагомоян А.Я. Осевой удар цилиндрической оболочки о жесткую плоскость / А.Я.Сагомоян // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – №2. – С.173-176.
  5. Коваленко А.П. О применимости интегрального преобразования Лапласа- Карсона при математическом моделировании переходных процессов в цилиндрических оболочках / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2010. – Вып. 3(39). – С.213-217.
  6. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости метода итераций при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2008.– Вып. 2(31). – С.240-244.
  7. Коваленко А.П. Массово-геометрические характеристики системы упругий трубопровод-жидкость и их влияние на переходные процессы в системе при продольных динамических ударных нагрузках / А.П.Коваленко // КОНСОНАНС-2013. Акустичний симпозіум (01.10-02.10 2013 р.): Збірник праць. – Київ, 2013. – С.142-147.
  8. Коваленко А.П. Построение математической модели исследования переходных процессов в системе упругий трубопровод жидкость при продольных ударных динамических нагружениях / Коваленко А.П. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки): тематичний випуск “Математичні проблеми технічної механіки” – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2013. – Випуск 2(22). – 2012. – С.110-115.
  9. Коваленко А.П. Влияние массово-геометрических характеристик системы упругий трубопровод-жидкость на переходные процессы в трубопроводе при продольных динамических ударных нагрузках / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2013.– Вып. 2(47). – С.150-154.

*Поступила в редколлегию 02.04.2014.*

УДК 539.3

БЫСТРОВ В.М., к.физ.-мат.н.  
ДЕКРЕТ В.А., д.физ.-мат.н.  
ЗЕЛЕНСКИЙ В.С., к.физ.-мат.н.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ДОКРИТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

**Введение.** При эксплуатационных нагрузках и технологических процессах изготовления волокнистых и слоистых композитных материалов возникают сжимающие напряжения, которые могут привести к потере устойчивости в структуре композитного материала [1-7]. Потеря устойчивости в структуре волокнистых и слоистых композитных материалах является одним из основных механизмов разрушения композитных материалов при сжатии [5-7]. В [5] сформулированы неклассические проблемы механики разрушения и рассмотрены соответствующие механизмы разрушения композитных материалов при сжатии. Одной из таких проблем является разрушение в виде смятия торцов при сжатии композитных материалов [6, 7]. В [6] показано, что на первоначальном

этапе разрушения при смятии торцов наиболее вероятным механизмом является потеря устойчивости в структуре композита, которая имеет характер приповерхностной потери устойчивости вблизи загруженного торца с формами потери устойчивости, которые затухают при удалении от торца. Этот механизм относится к однонаправленным композитам или к ортогонально-армированным композитам при нагружении вдоль осей симметрии. По терминологии [6] указанное явление соответствует поверхностной неустойчивости возле плоской границы (плоского торца) при ее нагружении внешней нормальной сжимающей нагрузкой. В [7] представлены результаты численного исследования приповерхностной потери устойчивости слабоармированного слоистого композитного материала при одноосном нагружении, которые подтверждают наличие указанного механизма.

При одноосном сжатии однонаправленных композитов вдоль направления армирования возникают нормальные сжимающие напряжения на плоскостях, которые параллельны торцевой поверхности. Это обуславливает описанный выше механизм на первоначальном этапе разрушения композита при смятии торцов. При этом напряженно-деформированное состояние в случае равномерной поверхностной нагрузки может рассматриваться как однородное или кусочно-однородное. Более сложное напряженно-деформированное состояние может возникать за счет ограничений на перемещения в плоскости торца и более сложных условий нагружения поверхности материала. К таким условиям нагружения можно отнести поверхностную нагрузку, которая прикладывается только к армирующим компонентам композитного материала и в общем случае имеет период, сравнимый или превышающий характерный размер структуры материала. В [8] показано, что размер и геометрия области неоднородности напряженного состояния, характер распределения напряжений и деформаций зависят от соотношения механических и геометрических характеристик компонент материала, степени их анизотропии, а также от соотношения геометрических параметров, которые определяют микроструктуру композита и размер расчетной области.

Вполне очевидно, что адекватное описание столь сложного явления как потеря устойчивости в структуре композитных материалов не может быть достаточно надежно реализовано в рамках двумерных прикладных теорий устойчивости тонкостенных элементов (стержней, пластин и оболочек). В настоящее время наиболее строгим и точным подходом при решении задач указанного класса является применение модели кусочно-однородной среды и основных соотношений трехмерной линеаризованной теории устойчивости (ТЛТУДТ), которые учитывают неоднородность докритического состояния [9, 10].

Сложность получения аналитических решений для задач указанного класса предполагает использование современных численных методов [7, 11]. Следует отметить, что при использовании численных методов и, в частности, метода сеток, который применяется в данной работе, задачи определения докритического состояния и устойчивости формулируется для расчетной области конечных размеров. Переход от исходной модели для материалов, которым соответствует бесконечная или полубесконечная области, к области конечных размеров осуществляется из условий регулярности и периодичности композитных структур, симметричности условий нагружения. При этом для расчетной области конечных размеров должны быть определенным образом учтены условия периодичности композитной структуры, соответствующие материалу, который моделируется бесконечной или полубесконечной областью. Решение задачи устойчивости для представительного элемента композитного материала при граничных условиях, которые соответствуют условиям симметрии (а не условиям периодичности) приводит к более высоким значениям критических нагрузок и формам потери устойчивости, которые соответствуют т.н. “однонаправленным” формам потери устойчивости

(unidirectional buckling) [12]. Это связано с наложением дополнительных связей в виде, например, смешанных граничных условий на боковых сторонах расчетной области, которые соответствуют условиям симметрии. Но с другой стороны такая расчетная модель определенным образом учитывает влияние боковых поверхностей образца или элемента конструкции при исследовании механизма разрушения материала при смятии торцов.

Данная работа является развитием численных исследований устойчивости композитных материалов при неоднородных докритических состояниях и связана с разработкой эталонных моделей для их использования в рамках вычислительного эксперимента при расчете композитных материалов и элементов конструкций. В [13] представлена расчетная схема для численного исследования и проведения сравнительного анализа критических параметров устойчивости материала и элемента конструкции слоистой структуры при одноосном продольном сжатии армирующих слоев (для элемента конструкции – более жестких слоев) поверхностной нагрузкой. Эта расчетная схема может использоваться для исследования механизмов разрушения композитных материалов, связанных с потерей устойчивости в структуре композита, которая имеет характер приповерхностной потери устойчивости вблизи загруженной торцевой поверхности материала. В данной работе на основе указанной расчетной схемы исследовано влияние неоднородности докритического состояния на критическую нагрузку и форму потери устойчивости слоистого композитного материала. Задача рассмотрена для случая граничных условий, которые соответствуют условиям симметрии нагружения композитного материала при одноосном сжатии поверхностной нагрузкой, которая приложена к армирующим слоям.

**Постановка задачи.** Рассматривается задача устойчивости слоистого двухкомпонентного композитного материала регулярной структуры (рис.1) при равномерном одноосном сжатии армирующих слоев поверхностной нагрузкой постоянной интенсивности. Нагружение реализуется в виде “мертвой” нагрузки, что обеспечивает выполнение достаточных условий применимости статического метода ТЛТУДТ [12]. Для исследования устойчивости композитных структур применяется *статический метод трехмерной линеаризованной теории устойчивости в рамках второго варианта теории малых докритических деформаций*. Докритическое состояние определяется из решения плоской задачи линейной теории упругости кусочно-однородных тел для различных граничных условий, которые соответствуют трехслойному элементу периодичности. Исходя из условий симметрии нагружения, в качестве расчетной схемы рассматривается краевая задача с однородными смешанными граничными условиями на боковых сторонах двухслойной расчетной области.

Расчетная модель для композитного материала в силу неоднородности докритического состояния предполагает исследование механизмов потери устойчивости в структуре материала и механизмов приповерхностной потери устойчивости для полупространства слоистой структуры.

При постановке задачи слоистый композитный материал отнесем к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  и разместим в верхнем полупространстве  $x_2 \geq 0$ . Принимается, что слои являются достаточно протяженными в направлении оси  $Ox_3$ , размещены параллельно плоскости  $Ox_2x_3$  и армирующие слои сжимаются вдоль оси  $Ox_2$  поверхностной (торцевой) нагрузкой постоянной интенсивности. При выполнении этих условий задача может рассматриваться в двумерной постановке для случая плоской деформации в плоскости  $x_1Ox_2$  (рис.1).

При использовании статического метода Эйлера задача устойчивости сводится к обобщенной задаче на собственные значения, в которой минимальное собственное значе-

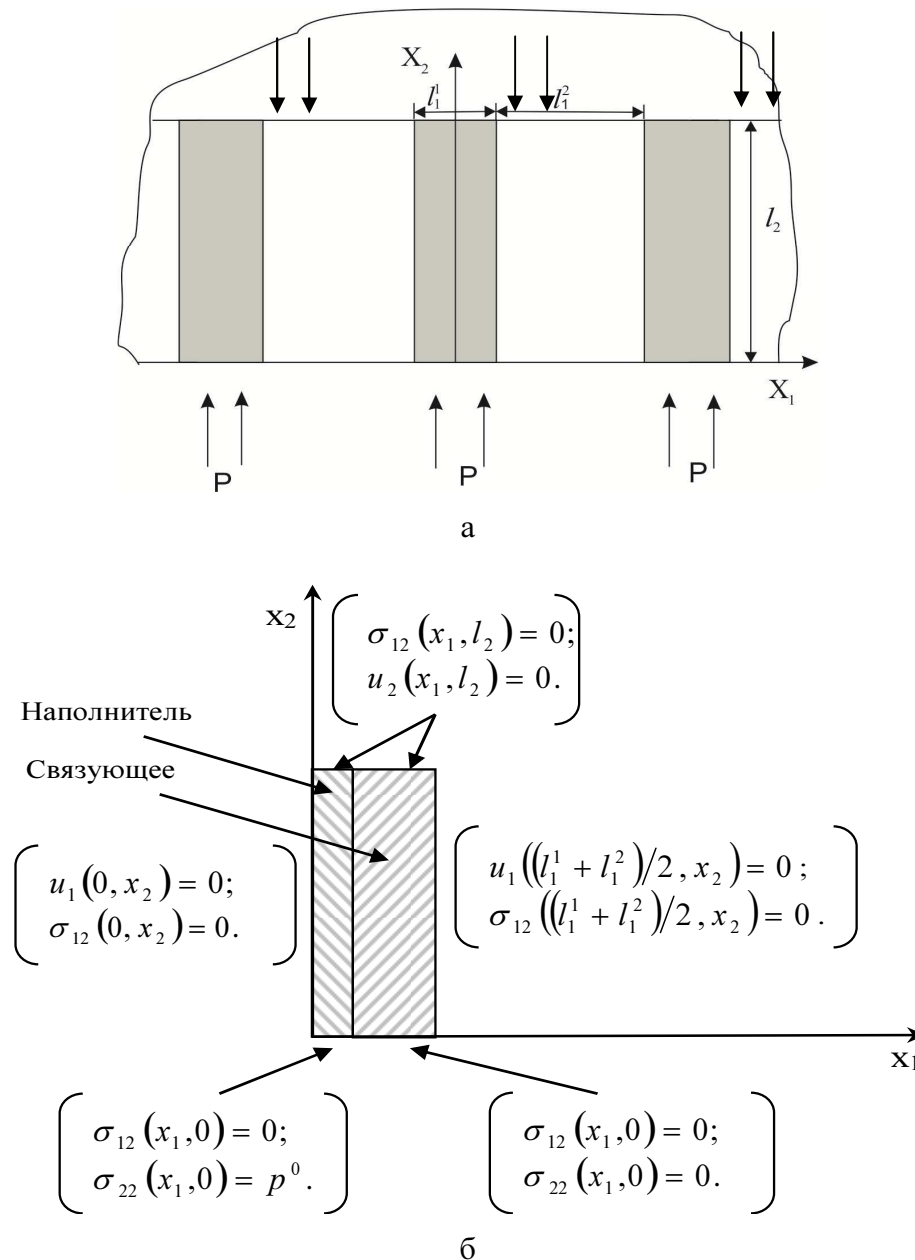


Рисунок 1 – Расчетная схема для исследования потери устойчивости в структуре слоистого композитного материала при одноосном сжатии

ние  $\lambda$  определяет критическую нагрузку, а соответствующая собственная функция  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  – форму потери устойчивости. Уравнения и граничные для определения критических параметров устойчивости рассматриваемых композитных структур имеют следующий вид:

$$(\sigma_{im} + \lambda \sigma_{ik}^0 u_{m,k})_{,i} = 0, x \in \Omega. \quad (1)$$

$$(\sigma_{21} + \lambda \sigma_{2k}^0 u_{1,k}) = 0 \wedge u_2 = 0, x \in S_1,$$

$$(\sigma_{12} + \lambda \sigma_{1k}^0 u_{2,k}) = 0 \wedge u_1 = 0, x \in S_2,$$

$$(\sigma_{im} + \lambda \sigma_{ik}^0 u_{m,k}) = 0, x \in S_3, \quad (2)$$

$$(\sigma_{22} + \lambda \sigma_{22}^0 u_{2,2}) = 0, x \in S_4,$$

$$(\sigma_{12} + \lambda \sigma_{1k}^0 u_{2,k}) = 0 \wedge u_1 = 0, x \in S_5.$$

Условия на контакте между слоями:  $[\sigma_{ij}] = 0, [u_i] = 0.$  (3)

Критическая нагрузка определяется из условия:

$$P_{kp} = \min |\lambda| / (l_1^1 + l_1^2) \int_{x_1 \in S_3 \cup S_4} P(x_1) dx_1 = \min |\lambda| P(l_1^1 / (l_1^1 + l_1^2)),$$
 (4)

где  $\lambda$  – минимальное собственное число задачи (1)-(3). Вид соотношения (4) отражает тот факт, что сжимающая нагрузка прикладывается только к армирующим слоям.

Компоненты докритического состояния определяются из уравнений линейной теории упругости, которые вместе с граничными условиями и основными соотношениями имеют вид:

$$\sigma_{ij,i}^0 = 0, x \in \Omega.$$
 (5)

$$\sigma_{21} = 0 \wedge u_2^0 = 0, x \in S_1, \quad \sigma_{12} = 0 \wedge u_1^0 = 0, x \in S_2, \quad \sigma_{ij}^0 = 0, x \in S_3,$$
 (6)

$$\sigma_{22}^0 = P \wedge \sigma_{21}^0 = 0, x \in S_4, \quad \sigma_{12}^0 = 0 \wedge u_1^0 = 0, x \in S_5, \quad \sigma_{ii}^0 = A_{ik} \varepsilon_{ik}, \quad \sigma_{ij}^0 = 2G \varepsilon_{ij},$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), i \neq j, \quad A_{ii} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad A_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$
 (7)

Обозначения в (1)-(7) являются общепринятыми и индексы изменяются от 1 до 2.  $\wedge, \vee$  – знаки логического умножения и сложения. В соотношениях (1)-(7) верхним индексом “0” обозначены компоненты напряжений и перемещений для докритического состояния. Индекс, обозначающий принадлежность к слою композитной структуры для удобства опущен. Также использованы обозначения, которые соответствуют рис.2:

$$S_1 \in (x_2 = l_2 \wedge 0 \leq x_1 \leq l_1^1 + l_1^2), \quad S_2 \in (0 \leq x_2 \leq l_2 \wedge 0 \wedge x_1 \leq l_1^1 + l_1^2), \quad S_3 \in (x_2 = 0 \wedge l_1^1 \leq x_1 \leq l_1^2),$$

$$S_4 \in (x_2 = 0 \wedge 0 \leq x_1 \leq l_1^1), \quad S_5 \in (x_1 = 0 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2).$$

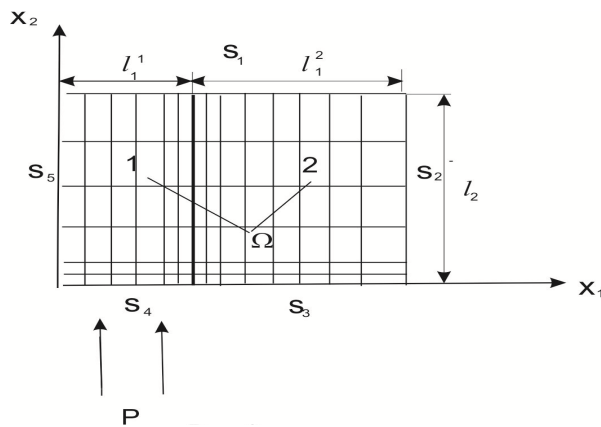


Рисунок 2 – Разностная сетка

Для сравнительного анализа результатов определения критических нагрузок и форм потери устойчивости в композитных структурах при однородных и неоднородных докритических состояниях в рамках вычислительного эксперимента определялись значения напряжений в области установившегося напряженного состояния для неоднородного докритического состояния. Эти значения на последующих этапах вычислительного эксперимента использовались для задания условий нагружения, которые приводят к кусочно-однородному докритическому состоянию.

**Разностная задача.** Задача (1)-(7) решается методом сеток с использованием концепции базовой схемы. При таком подходе разностная схема для расчетной области строится в каждом сеточном узле как определенная сумма значений базовой схемы, представляющей собой разностную схему, полученную вариационно-разностным способом на шаблоне ячейки разностной сетки [7].

При использовании численного подхода задача для исходной полубесконечной модели композитного материала сводится к задаче для ограниченной расчетной области. Размер этой области определяется в результате вычислительного эксперимента, исходя из условия, что расчетные параметры принимают установившееся значение отно-

сительно изменения (увеличения) размеров расчетной области в направлении оси  $Ox_2$ . Такими расчетными параметрами являются размер области неоднородного докритического состояния и критическая нагрузка.

На рис.2 представлена расчетная область, в которой введена неравномерная разностная сетка. На прямоугольной неравномерной разностной сетке  $\bar{\omega} = \omega + \gamma$ , которая аппроксимирует область  $\bar{\Omega}$ , задаче (1)-(7), ставится в соответствие разностная задача

$$A_m \mathbf{u} = \lambda B_m \mathbf{u} \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}, \quad (8)$$

где

$$A_m \mathbf{u} = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} a_m(\xi) \mathbf{u} & , \quad \mathbf{x} \in \gamma_{u_m} \\ I u_m & , \quad \mathbf{x} \in \gamma_{u_m} \end{cases}, \quad B_m \mathbf{u} = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} b_m(\xi) \mathbf{u} \\ I u_m \end{cases}; \quad (9)$$

$$a_i(\xi) \mathbf{u} = -H \frac{\sigma_{ji} + \sigma_{ji}^{\xi_j}}{\eta_{\xi_j}}, \quad b_i(\xi) \mathbf{u} = -H \frac{\sigma_{jk}^0 u_{i,\xi_k} + (\sigma_{jk}^0 u_{i,\xi_k})^{\xi_j}}{\eta_{\xi_j}}, \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}. \quad (10)$$

$$\sigma_{ii} = c_{ik} \varepsilon_{kk}, \quad \sigma_{12} = 2g \varepsilon_{12}; \quad \varepsilon_{ij} = 0,5 \left( u_{i,\xi_j} + u_{j,\xi_i} \right); \quad (11)$$

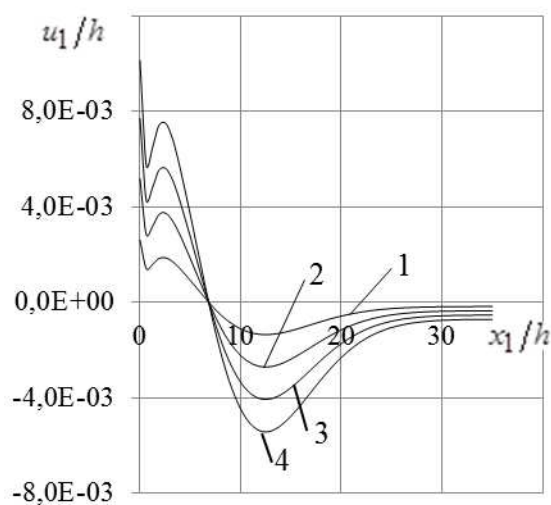
$$z_{,\xi_i} = -\text{sign}(\xi_i) \frac{z^{-\xi_i} - z}{h_i}. \quad (12)$$

В (8)-(12) переменные обозначаются (где такое возможно) так же, как соответствующие континуальные переменные, что, по-видимому, не может привести к недоразумениям. В (8)-(12) обозначено:  $a_m, b_m$  – компоненты базовых операторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ;  $H$  – площадь ячейки;  $h_i$  – шаг ячейки в направлении  $x_i$ ;  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  – разностные аналоги компонент напряжений, деформаций из (4);  $z_{,\xi_i}$  – разностная производная сеточной функции  $z(\xi)$  в направлении  $x_i$ , правая – при  $\xi_i < 0$ ;  $\xi = (\xi_1, \xi_2), \xi_i = \pm i$  – параметр узла ячейки; знак  $\sum_{\xi \in x}$  означает суммирование компоненты базовой схемы по тем параметрам  $\xi$ , которые совпадают с сеточным узлом  $\mathbf{x}$ ;  $\xi_{-i} = -\xi_i$ ;  $I$  – тождественный оператор;  $\gamma_{u_m}$  – участок границы  $\gamma$ , на котором  $m$ -ая компонента разностного аналога граничного условия задана в смещениях.

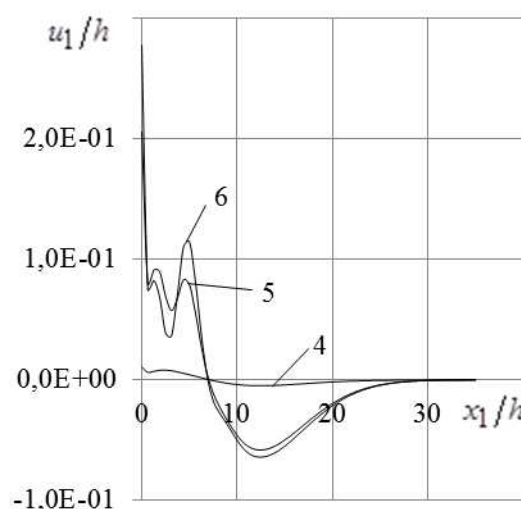
Для решения дискретных задач применялись эффективные численные методы (прямые и итерационные) в соответствии с методикой, представленной в [11]. В рассматриваемом случае алгебраическая задача решалась прямым методом – методом Холецкого [14], а после сгущения разностной сетки применялся итерационный метод сопряженных градиентов [14]. При этом решение, полученное методом Холецкого, интерполировалось и принималось в качестве начального приближения для решения дискретной задачи на собственные значения методом итерирования подпространства [15].

**Результаты расчетов.** Рассматривается материал со следующими механическими и геометрическими характеристиками:  $E^1 / E^2 = 100$ ;  $\nu^1 = \nu^2 = 0,3$ ;  $c_a = S_4 / (S_3 + S_4) = 0,5$ , где  $c_a$  – объемное содержание армирующих компонентов. Здесь  $E^1, E^2$  и  $\nu^1, \nu^2$  – соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона армирующих слоев и слоев связующего. На рис.3, а и 3, б представлены формы потери устойчивости в композитном материале при неоднородном докритическом состоянии соответственно для армирующего слоя и слоя наполнителя. Зависимости  $u_1(x_2)$  приведены для сечений  $x_1 / h = 0,125; 0,25; 0,375; 0,5; 0,625; 0,75$ , обозначенных на рисунках

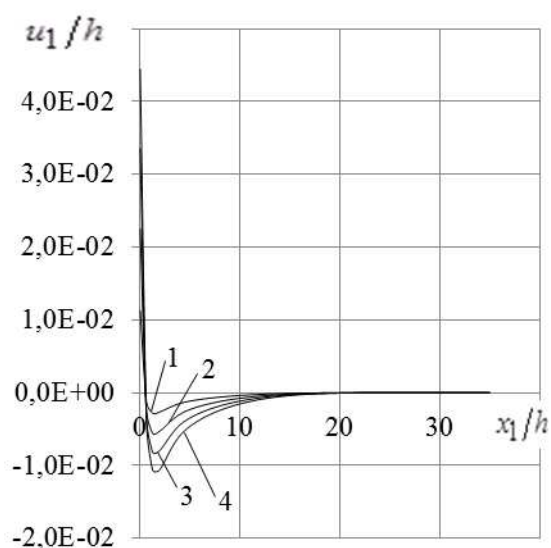
соответственно 1, 2, 3, 4, 5, 6. Значения координаты  $x_2$  и значения возмущений  $u_1$  отнесены к параметру структуры  $h = (l_1^1 + l_1^2)/2$ .



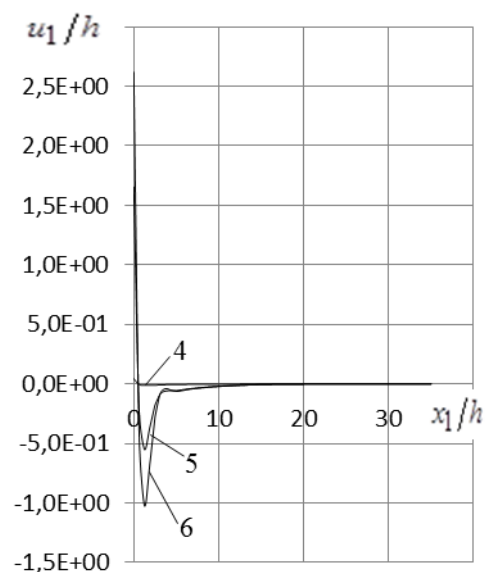
а



б



в



г

Рисунок 3 – Приповерхностные формы потери устойчивости в слоистом композитном материале при одноосном нагружении армирующих слоев при неоднородном (а, б) и однородном (в, г) докритическом состоянии

Представленные на графиках формы потери устойчивости имеют затухающий характер и характеризуют поверхностную неустойчивость композитного материала, соответствующую механизму смятия торцов. Эти формы локализуется вблизи поверхности материала и имеют вид синусоиды с затухающей амплитудой при удалении от поверхности. Для сравнения на рис.3, в и рис.3, г представлена аналогичная графическая информация для случая кусочно-однородного докритического состояния. При таком докритическом состоянии область локализации форм потери устойчивости (об-

ласть поверхностной неустойчивости) имеет значительно меньший размер, а максимальная амплитуда форм потери устойчивости характеризуется более высоким значением.

**Выводы.** Как видно из представленных результатов, потеря устойчивости в структуре слоистого композитного материала при одноосном поверхностном сжатии имеет характер приповерхностной потери устойчивости вблизи нагруженной поверхности с формами потери устойчивости, которые затухают при удалении от торцевой поверхности композитного материала. Неоднородность докритического состояния существенным образом влияет на амплитудные характеристики форм потери устойчивости и размеры области их локализации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Babich I.Yu. The Three-Dimensional Theory of Stability of Fibrous and Laminated Materials / Babich I.Yu., Guz A.N., Chechov V.N. // *International Applied Mechanics*. – 2001. – № 9 (37). – P.1103-1141.
2. Guz A.N. Setting up a theory of stability of fibrous an laminated composites / Guz A.N. // *International Applied Mechanics*. – 2009. – № 6 (45). – P.587-613.
3. Fleck N.A. Compressive failure of fiber composites / Fleck N.A. // *Advances in Applied Mechanics*. – 1997. – № 33. – P.43-117.
4. Naik N.K. Compressive strength of unidirectional composites: evaluation and comparison of prediction models / Naik N.K., Kumar R.S. // *Composite Structures*. – 1999. – № 46. – P.299-308.
5. Guz A.N. On study of nonclassical problems of fracture mechanics and related mechanisms / Guz A.N. // *International Applied Mechanics*. – 2009. – №1. – P.1-31.
6. Гузь А.Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии / Гузь А.Н. – К.: Наукова думка, 1990. – 630с.
7. Гузь А.Н. Численное решение задач трехмерной теории устойчивости упругих тел / Гузь А.Н., Коханенко Ю.В. // *Прикладная механика*. – 2004. – № 11 (40). – С.117-126.
8. Быстров В.М. Затухание краевого эффекта Сен-Венана в слоистом композитном материале при наличии ненагруженных слоев наполнителя / Быстров В.М. // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2005. – Вып. 41. – С.55-59.
9. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / Гузь А.Н. – К.: Вища школа, 1986. – 512с.
10. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. / Guz A.N. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, – 1999. – 555p.
11. Численные методы. В 12-и т. / Григоренко Я.М., Шевченко Ю.В., Василенко А.Т. и др.; под общей ред. А.Н.Гузя. – Т.11. Механика композитов. – К.: “А.С.К.”, 2002. – 448с.
12. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии (обзор) / Гузь А.Н. // *Прикладная механика*. – 2012. – №3. – С.3-78.
13. Зеленский В.С. Устойчивость слоистого композитного материала при одноосном нагружении / Зеленский В.С., Декрет В. А., Быстров В.М. // *Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки): тематичний випуск “Математичні проблеми технічної механіки” / Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2012. – № 2 (18). – С.49-53.*
14. Бахвалов Н.С. Численные методы / Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельнов С.М. – М.: Наука, 1987. – 598с.
15. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / Парлетт Б. – М.: Мир, 1983. – 384с.

*Поступила в редколлегию 03.04.2014.*